

Neuronové sítě

Minimalizace disjunktivní normální formy



Zápis logické funkce

Logická funkce $f : \{0, 1\}^n \longrightarrow \{0, 1\}$

Zápis

- základní součtový tvar – disjunktivní normální forma (DNF)
- základní součinnový tvar – konjunktivní normální forma (CNF)



Výpis logických funkcí z pravdivostní tabulky

A	B	C	y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

DNF: $f(\bar{x}) = 1$

kombinace	součiny
0 0 0	$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$
0 1 0	$\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$
1 0 0	$A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$
1 1 0	$A \cdot B \cdot \bar{C}$

$$y = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot \bar{C}$$



Výpis logických funkcí z pravdivostní tabulky

A	B	C	y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

CNF: $f(\bar{x}) = 0$

kombinace

součty

0 0 1

$A + B + \bar{C}$

0 1 1

$A + \bar{B} + \bar{C}$

1 0 1

$\bar{A} + B + \bar{C}$

1 1 1

$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$

$$y = (A+B+\bar{C}) \cdot (A+\bar{B}+\bar{C}) \cdot (\bar{A}+B+\bar{C}) \cdot (\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})$$



Zjednodušování zápisu logické funkce (DNF)

Nejpoužívanější metody

- algebraická minimalizace
- grafická minimalizace



Algebraická minimalizace

- úprava logického výrazu podle pravidel Booleovy algebry

$$A + A = A$$

$$A + \bar{A} = 1$$

$$A + AB = A$$

$$A + \bar{A}B = A + B$$

A	B	y
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

vytvoříme DNF:

$$y = \bar{A}\bar{B} + A\bar{B} + AB$$

upravíme:

$$\begin{aligned} y &= \bar{A}\bar{B} + A\bar{B} + AB = \bar{A}\bar{B} + A(\bar{B} + B) = \\ &= \bar{A}\bar{B} + A = A + \bar{B} \end{aligned}$$



Algebraická minimalizace

- úprava logického výrazu podle pravidel Booleovy algebry

$$A + A = A$$

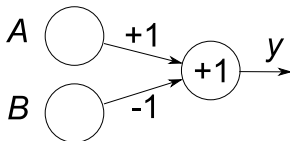
$$A + \bar{A} = 1$$

$$A + AB = A$$

$$A + \bar{A}B = A + B$$

A	B	y
-1	-1	+1
-1	+1	-1
+1	-1	+1
+1	+1	+1

$$y = A + \bar{B}$$



Grafická minimalizace – Karnaughova metoda

- Algebraická minimalizace – spojování sousedních součinů (součinů lišících se v jedinné proměnné)

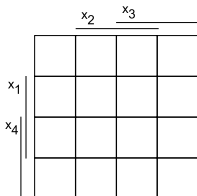
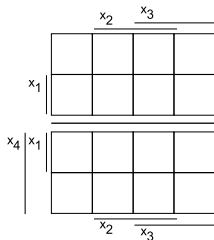
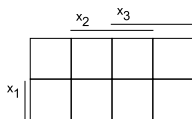
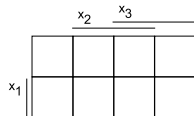
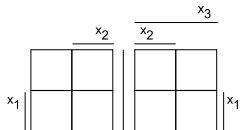
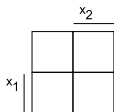
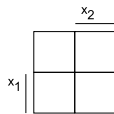
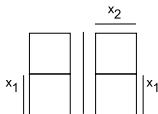
Př.

