## Matice

**Úloha 80:** Vytvořte co nejefektivnějším způsobem následující matice řádu 10:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 90 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 20 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 10 \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 20 \\ 3 & 6 & 9 & \dots & 30 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 10 & 20 & 30 & \dots & 100 \end{pmatrix}$$

**Úloha 81:** Co nejjednodušším způsobem vygenerujte matici $\mathbf{N}$, která bude obsahovat malou násobilku.

**Úloha 82:** Vytvořte Hadamardovu matici $\mathbf{H}$ řádu 8 a pomocí skalárního součinu všech různých dvojic jejích řádků ověřte, že je ortogonální.

**Úloha 83:** Napište funkci `eratosthenes`, která vrátí vektor všech prvočísel menších než zadané číslo $c$ ($c > 0$). Použijte algoritmus Eratosthenova síta. Vynechávání násobků proveďte přiřazením prázdné matice. Pokud využijete knihovní funkci `mod` (nebo `rem`), testujte, zda vstupní parametr $c$ není příliš veliké číslo! (Viz úloha 31.)

## Lineární algebra

**Úloha 84:** Napište funkci `vyber_bazi`, která má vstup $X$ (matice, jejíž sloupce jsou generátory podprostoru $P$, ze kterých chceme vybrat bázi) a výstup $B$ (matice, kde ve sloupcích je vybraná báze). Funkce vybere ze zadaných generátorů maximální počet lineárně nezávislých vektorů (tj. bázi podprostoru $P$).
Tip: využijte funkci `rank` a postupné přidávání generátorů do báze.

V případě, že hodnost vstupní matice $X$ je nulová (tj. byl zadán triviální podprostor), tak výstupem bude prázdná matice $B$.

**Úloha 85:** Napište funkci `prunik`, která vrátí bázi $B$ průniku podprostorů $P$ a $Q$, které jsou zadané pomocí souboru generátorů $X$ a $Y$ (v Matlabu budou $X$, $Y$ i $B$ matice, jejichž sloupce představují vektory daných souborů).

Návod: využijte vlastnosti ortogonálního doplňku, tj. $P \cap Q = ((P \cap Q)^{\perp})^{\perp} = (P^{\perp} + Q^{\perp})^{\perp}$.

**Úloha 86:** Napište funkci `soucet`, která vrátí bázi $B$ součtu podprostorů $P$ a $Q$, které jsou zadané pomocí souboru generátorů $X$ a $Y$ (v Matlabu budou $X$, $Y$ i $B$ matice, jejichž sloupce představují vektory daných souborů).

Návod: proveďte „sjednocení“ obou bází a následně výběr LN vektorů (viz úloha 84).

**Úloha 87:** Napište funkci `soustava` pro řešení libovolné soustavy $m$ lineárních rovnic o $n$ neznámých (maticový zápis soustavy: $\mathbf{A}\bar{x} = \bar{b}$). Vstupy: matice soustavy $\mathbf{A}$ a nepovinně zadávaný vektor pravých stran $\bar{b}$ (může být i řádkový – funkce si jej sama upraví). Pokud není zadán vektor pravých stran, funkce si jej vytvoří: $\bar{b} = \bar{0}$.
Funkce ze zadané matice soustavy a vektoru pravých stran nejprve zjistí řešitelnost soustavy (Frobeniova věta). Pokud řešení neexistuje, vypíše chybu. V případě, že řešení $\bar{x}$ existuje, tak funkce vrátí partikulární řešení $\bar{x}_0$ a bázi prostoru $V$ všech řešení homogenní soustavy, která přísluší zadané soustavě. (Je-li soustava homogenní, pak partikulární řešení může být např. nulový vektor.)

**Úloha 88:** Napište funkci `gem`, která pomocí Gaussovy eliminační metody převede zadanou matici $\mathbf{A}$ na horní stupňovitý tvar (nikoli až na Hermiteův normální tvar). Při výpočtu můžete použít výběr pivota v každém sloupci kvůli minimalizaci zaokrouhlovacích chyb během výpočtu.
Výstupem funkce je upravená matice $\mathbf{B}$.

**Úloha 89:** Napište funkci `generuj_matici_det`, která vygeneruje náhodnou matici obsahující celá čísla od $-c$ do $+c$, jejíž determinant má hodnotu $D$ nebo $-D$.
Vstupy funkce: řád matice $n$ ($n > 0$), požadovaná absolutní hodnota determinantu $D$ a největší celé číslo $c$, které smí matice obsahovat.
Výstup funkce: první nalezená matice $\mathbf{A}$ splňující dané podmínky. (Využijte funkci `rand` nebo `randn`).

Vytvořenou funkci ověřte pro matici, jejíž determinant má být $\pm 1$, a vynásobte nalezenou matici její inverzí (musí vyjít jednotková matice řádu $n$). Zvolte např. $n = 5$.

**Úloha 90:** Napište funkci `orto_baze`, která má jako první vstup matici $P$ (kde ve sloupcích jsou generátory $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k$ podprostoru $P$) a jako druhý nepovinný vstup má číslo 1 (ortonormální báze) nebo 0 (jen ortogonální báze). Implicitně je druhý vstup 0. Funkce vrací ortonormální nebo ortogonální bázi $B$ podprostoru $P$ vypočítanou pomocí Grammova-Schmidtova ortogonalizačního procesu:

$$\begin{aligned} \vec{y}_1 &= \vec{x}_1, \\ \vec{y}_j &= \vec{x}_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(\vec{x}_j \cdot \vec{y}_i)}{(\vec{y}_i \cdot \vec{y}_i)} \cdot \vec{y}_i \qquad (\text{pro } j = 2, 3, \ldots, k). \end{aligned}$$

V případě ortonormální báze nakonec každý vektor vynásobíme převrácenou hodnotou jeho normy.

