## Aproximace dat polynomem

**Úloha 120:** Napište funkci `aprox_poly`, která aproximuje zadaná data polynomem požadovaného stupně. Vstupy: vektory `x` a `y`, stupeň polynomu `n` (menší než délka `x`). Výstup: vektor aproximovaných hodnot `y_aprox`, vektor koeficientů polynomu `p` a součet čtverců odchylek `S` hodnot `y_aprox` od `y`.
Tip: použijte funkci `polyfit`.

Doplňte funkci tak, aby kreslila zadané hodnoty jako modré křížky a vypočtený polynom jako červenou čáru (volte „jemnější dělení“ intervalu nezávisle proměnné).

**Úloha 121:** Nalezněte koeficienty polynomu 2. stupně (ve tvaru $p(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3$), který ve smyslu metody nejmenších čtverců nejlépe vystihuje závislost:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y | 5,5 | 43,1 | 128 | 290,7 | 498,4 |

Graficky znázorněte naměřené hodnoty jako kolečka a polynom jako spojitou čáru. Vypočtěte součet čtverců odchylek.

**Úloha 122:** Nalezněte splajn a interpolační polynom k funkci $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{1+x^2}$ s uzlovými body $x_k = k - 5$, kde $k = 0, 1, \ldots, 10$. Využijte funkce `polyfit` a `interp1` (resp. `spline`). Nakreslete graf: červená čára = funkce f, červené křížky = uzlové body, fialová čára = interpolační polynom, modrá čára = splajn.
Dále vypočtěte funkční hodnoty funkce $\mathrm{f}(x)$ v bodech $x \in \{0{,}5; 1{,}5; 2{,}5; 3{,}5; 4{,}5\}$ a porovnejte je s hodnotami splajnu a interpolačního polynomu (ve stejných bodech).

**Úloha 123:** Funkci danou tabulkou

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | -1,2 | -0,5 | 0,3 | 1,1 | 2,1 |
| y | 0,11 | 0,20 | 3,15 | 5,26 | 4,14 |

nahraďte funkcemi $\mathrm{f}_1(x) = b_1 + b_2\mathrm{e}^x$ a $\mathrm{f}_2(x) = b_1\mathrm{e}^{b_2x}$ (linearizujte[2]!). Nakreslete graf: zadané body jako černé křížky, funkci $\mathrm{f}_1$ jako černou čáru a funkci $\mathrm{f}_2$ jako černou čárkovanou čáru. Pro aproximační funkce zvolte vhodné rozdělení intervalu $[-1{,}3;\ 2{,}3]$.

**Úloha 124:** V souboru `pocitace.mat` jsou uložena data o počtu osobních počítačů na 100 domácností (zdroj: `http://www.czso.cz/cz/cr_1989_ts/0803.xls`). Ve vektoru `r` jsou uloženy roky (1989–2008) a ve vektoru `p` jsou uloženy počty počítačů na 100 domácností. Aproximujte data:

A. přímkou $y = b_1x + b_2$,

B. parabolou $y = b_1x^2 + b_2x + b_3$,

C. logaritmem $y = b_1 \log x$,

D. exponenciálou $y = b_1\mathrm{e}^x$,

E. exponenciálou $y = b_1\mathrm{e}^{b_2x}$ (nutno linearizovat[2] vzhledem k parametrům).

Použijte metodu nejmenších čtverců. U všech křivek spočtěte součet čtverců odchylek a rozhodněte, která aproximace je nejlepší.

**Úloha 125:** Ve skriptu `skvrny.m` jsou počty slunečních skvrn za každý měsíc od ledna 1995 do října 2010. Převeďte matici `data` po řádcích na vektor `s` a vynechte poslední dvě (neznámé) hodnoty. Aproximujte tento vektor funkcí $\mathrm{f}(x) = b_1 \sin(s) + b_2$ (metoda nejmenších čtverců). Pomocí této funkce odhadněte (extrapolujte) hodnotu pro listopad 2010 (tedy pro $s = 15 \cdot 12 + 11$ neboli pro `s=length(s)+1`). Nakreslete graf – zadané hodnoty jako černé křížky, aproximační funkci jako černou čáru.

Podle grafu se pokuste navrhnout lepší bázové funkce pro aproximaci pomocí metody nejmenších čtverců.

[2] Linearizovat můžeme s využitím rovnosti $\ln \mathrm{e} = 1$ a vlastností logaritmu, tedy $\ln y = \underbrace{\ln b_1}_{b_1'} + b_2\,x$. Potom $b_1 = \mathrm{e}^{b_1'}$.

