Symbolické výpočty

Úloha 41: Pomocí symbolického toolboxu vypočtěte limity posloupností:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+5n+1}{n^3-3},\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^3+2n-1}}{n+2},\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{2n^3+n^2-1}.$$

Úloha 42: Pomocí symbolického toolboxu vypočtěte limity funkcí:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{bx}}{x},\qquad \lim_{x\to 1^-}\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{2\mathrm{e}^x-x^2-2x-2}.$$

Úloha 43: Pomocí symbolického toolboxu vypočtěte primitivní funkce:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2},\qquad \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+5x^4\right)\mathrm{d}x,\qquad \int x^2\ln x\,\mathrm{d}x$$

a výsledek ověřte derivováním.

Úloha 44: Pomocí symbolického toolboxu vypočtěte první, druhou a třetí derivaci funkcí:

$$\mathrm{f}_1(x)=\cos^3(3x^2+2x+1),\qquad \mathrm{f}_2(x)=\sqrt[3]{3x+\cos x},\qquad \mathrm{f}_3(x)=(x^3-2x+5)^5$$

.

Úloha 45: Pomocí symbolického toolboxu vypočtěte součet nekonečné řady $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}$.

Úloha 46: Pomocí symbolického toolboxu nalezněte (obecné) řešení dif. rovnice $y''+2y'+2y=0$. Dále ukažte, že funkce $y=\mathrm{e}^{-x}\sin(x)$ je řešením této rovnice.

Úloha 47: Pomocí symbolického toolboxu nalezněte řešení nehomogenní diferenciální rovnice 2. řádu

$$y''+6y'+8y=(2x^2-2x)\mathrm{e}^{-x}$$

s počátečními podmínkami $y(0)=3$ a $y'(0)=-6$.

Úloha 48: Pomocí symbolického toolboxu nalezněte prvních 7 členů Taylorova rozvoje funkce $\ln(1+x)$ v okolí bodu $x=0$. Nakreslete graf původní funkce (modrá čára) a graf její aproximace (červená čára) na intervalu $[-0{,}5; 1{,}5]$ – využijte příkaz `hold on` pro zachování prvního grafu. Poté změňte počet členů na 3 a prostudujte výsledný graf.

Úloha 49: Pomocí symbolického toolboxu analyzujte funkci $\mathrm{f}(x)=\dfrac{\sin 2x}{x^2-x-2}$:
– nalezněte body nespojitosti (`solve` pro jmenovatel),
– v bodech nespojitosti určete limitu zprava i zleva,
– nakreslete graf funkce na intervalu $[-4\pi; 4\pi]$ (`ezplot`),
– určete alespoň jeden průsečík s osou x (`solve`),
– vypočtěte $I=\displaystyle\int_0^1\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$,
– vypočtěte $\mathrm{f}'(0)$, tj. hodnotu derivace v bodě $x=0$ (`diff` a `subs`).

Úloha 50: Je dána matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Vypočtěte její determinant. S pomocí determinantu určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ je matice singulární. Nalezněte inverzní matici (obecně). Nalezněte charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$, dosaďte $a = 0$ a vykreslete na intervalu $[-3; 5]$. Ověřte, že vlastní čísla matice $\mathbf{B}$ vzniklé z matice $\mathbf{A}$ dosazením $a = 0$ jsou opravdu kořeny vykresleného polynomu (matice je symetrická, takže kořeny musí být 4 reálné).

Rovinné křivky a symbolická grafika

Úloha 51: *Prostá hypocykloida* je rovinná křivka, kterou opisuje bod M ležící na hybné kružnici h (s poloměrem r), která se kutálí po „vnitřním“ obvodu pevné kružnice p (s poloměrem R).
Jestliže tvořicí bod M neleží na kružnici h, ale ve vzdálenosti d od jejího středu (a je s ní pevně spojen), pak hovoříme o *zkrácené hypocykloidě* ($d < r$) nebo o *prodloužené hypocykloidě* ($d > r$).

