Numerická integrace

Úloha 111: Napište funkci `integ_tab`, která vrátí přibližnou hodnotu určitého integrálu funkce f, která je dána *tabulkou hodnot* (tj. zadána pomocí dvou vektorů x a $y = \mathrm{f}(x)$, resp. pomocí matice se dvěma sloupci). Vstupem jsou dále dolní a horní meze integrálu a, b. Pro výpočet určitého integrálu použijte lichoběžníkové pravidlo (pozor: rozdíl mezi dvěma po sobě jdoucími hodnotami x nemusí být konstantní!).

Vyzkoušejte vytvořenou funkci pro data ze souboru `cisticka.xls` (data importujte do MATLABu). Dají se použít knihovní funkce `quad` a `quadl`? Jaká je hodnota průměrného průtoku?

Úloha 112: Napište funkci `integ_fce`, která vrátí přibližnou hodnotu určitého integrálu libovolné funkce f (zadána pomocí handle). Dalšími vstupy jsou dolní mez a, horní mez b a počet dílků n, na které se interval $[a, b]$ má rozdělit. Použijte lichoběžníkové pravidlo:

$$I = \int_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot \frac{\mathrm{f}(x_{i+1}) + \mathrm{f}(x_i)}{2}, \quad \text{kde } h = x_{i+1} - x_i,\ x_0 = a,\ x_n = b.$$

Pozn.: protože je dělení ekvidistantní, tak lze krok h vypočítat předem z a, b a n nebo z prvních dvou hodnot nezávisle proměnné x).

Možná vylepšení:

a) doplňte kód funkce o vykreslení grafu při rozdělení intervalu na n dílků (graf bude plnou černou čarou) a pokud je $n < 20$, tak nakreslí začátek/konec každého dílku bude označen černou tečkou;

b) modifikujte funkci na `integ_fce2` tak, aby při výpočtu používala Simpsonovo pravidlo;

c) modifikujte funkci na `integ_fce3` tak, aby vracela také přesný výsledek jako číslo (k tomu použije symbolický toolbox a převod na `double`);

d) vytvořte funkci `integ_fce4`, která bude vracet hodnotu I_1 vypočtenou lichoběžníkovým pravidlem, I_2 vypočtenou Simpsonovým pravidlem, I_3 vypočtenou knihovní funkcí `quad` a jejich odchylky o_1, o_2 a o_3 od přesné hodnoty (zjištěné pomocí symbolického toolboxu).

Úloha 113: Klotoida (též Cornuova spirála nebo volantová přechodnice[1]) je rovinná křivka, která má tu vlastnost, že součin jejího poloměru křivosti v bodě P a délky oblouku spojujícího bod P s počátkem O soustavy souřadnic je konstantní. Klotoida patří mezi spirály a existují dva body A a B, k nimž se neomezeně přibližuje, aniž by je obsahovala.

Parametrické rovnice klotoidy jsou dány Fresnelovými integrály [čteme frenelovými]:

$$x(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{at^2}{2}\right)\,\mathrm{d}t, \quad y(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{at^2}{2}\right)\,\mathrm{d}t.$$

Napište funkci `klotoida`, která vykreslí klotoidu. Fresnelovy integrály vyhodnoťte numericky.

Numerická derivace

Úloha 114: Napište funkci `deriv_tab` pro výpočet numerické derivace funkce, která je zadána tabulkou (vektory x = nezávisle proměnná a y = funkční hodnoty). Využijte vztahy:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_0 &= \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} + \mathrm{O}(h^2)\\
\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_i &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + \mathrm{O}(h^2) \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, n-1\\
\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_n &= \frac{y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n}{2h} + \mathrm{O}(h^2)
\end{aligned}$$

($h = x_i - x_{i-1}$ je krok, $\mathrm{O}(h^2)$ je chybová funkce, kterou při přibližném výpočtu zanedbáváme).

Vyzkoušejte funkci pro data ze souboru `sacharoza.xls`. (Data importujte do MATLABu.)