## Diferenciální rovnice 1. řádu

**Úloha 126:** Vytvořte funkci `euler`, která bude realizovat explicitní Eulerovu metodu pro řešení diferenciální rovnice 1. řádu $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{f}(x, y)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$. Vstupy funkce: handle pravé strany diferenciální rovnice $\mathrm{f}(x, y)$, začátek a konec intervalu $x_0$ a $x_n$, krok $h$ a hodnota $y_0$ hledané funkce v počátečním bodě intervalu. Výstupem je vektor aproximace $Y$ hledané funkce v daném intervalu podle vzorce

$$Y_{k+1} = Y_k + h \cdot \mathrm{f}(x_k, Y_k), \quad \text{kde } Y_0 = y_0.$$

Poznámka: Eulerova metoda je velmi jednoduchá, ale málo přesná (volte krátký interval).

**Úloha 127:** Řešte následující počáteční úlohy Eulerovou metodou a ještě alespoň jednou z knihovních funkcí realizujících Rungeho-Kuttovu metodu. Výsledky porovnejte s analytickým řešením (nalezeným pomocí symbolické funkce `dsolve`) tak, že vypočtené hodnoty všech funkcí zanesete do grafu (v daném intervalu).

A. $y' = x(y - 1)$, $y(1) = 0$ pro $x \in [1; 1{,}6]$ s krokem $h = 0{,}2$,

B. $y' = x\mathrm{e}^x - y$, $y(0) = 1$ pro $x \in [0; 0{,}4]$ s krokem $h = 0{,}1$,

C. $y' = \dfrac{x+1}{y^2}$, $y(0) = 2$ pro $x \in [0; 0{,}4]$ s krokem $h = 0{,}1$,

D. $y' = \dfrac{y}{x^2+1}$, $y(1) = 1$ pro $x \in [1; 1{,}4]$ s krokem $h = 0{,}2$,

E. $y' = 4\mathrm{e}^{0{,}8x} - 0{,}5y$, $y(0) = 2$ pro $x \in [0, 4]$ s krokem $h = 1$.

## Optimalizace – hledání minima funkce

Pro hledání minima funkce (jedné proměnné) existuje několik metod. Některé z nich potřebují předem znát interval, ve kterém leží právě jedno minimum (funkci pak nazýváme *unimodální*) – takový interval lze určit graficky nebo pomocí *algoritmu pro hledání intervalu s jedním minimem.*

Pro hledání samotného minima lze využít např. metodu půlení intervalu, Fibonacciho metodu, metodu zlatého řezu (tyto 3 metody především zmenšují zadaný interval), metodu kvadratické interpolace, Newtonovu metodu. Podrobnosti k uvedeným metodám naleznete např. v učebním textu *Základy numerické matematiky* od B. Maroše a M. Marošové (vydalo VUT v Brně roku 1999). Některé metody jsou již hotové v učebním textu VŠCHT na `http://vyukaap.vscht.cz/HTML/kap13.html`, ale používají trochu jiné algoritmy, než jsou uvedeny v úlohách níže.

Pro funkce více proměnných se používají jiné metody (simplexová metoda, metoda souřadnicových směrů, metoda metoda největšího spádu, Newtonova metoda).

**Úloha 128:** Z internetové adresy `http://vyukaap.vscht.cz/HTML/kap13.html` zkopírujte kód funkce `MinimumBrutal` a použijte ji pro hledání minima funkce $\mathrm{f}(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ na intervalu $[0{,}1; 6]$ s počtem kroků $n = 1000$.

Prostudujte knihovní funkci `fminbnd`, použijte ji na stejný problém a porovnejte oba výsledky.

**Úloha 129:** Vytvořte funkci `min_puleni`, která má 4 vstupy: handle unimodální funkce `fce`, jejíž minimum hledáme, začátek a konec intervalu ($a < b$), na kterém minimum hledáme, a požadovanou přesnost $0 < \varepsilon < 1$. Výstupy jsou krajní body upřesněného intervalu $a_k$ a $b_k$ (tam leží minimum).

Metoda půlení intervalu používá tento algoritmus:

A. Položíme $x_m = (a + b)/2$ a $L = b - a$.

B. Vypočteme $\mathrm{f}(x_m)$. Položíme $x_1 = a + L/4$, $x_2 = b - L/4$ a vypočteme $\mathrm{f}(x_1)$ a $\mathrm{f}(x_2)$.