Parametrické rovnice hypocykloidy jsou

$$\begin{aligned} x(t) &= (R-r)\cos t + d\cos\frac{R-r}{r}t, \\ y(t) &= (R-r)\sin t - d\sin\frac{R-r}{r}t, \end{aligned}$$

přičemž parametr t probíhá množinu reálných čísel (v případě prosté hypocykloidy, kdy poměr $\frac{R}{r}$ je kladné celé číslo, tak stačí $t \in [0; 2\pi]$; v případě, kdy poměr $\frac{R}{r}$ lze vyjádřit zlomkem $\frac{p}{q}$, tak stačí volit $t \in [0; q \cdot 2\pi]$ – v uvedených případech je prostá hypocykloida uzavřená křivka s m nebo q větvemi).

Vytvořte funkci `hypocykloida`, která s využitím symbolické funkce `ezplot` kreslí hypocykloidu podle zadaných parametrů R, r, d a $t_{\max}$ (nepovinný, implicitně $t_{\max} = 2\pi$). Vstupy jsou typu `double` a kladná čísla. Rozsah parametru t v grafu volte od nuly do $t_{\max}$.
Prostudujte nápovědu k funkci `title` a podle hodnot vstupů r a d nadepište celý graf titulkem *prostá* nebo *zkrácená* nebo *prodloužená hypocykloida.*

Úloha 52: *Asteroida* je speciálním typem prosté hypocykloidy, kde $d = r = \frac{1}{4}R$ (tj. je to trajektorie bodu M ležícího na hybné kružnicí, která se kutálí uvnitř jiné kružnice se čtyřnásobným poloměrem).
Parametrické rovnice pro $t \in [0; 2\pi]$ jsou tedy následující (po dosazení $R = 4r$ a $d = r$ a následně $r = \frac{1}{4}R$):

$$\mathrm{x}(t) = \frac{1}{4}R\big(3\cos t + \cos 3t\big), \quad \mathrm{y}(t) = \frac{1}{4}R\big(3\sin t - \sin 3t\big).$$

Vytvořte funkci `asteroida`, která pro zadaný kladný poloměr R (typu `double`) nakreslí asteroidu. Pokuste se do grafu nakreslit i vnější (pevnou) kružnici černou čarou (parametrické rovnice kružnice se středem v počátku jsou $x(t) = R\cos t,\ y(t) = R\sin(t)$).
Návod: využijte substituce do parametrického předpisu asteroidy, případně do jejího implicitního vyjádření:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}.$$

Úloha 53: *Prostá epicykloida* je rovinná křivka, kterou opisuje bod M ležící na hybné kružnici h (s poloměrem r), která se kutálí po „vnějším“ obvodu pevné kružnice p (s poloměrem R).
Jestliže tvořicí bod M neleží na kružnici h, ale ve vzdálenosti d od jejího středu (a je s ní pevně spojen), pak hovoříme o *zkrácené epicykloidě* ($d < r$) nebo o *prodloužené epicykloidě* ($d > r$).

Parametrické rovnice epicykloidy jsou

$$\begin{aligned} x(t) &= (R+r)\cos t - d\cos\frac{R+r}{r}t, \\ y(t) &= (R+r)\sin t - d\sin\frac{R+r}{r}t, \end{aligned}$$

přičemž parametr t probíhá množinu reálných čísel (někdy stačí $t \in [0; 2\pi]$).

Vytvořte funkci `epicykloida`, která s využitím symbolické funkce `ezplot` kreslí epicykloidu podle zadaných parametrů R, r, d a $t_{\max}$ (nepovinný, implicitně $t_{\max} = 2\pi$). Vstupy jsou typu `double` a kladná čísla. Rozsah parametru t v grafu volte od nuly do $t_{\max}$.
Prostudujte nápovědu k funkci `title` a podle hodnot vstupů r a d nadepište celý graf titulkem *Pascalova závitnice* pro $R = r$ (tj. obě kružnice jsou stejně velké), speciálně *kardioida* pro $R = r = d$ (prostá epicykloida typu Pascalovy závitnice), resp. *prostá* ($r = d$) nebo *zkrácená* ($r < d$) nebo *prodloužená epicykloida* ($r > d$).