---

[1] Přechodnice se využívá v dopravním stavitelství na pozemních komunikacích a železničních (tramvajových) tratích, protože zajišťuje plynulý přechod vozidla z přímého směru do oblouku.

Úloha 115: Napište funkci `deriv_fce` pro výpočet numerické derivace funkce f, jejíž funkční předpis je známý (je zadán handle), dále je zadán počátek x_0 a konec intervalu x_N, počet bodů n, ve kterých se bude numericky počítat derivace, a hodnotu $10^{-10} \leq h \leq 10^{-1}$. Pro výpočet využijte náhradu tečny sečnou, tj. vztah

$$\mathrm{f}'(x) \approx \frac{\mathrm{f}(x+h) - \mathrm{f}(x)}{h}.$$

Možná vylepšení:

a) doplňte kód funkce o vykreslení grafu funkce (černou čarou) na daném intervalu;

b) modifikujte funkci na `deriv_fce2` tak, aby při výpočtu používala vztahy z úlohy 114;

c) modifikujte funkci na `deriv_fce3` tak, aby vracela také přesný výsledek jako číslo (k tomu použije symbolický toolbox a převod na `double`).

Řešení nelineární rovnice

Úloha 116: Napište funkci `reseni_sym` pro výpočet kořenů vstupního symbolického výrazu (použijte `solve`). Výstupem bude vektor/struktura obsahující symbolické hodnoty.

Úloha 117: Napište funkci `puleni` pro výpočet kořene nelineární rovnice $\mathrm{f}(x) = 0$. Vstupem je handle funkce f (bude vytvořena jako anonymní funkce nebo funkce v M-souboru) a interval $[a, b]$, ve kterém má kořen ležet. Výstupem bude první nalezený kořen nebo chyba (když metoda nekonverguje nebo kořen v daném intervalu není).

Úloha 118: Prostudujte a realizujte alespoň dvě další numerické metody (např. na internetové adrese `http://vyukaap.vscht.cz/HTML/kap11.html`) a s jejich pomocí nalezněte všechna (reálná) řešení rovnic:

A. $x^2 + \mathrm{e}^{x-2} = x + 3,$

B. $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{1}{x} = 0{,}5x,$

C. $2x + 2 - \mathrm{e}^x = 0,$

D. $x \sin x + 2 = x,$

E. $x^2 - 3x + 2 = 0,$

F. $x^5 - 3x + 2 = 0,$

G. $x^2 + x^{-2} = 5,$

H. $x^2 - 2 = 0,$

I. $x^5 - 1 = 0,$

J. $x^3 - \ln(4 - x) = 0,$

K. $x^3 - 1 = 0,$

L. $2x^3 = -10,$

M. $\mathrm{e}^x - \cos(x + 5) = 0,$

N. $\mathrm{e}^x + \sin(3x - 7) = 0,$

O. $\mathrm{e}^x - \dfrac{5}{5 - x} = 0.$

(pro separaci kořenů použijte graf). Výsledky porovnejte se symbolickými (nalezenými pomocí `solve`).

Řešení soustav (lineárních) rovnic

Pozn.: funkci pro přímé řešení obecné soustavy lineárních rovnic (v maticovém tvaru) jsme realizovali v úloze 87. Soustavy nelineárních rovnic vynecháme.

Úloha 119: Napište funkci `gau_sei` pro řešení soustavy lineárních rovnic Gaussovou-Seidelovou metodou (vstupy: regulární matice soustavy s nenulovými diagonálními prvky, vektor pravých stran; výstup: poslední iterace vektoru řešení):

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Počáteční iteraci $\bar{x}^{(0)}$ lze volit libovolně. K uložení iterací stačí jeden vektor – při výpočtu jednotlivých složek se využívají hotové složky z minulé i z této iterace. Výpočet končí, když všechny složky dosáhnou absolutní přesnosti pod 0,01.

Ověřte pro soustavu $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$