$$ABC\bar{D} + ABC\bar{D}D = ABC\bar{D}(\bar{D} + D) = ABC\bar{D}$$

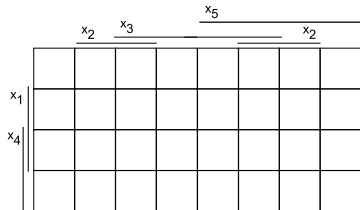
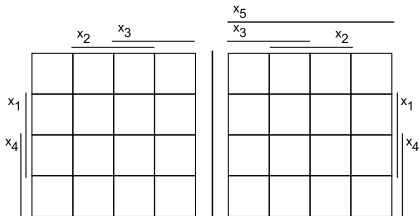
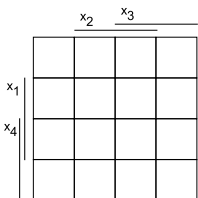
- Karnaughova metoda
 - jasný geometrický postup umožňuje vyhnout se hledání sousedních součinů složitým algebraickým způsobem
 - používá se nejlépe pro 3–5 proměnných



Karnaughova mapa



Karnaughova mapa



Karnaughova mapa

- Ve sloupci nebo řádku, u kterého je úsečka s proměnnou x_i , je hodnota $x_i = 1$, jinde $x_i = 0$
- Do tabulky píšeme hodnoty $f(\bar{x})$

Majoritní obvod

A	B	C	y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

		B		C	
		00	01	10	11
A	0	000 0	010 0	011 1	001 0
	1	100 0	110 1	111 1	101 1



Karnaughova mapa

- V mapě vytváříme podmapy – sjednocení 2^k sousedních stavů, kde $f(\bar{x}) = 1$
- Snažíme se vytvořit vždy co největší podmapu

Pravidla:

- Podmapami musí být pokryty všechny 1.
- Do podmapy spojujeme sousední stavy i přes okraje mapy. Členy sousedních polí se od sebe liší 1 proměnnou a tu můžeme vyloučit.
- Podmapu pravidelného tvaru (čtverec, obdélník) vytváříme co největší, aby se ze skupiny stavů vyloučilo co nejvíce proměnných.
- Podmapy se mohou prolínat.
- Nevytváříme zbytečné podmapy.
- Čím větší bude podmapa, tím jednodušší bude hledaný výraz.



Karnaughova mapa

Majoritní obvod

		C		
		B		
A	0	0	1 ^{1.}	0
	1	1 ^{2.}	1	1 ^{3.}

$$1. \bar{A}BC + ABC = BC$$

$$2. ABC\bar{C} + ABC = AB$$

$$3. ABC + A\bar{B}C = AC$$

$$y = BC + AB + AC$$



Zjednodušování zápisu neúplně zadané DNF

Zjednodušování zápisu neúplně zadané logické funkce (DNF)

- neúplně zadaná logická funkce může v určitých políčkách mapy nabývat libovolné hodnoty – 0 nebo 1, označíme ji \times
- při minimalizaci považujeme tyto stavy za jednotkové nebo nulové, jak je to z hlediska minimalizace nejvýhodnější

A	B	C	y
0	0	0	\times
0	0	1	\times
0	1	0	0
0	1	1	\times
1	0	0	\times
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

		B		C	
		000	010	011	001
A	0	\times	0	\times	\times
	1	\times	1	1	1



Zjednodušování zápisu neúplně zadané DNF

Zjednodušování zápisu neúplně zadané logické funkce (DNF)

- neúplně zadaná logická funkce může v určitých políčkách mapy nabývat libovolné hodnoty – 0 nebo 1, označíme ji \times
- při minimalizaci považujeme tyto stavy za jednotkové nebo nulové, jak je to z hlediska minimalizace nejvýhodnější

A	B	C	y
0	0	0	\times
0	0	1	\times
0	1	0	0
0	1	1	\times
1	0	0	\times
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

	B		C	
	x	0	x	x
A	x	1	1	1

$$y = A$$



Odhad počtu skrytých neuronů sítě

Tvrzení

- Logická síť pro funkci $f(x_1, \dots, x_n)$
- Máme m vzorů, které můžeme rozdělit na m^+ kladných a m^- záporných vzorů

$$m \text{ vzorů} \begin{cases} m^+, & \text{kladné vzory} & f(\bar{x}) = 1; \\ m^-, & \text{záporné vzory} & f(\bar{x}) = 0. \end{cases}$$