Úloha 54: *Prostá cykloida* je rovinná křivka, kterou opisuje bod M ležící na hybné kružnici h (s poloměrem r), která se kutálí po pevné přímce.
Jestliže tvořicí bod M neleží na kružnici h, ale ve vzdálenosti d od jejího středu (a je s ní pevně spojen), pak hovoříme o *zkrácené cykloidě* ($d < r$) nebo o *prodloužené cykloidě* ($d > r$).

Parametrické rovnice cykloidy jsou

$$x(t) = rt - d \sin t, \quad y(t) = r - d \cos t,$$

přičemž parametr t probíhá množinu reálných čísel.

Vytvořte funkci `cykloida`, která s využitím symbolické funkce `ezplot` kreslí epicykloidu podle zadaných parametrů r, d a $t_{\max}$ (nepovinný, implicitně $t_{\max} = 6\pi$). Vstupy jsou typu `double` a kladná čísla.

Úloha 55: *Descartův list* je rovinná algebraická křivka třetího stupně, která má při vhodné volbě kartézské soustavy souřadnic rovnici

$$x^3 + y^3 = 3axy, \; a > 0.$$

Vytvořte funkci `descartuv_list` se vstupy $a > 0$ a $t > 0$, která nakreslí Descartův list na intervalu $[-t; t]$.

Úloha 56: *Cassiniho křivka* je množina všech bodů, jejichž vzdálenosti od ohnisek $F_1 = (-a, 0)$ a $F_2 = (a, 0)$ mají stálý součin, roven číslu s:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = s^4 - a^4.$$

Zvláštním případem Cassiniho křivky je tzv. *Bernoulliho lemniskáta* ($s = a$).

Vytvořte funkci `cassini`, která má proměnný počet vstupů (min. však jeden), přičemž první vstup je $a > 0$ a další vstupy jsou $s_i > 0$. Funkce nakreslí $k - 1$ Cassiniho křivek, každou s příslušným s_i a náhodně generovanou barvou čáry (využijte `rand`, `hold on`, odebrání grafického handlu a `set`). V případě, že funkce dostane jediný vstup, tak kreslí pouze Bernoulliho lemniskátu ($s = a$).

Úloha 57: *Geronova lemniskáta* je rovinná křivka s parametrickými rovnicemi

$$x(t) = \sin t, \qquad y(t) = \sin t \cos t$$

pro $t \in [0; 2\pi]$, resp. s implicitní rovnicí

$$x^4 = x^2 - y^2.$$

Vytvořte skript (nebo funkci bez vstupů) `geron` pro vykreslení této křivky.

Úloha 58: *Strofoida* je rovinná křivka, která má parametrické rovnice

$$x(t) = a\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad y(t) = at\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},$$

kde $t \in \mathbb{R}$. Také ji lze vyjádřit v kartézské soustavě souřadnic rovnicí

$$y^2 = x^2\frac{a + x}{a - x}.$$

Parametr a musí být kladné číslo.

Vytvořte funkci `strofoida`, která má jeden vstup ($a > 0$) a kreslí strofoidu (parametrické zadání: volte $t \in [-3; 3]$).

Úloha 59: Čtyřlístek (quadrifolium) je dán rovnicí $f(x, y) = (x^2+y^2)^3-4x^2y^2$. Vytvořte funkci `ctyrlistek` pro jeho vykreslení (funkce nemá žádný vstup).

Úloha 60: *Spirála* je křivka, která vzniká pohybem bodu po přímce (podle daného pravidla), která se zároveň otáčí kolem pevného bodu.