C. Porovnáme funkční hodnoty:

   (a) je-li f($x_1$) $\leq$ f($x_m$), položíme $b = x_m$, $x_m = x_1$, tj. vyloučíme interval $(x_m, b]$. Pokračujeme krokem E;

   (b) je-li f($x_1$) $>$ f($x_m$), pokračujeme krokem D.

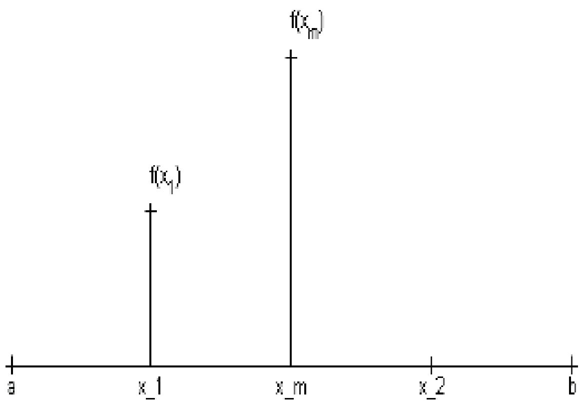
D. Porovnáme funkční hodnoty:

   (a) je-li f($x_2$) $\leq$ f($x_m$), položíme $a = x_m$, $x_m = x_2$, tj. vyloučíme interval $[a, x_m)$. Pokračujeme krokem E;

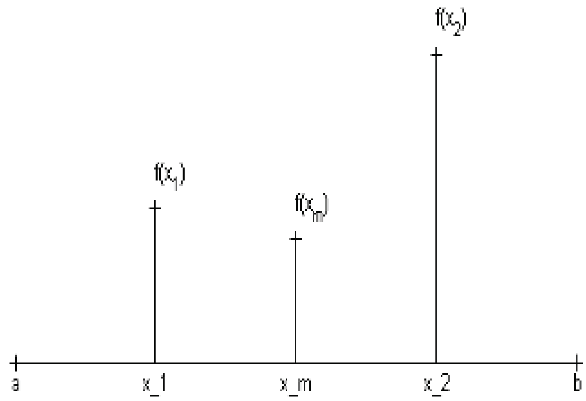
   (b) je-li f($x_2$) $>$ f($x_m$), položíme $a = x_1$, $b - x_2$, $x_m$ zůstává (vyloučíme intervaly $[a, x_1)$ a $(x_2, b])$. Pokračujeme krokem E.

E. Vypočteme $L = b - a$. Je-li $|L| < \varepsilon$, končíme. Jinak pokračujeme krokem B.

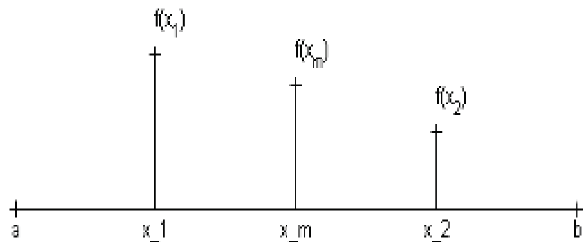
Pro ilustraci:




**C (a)**




**D (a)**




**D (b)**

**Úloha 130:** Nalezněte minimum funkce f($x$) $= x^2 - 10$ na intervalu $[-3{,}5; 2{,}5]$ s přesností $\varepsilon = 0{,}01$. Použijte metodu půlení intervalu. Porovnejte s minimem „určeným“ graficky (zvětšováním grafu – zobrazte si mřížku!).

**Úloha 131:** Vytvořte funkci `min_fibonacci`, která má 5 vstupů: handle unimodální funkce `fce`, jejíž minimum hledáme, začátek a konec intervalu ($a < b$), na kterém minimum hledáme, počet kroků $N > 2$ (počet použitých Fibonacciho čísel) a požadovanou přesnost $0 < \varepsilon < 1$. Výstupy jsou krajní body upřesněného intervalu $a_k$ a $b_k$ (tam leží minimum).

Fibonacciho metoda používá tento algoritmus:

A. Vygenerujeme $N+1$ Fibonacciho čísel podle vztahů $F_0 = F_1 = 1$, $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ $(k = 2, 3, \ldots, N)$. (Lze využít funkci z úlohy 69, kde vygenerujeme $N+2$ čísel a vynecháme první nulu.)