- Pak platí, že počet skrytých neuronů H je

$$H \leq |\text{DNF}(f)| \leq m^+$$

$$H \leq |\text{CNF}(f)| \leq m^-$$



Minimalizace CNF

Postup:

- Zaměníme nuly a jedničky ve výstupní funkci a považujeme to za novou logickou funkci (DNF).
- Zkoumáme tím, kdy tvrzení neplatí.
- Minimalizujeme tuto novou DNF.
- Potom $CNF = \overline{DNF}$



Minimalizace DNF

	x_2	x_3	x_5	x_2			
x_1	1	0	1	1	0	1	1
x_4	1	1	0	1	1	0	0
	1	0	1	1	1	1	0
	1	0	1	1	0	0	0



Minimalizace DNF

	x_2		x_3		x_5	x_2		
	1. 1	0	1	1	0	1	1 ^{5.}	1
x_1	1	1 ^{6.}	0	1	1	0	0	1 ^{4.}
x_4	1	0	1	1	1	1 ^{3.}	0	1
	1	0	1	1	0	0	0	1
					2.			

$$y = \overline{x_2} \overline{x_3} + \overline{x_1} x_3 \overline{x_5} + x_1 x_3 x_4 + x_1 \overline{x_2} + \overline{x_1} x_2 \overline{x_4} x_5 + x_1 \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5}$$



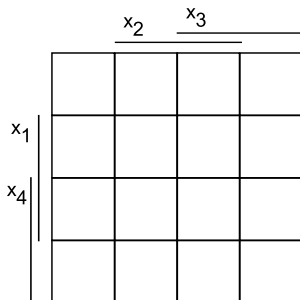
Minimalizace DNF

x_1	x_2	x_3	x_4	y
-1	-1	-1	-1	+1
-1	-1	-1	+1	+1
-1	-1	+1	-1	-1
-1	-1	+1	+1	-1
-1	+1	-1	-1	+1
-1	+1	-1	+1	+1
-1	+1	+1	-1	-1
-1	+1	+1	+1	-1
+1	-1	-1	-1	+1
+1	-1	-1	+1	+1
+1	-1	+1	-1	+1
+1	-1	+1	+1	+1
+1	+1	-1	-1	+1
+1	+1	-1	+1	-1
+1	+1	+1	-1	+1
+1	+1	+1	+1	-1



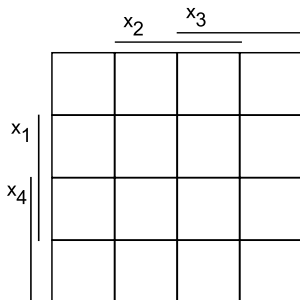
Minimalizace DNF

x_1	x_2	x_3	x_4	y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0



Minimalizace CNF

x_1	x_2	x_3	x_4	y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0



Lepší síť nakreslete

x_1	x_2	x_3	x_4	y
-1	-1	-1	-1	+1
-1	-1	-1	+1	+1
-1	-1	+1	-1	-1
-1	-1	+1	+1	-1
-1	+1	-1	-1	+1
-1	+1	-1	+1	+1
-1	+1	+1	-1	-1
-1	+1	+1	+1	-1
+1	-1	-1	-1	+1
+1	-1	-1	+1	+1
+1	-1	+1	-1	+1
+1	-1	+1	+1	+1
+1	+1	-1	-1	+1
+1	+1	-1	+1	-1
+1	+1	+1	-1	+1
+1	+1	+1	+1	-1