- *Archimédova spirála* je dráha bodu, který se rovnoměrně pohybuje ze své výchozí polohy po přímce, jež se kolem této výchozí polohy rovnoměrně otáčí. Její rovnice v polárních souřadnicích je $\varrho = k\alpha$, kde $k > 0$ je koeficient úměrnosti.
  Vytvořte funkci `spirala_archim` pro kreslení Archimédovy spirály, jejímž vstupem je $k > 0$. Graf kreslete pro $\alpha \in [0; 6\pi]$.
- *Logaritmická spirála* je spirála, u které pravidlo pro pohyb bodu po přímce je: dráhy které urazí za stejné časové úseky, tvoří geometrickou posloupnost. Rovnice logaritmické spirály v polárních souřadnicích je $\varrho = a\mathrm{e}^{k\alpha}$, kde $a > 0$, $k > 0$. Logaritmická spirála se často používá v technické praxi a námořnictví.
  Vytvořte funkci `spirala_log` pro kreslení logaritmické spirály, jejímž vstupem jsou $a, k > 0$. Graf kreslete pro $\alpha \in [0; 6\pi]$.
- *Hyperbolická spirála* je určena rovnicí $\varrho = \frac{k}{\alpha}$, kde $k > 0$.
  Vytvořte funkci `spirala_hyp` pro kreslení hyperbolické spirály, jejímž vstupem je $k > 0$. Graf kreslete pro $\alpha \in [0{,}1; 6\pi]$.

Úloha 61: Každá kuželosečka je rovinnou křivkou. Nalezněte rovnice kružnice, paraboly, elipsy a hyperboly a vytvořte funkce `kruznice`, `elipsa`, `parabola` a `hyperbola`, které kreslí jednotlivé kuželosečky. Vstupy funkcí volte tak, aby kuželosečky nebyly umístěné do počátku kartézské soustavy souřadnic.

Prostorové křivky

Úloha 62: *Přímka* je dána parametrickými rovnicemi

$$x(t) = a_1 + ts_1, \qquad y(t) = a_2 + ts_2, \qquad z(t) = a_3 + ts_3,$$

kde $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ je bod na přímce a $\bar{s} = (s_1, s_2, s_3)$ je její směrový vektor.
Vytvořte funkci `primka`, jejíž vstupy jsou $a_1, a_2, a_3, s_1, s_2, s_3$ (reálná čísla) a která kreslí zadanou přímku v prostoru. Rozsah parametru t volte tak, aby bod $\bar{a}$ nebyl mimo vykreslenou čáru.

Úloha 63: *Šroubovice* na válcové ploše je prostorová křivka s parametrickými rovnicemi

$$x(t) = a\cos t, \quad y(t) = a\sin t, \quad z(t) = bt,$$

kde $a > 0$ a $b \neq 0$ jsou reálné konstanty.
Vytvořte funkci `sroubovice1` se vstupy $a > 0$, $b \neq 0$ a $k > 0$ (celé číslo označující počet závitů), která vykreslí šroubovici pro $t \in [0; 2k\pi]$.

Úloha 64: *Šroubovice* na rotační kuželové ploše je prostorová křivka s parametrickými rovnicemi

$$x(t) = t\cos t, \quad y(t) = t\sin t, \quad z(t) = t.$$

Vytvořte funkci `sroubovice2` se vstupem $k > 0$ (celé číslo označující počet závitů), která vykreslí tuto šroubovici pro $t \in [0; 2k\pi]$.

Úloha 65: *Vivianiho křivka* je průnikem rotační válcové plochy a kulové plochy. Její parametrické rovnice jsou

$$x(t) = a\cos^2 t, \quad y(t) = a\sin t\cos t, \quad z(t) = -a\sin t,$$

kde $t \in [0; 2\pi]$ a $a > 0$ je druhou mocninou poloměru kulové plochy.
Vytvořte funkci `viviani` pro kreslení této křivky, jejímž vstupem bude $a > 0$.