B. Položíme $a_1 = a$, $b_1 = b$.

C. Nový (menší) interval $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ dostaneme z intervalu $[a_k, b_k]$ takto:

(a) Vypočteme

$$\begin{aligned} a'_{k+1} &= b_k - \frac{F_{N-k}}{F_{N-k+1}}(b_k - a_k), \\ b'_{k+1} &= a_k - \frac{F_{N-k}}{F_{N-k+1}}(b_k - a_k). \end{aligned}$$

(b) Porovnáme funkční hodnoty $\mathrm{f}(a'_{k+1})$ a $\mathrm{f}(b'_{k+1})$:

- je-li $\mathrm{f}(a'_{k+1}) \leq \mathrm{f}(b'_{k+1})$, položíme $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = b'_{k+1}$,
- je-li $\mathrm{f}(a'_{k+1}) > \mathrm{f}(b'_{k+1})$, položíme $a_{k+1} = a'_{k+1}$, $b_{k+1} = b_k$.

D. Je-li $|b_{k+1} - a_{k+1}| < \varepsilon$, končíme. Jinak pokračujeme krokem C až do vyčerpání počtu kroků $N$ (při vyčerpání počtu kroků funkce vypíše varování `Nebyla dosazena pozadovana presnost!`).

Poznámka: pokud při použití funkce po $N$ krocích nedosáhneme potřebné délky intervalu $\varepsilon$, můžeme výpočet opakovat s nově nalezeným intervalem (nebo zvětšit $N$).

**Úloha 132:** Nalezněte minimum funkce $\mathrm{f}(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ na intervalu $[0{,}5; 1{,}5]$ pomocí Fibonacciho metody s přesností $\varepsilon = 0{,}01$. Porovnejte s metodou půlení intervalu.

**Úloha 133:** Vytvořte funkci `min_zlaty_rez`, která má 4 vstupy: handle unimodální funkce `fce`, jejíž minimum hledáme, začátek a konec intervalu ($a < b$), na kterém minimum hledáme, a požadovanou přesnost $0 < \varepsilon < 1$. Výstupy jsou krajní body upřesněného intervalu $a_k$ a $b_k$ (tam leží minimum).

Metoda zlatého řezu je podobná Fibonacciho metodě a používá tento algoritmus:

A. Položíme $a_1 = a$, $b_1 = b$.

B. Nový (menší) interval $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ dostaneme z intervalu $[a_k, b_k]$ takto:

(a) Vypočteme

$$\begin{aligned} a'_{k+1} &= a_k + (1-t)(b_k - a_k), \\ b'_{k+1} &= a_k + t(b_k - a_k), \end{aligned}$$

kde $t$ je kladné řešení rovnice $t^2 + t - 1 = 0$, tedy $t = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) \doteq 0{,}618$.

(b) Porovnáme funkční hodnoty $\mathrm{f}(a'_{k+1})$ a $\mathrm{f}(b'_{k+1})$:

- je-li $\mathrm{f}(a'_{k+1}) \leq \mathrm{f}(b'_{k+1})$, položíme $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = b'_{k+1}$,
- je-li $\mathrm{f}(a'_{k+1}) > \mathrm{f}(b'_{k+1})$, položíme $a_{k+1} = a'_{k+1}$, $b_{k+1} = b_k$.

C. Je-li $|b_{k+1} - a_{k+1}| < \varepsilon$, končíme. Jinak pokračujeme krokem B.

Poznámka: metoda je stejně efektivní jako Fibonacciho, ale není omezena volbou počtu použitých Fibonacciho čísel.

**Úloha 134:** Nalezněte minimum funkce $\mathrm{f}(x) = x^2 + \frac{8}{x}$ na intervalu $[0{,}5; 2{,}5]$. metodou zlatého řezu.

**Úloha 135:** Zvolte libovolnou z výše uvedených metod pro výpočet minima (resp. menšího intervalu) následujících funkcí:

A. $\mathrm{f}(x) = 2x^2 + 3\mathrm{e}^{-x}$,

B. $\mathrm{f}(x) = \dfrac{0{,}5x^2 - x + 0{,}5}{x^2 + 1}$ v intervalu $[0, 2]$,

C. $\mathrm{f}(x) = x^3 - \ln x - x$,

D. $\mathrm{f}(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

Není.li uvedeno jinak, zvolte počáteční interval podle grafu funkce. Výsledek porovnejte s knihovní funkcí `fminbnd`.