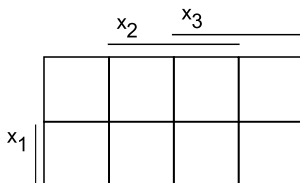
Minimalizace neúplně zadané DNF

x_1	x_2	x_3	y
-1	-1	-1	+1
-1	-1	+1	+1
-1	+1	-1	-1
-1	+1	+1	-1
+1	+1	-1	+1



Minimalizace neúplně zadané DNF

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	1	0	1



Minimalizace neúplně zadané DNF

x_1	x_2	x_3	y
-1	-1	-1	+1
-1	-1	+1	+1
-1	+1	-1	-1
-1	+1	+1	-1
+1	+1	-1	+1



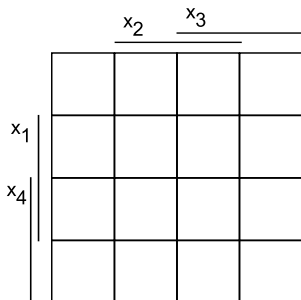
Minimalizace DNF

x_1	x_2	x_3	x_4	y
-1	-1	-1	-1	+1
-1	-1	-1	+1	+1
-1	-1	+1	-1	+1
-1	-1	+1	+1	+1
-1	+1	-1	-1	+1
-1	+1	-1	+1	-1
-1	+1	+1	-1	-1
-1	+1	+1	+1	-1
+1	-1	-1	-1	+1
+1	-1	-1	+1	-1
+1	-1	+1	-1	+1
+1	-1	+1	+1	+1
+1	+1	-1	-1	+1
+1	+1	-1	+1	+1
+1	+1	+1	-1	+1
+1	+1	+1	+1	+1



Minimalizace DNF

x_1	x_2	x_3	x_4	y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1



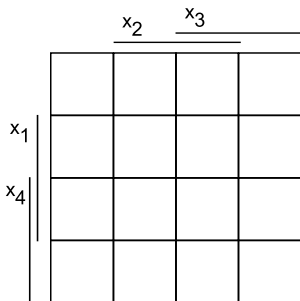
Minimalizace neúplně zadané DNF

x_1	x_2	x_3	x_4	y
-1	-1	-1	-1	+1
-1	-1	-1	+1	+1
-1	-1	+1	-1	+1
-1	-1	+1	+1	+1
-1	+1	-1	-1	+1
-1	+1	-1	+1	×
-1	+1	+1	-1	×
-1	+1	+1	+1	×
+1	-1	-1	-1	×
+1	-1	-1	+1	-1
+1	-1	+1	-1	×
+1	-1	+1	+1	+1
+1	+1	-1	-1	-1
+1	+1	-1	+1	×
+1	+1	+1	-1	+1
+1	+1	+1	+1	-1



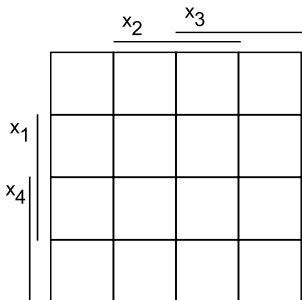
Minimalizace neúplně zadané DNF

x_1	x_2	x_3	x_4	y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	×
0	1	1	0	×
0	1	1	1	×
1	0	0	0	×
1	0	0	1	0
1	0	1	0	×
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	×
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0



Minimalizace neúplně zadané DNF

x_1	x_2	x_3	x_4	y
-1	-1	-1	-1	+1
-1	-1	-1	+1	×
-1	-1	+1	-1	×
-1	-1	+1	+1	+1
-1	+1	-1	-1	-1
-1	+1	-1	+1	+1
-1	+1	+1	-1	+1
-1	+1	+1	+1	+1
+1	-1	-1	-1	-1
+1	-1	-1	+1	+1
+1	-1	+1	-1	×
+1	-1	+1	+1	×
+1	+1	-1	-1	×
+1	+1	-1	+1	-1
+1	+1	+1	-1	×
+1	+1	+1	+1	-1



Minimalizace neúplně zadané CNF

x_1	x_2	x_3	x_4	y
-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	+1	×
-1	-1	+1	-1	×
-1	-1	+1	+1	×
-1	+1	-1	-1	×
-1	+1	-1	+1	-1
-1	+1	+1	-1	-1
-1	+1	+1	+1	×
+1	-1	-1	-1	+1
+1	-1	-1	+1	-1
+1	-1	+1	-1	+1
+1	-1	+1	+1	×
+1	+1	-1	-1	-1
+1	+1	-1	+1	+1
+1	+1	+1	-1	-1
+1	+1	+1	+1	+1