Pro přípravu před výpočtem vyberte ze zadaných generátorů bázi podprostoru $P$ (můžete využít funkci z úlohy 84) anebo během výpočtu vynechte vektory, které vyjdou nulové (pozor na to, že vlivem zaokrouhlovacích chyb se nulové vektory nemusejí projevit jako opravdu nulové!!!).

**Úloha 91:** Napište funkci `orto_doplnek`, která má jako jediný vstup matici $P$ (kde ve sloupcích jsou generátory podprostoru $P$) a vrací (nějakou) bázi $B$ ortogonálního doplňku $P^{\perp}$ podprostoru $P$ do $\mathbb{R}^n$.

**Úloha 92:** Napište funkci `generuj_matici_eig`, která vygeneruje náhodnou matici, jejíž vlastní čísla jsou zadána vektorem $\bar{v}$ (vícenásobná se zadají vícekrát).
Vstup funkce: vektor požadovaných vlastních čísel $\bar{v}$ (řád matice $n$ je tedy roven délce vektoru $\bar{v}$).
Výstup funkce: první nalezená matice $\mathbf{A}$ splňující dané podmínky.

Tip: využijte generování matice pomocí podobnosti – tedy $\mathbf{A} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{X}$, kde $\mathbf{D}$ je diagonální matice obsahující požadovaná vlastní čísla a $\mathbf{X}$ je libovolná regulární matice stejného řádu (kvůli celočíselnosti matice $\mathbf{A}$ musí platit $|\det \mathbf{X}| = 1$). Matici $\mathbf{X}$ získáte např. pomocí funkce z úlohy 89.

**Úloha 93:** Napište funkci `je_diagonaliz`, která zjistí, zda zadaná matice je nebo není diagonalizovatelná (v komplexním oboru). Využijte větu, která říká, že matice je diagonalizovatelná, právě když její vlastní vektory tvoří bázi prostoru $\mathbb{C}^n$.
Vstup funkce: matice $\mathbf{A}$.
Výstup funkce: `o=1` (matice je diagonalizovatelná) nebo `o=0` (matice není diagonalizovatelná).

## Práce s polynomy

**Úloha 94:** Vytvořte funkci, která nakreslí libovolný polynom $\mathrm{p}(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ zadaný vektorem $\bar{a} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$ a vrátí jeho kořeny (všechna řešení rovnice $\mathrm{p}(x) = 0$) jako vektor $\bar{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

**Úloha 95:** Nalezněte kořeny polynomu $\mathrm{p}(x) = x^3 - 2x - 5$ a zpětně z kořenů sestavte polynom. Vykreslete funkci $y = \mathrm{p}(x)$ v intervalu $[-5; 8]$ (modrá čára), vypočtěte a vykreslete do téhož grafu červenou čárou derivaci polynomu $\mathrm{p}(x)$. Reálné kořeny polynomu vykreslete navíc jako fialové kroužky.

**Úloha 96:** Nalezněte kořeny polynomu $\mathrm{p}(x) = 2x^5 - 4x^4 - 7x^3 + x^2 + 5x + 3$. Dále vypočtěte jeho derivaci $\mathrm{p}'(x)$ a nalezněte primitivní funkci $\mathrm{P}(x)$. Následně vykreslete graf $\mathrm{p}(x)$, $\mathrm{p}'(x)$ a $\mathrm{P}(x)$ (černá, fialová a modrá čára), do grafu přidejte (reálné) kořeny jako černé křížky a graf popište (včetně legendy: „polynom“, „derivace“, „primitivní fce“). Interval nezávisle proměnné volte tak, aby byly vidět všechny reálné kořeny.

**Úloha 97:** Dělte polynom $\mathrm{p}(x) = 3x^6 + 4x^5 - 3x^3 + 7x^2 - x + 1$ polynomem $\mathrm{q}(x) = x^4 - 3x^3 - 1$ a nalezněte částečný podíl a zbytek. Přesvědčte se o správnosti výpočtu (funkce `conv`)!

**Úloha 98:** Rozložte na parciální zlomky racionální funkci

$$y = \mathrm{f}(x) = \frac{\mathrm{p}(x)}{\mathrm{q}(x)} = \frac{5x^2 - 17x + 12}{x^3 - 4x^2 + 4x}.$$

Dále vykreslete graf této funkce $\mathrm{f}(x)$ v takovém intervalu, aby byly vidět body nespojitosti (kořeny $\mathrm{q}(x)$).

**Úloha 99:** Napište funkci `grafy_polynomu` s proměnným počtem vstupů (nejméně však dva), která dostane vektory (různé délky) představující po řadě hodnoty nezávisle proměnné $x$, koeficienty polynomů $\mathrm{p}_1$, $\mathrm{p}_2$ atd. Funkce si sestaví matici, kde v prvním sloupci budou hodnoty $\mathrm{p}_1$ v daných bodech, ve druhém sloupci hodnoty $\mathrm{p}_2$, ve třetím sloupci hodnoty $\mathrm{p}_3$ atd. Následně vykreslí graf všech zadaných polynomů v závislosti na vektoru $\bar{x}$ (využijte toho, že druhým vstupem funkce `plot` může být matice – vykreslují se jednotlivé její sloupce). Přidejte legendu (matice řetězců „1. polynom“, „2. polynom“ atd.). Osy grafu popište „x“ a „p(x)“, titulek bude „polynomy“.
Funkce nemá žádný výstup.

Tip: pro generování legendy můžete použít funkce `ones` a násobení řetězcem, dále `char`, `num2str` a `strcat`.