a jeden záporný člen řady (2.42) – zkuste si tento fakt uvědomit trochu formálněji než pouhým rozepsáním začátku řady). Avšak přestože řady v (2.42) a (2.43) mají stejné členy a liší se pouze jejich pořadím, mají různé součty.

Dospěli jsme tak k dosti překvapivému zjištění, že u nekonečných řad obecně hodnota součtu závisí na pořadí sčítanců. Poznamenejme, že něco takového se může stát pouze u neabsolutně konvergentních řad (a je to jedna z vlastností, kterou se odlišuje chování neabsolutně konvergentních a absolutně konvergentních řad) a že změníme-li pořadí sčítanců absolutně konvergentní řady, součet zůstane nezměněn. Na druhé straně je ale dokonce pravda, že každou neabsolutně konvergentní řadu lze přerovnat (tj. změnit pořadí sčítanců) tak, že konverguje k libovolné předem dané hodnotě, nebo její součet je $+\infty$ nebo $-\infty$, nebo dokonce součet nemá. Důkaz těchto (zajímavých) tvrzení zde nebudeme uvádět.

2.4 Mocninné řady

Mocninnou řadou rozumíme řadu tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n = a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + \cdots \tag{2.44}$$

(všimneme si, že zde sčítáme od indexu 0, tj. od nulté mocniny; v této souvislosti klademe $y^0 = 1$ pro každé $y \in \mathbb{R}$, tj. i pro $y = 0$), kde b, a_0, a_1, a_2, ... jsou konstanty (reálné) a na $x \in \mathbb{R}$ se díváme jako na proměnnou. Čísla a_0, a_1, a_2, ... nazýváme *koeficienty* mocninné řady (2.44), číslo b nazýváme *střed* dané mocninné řady. Nejčastěji budeme vyšetřovat mocninné řady se středem $b = 0$, tj. řady tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{2.45}$$

Pokud se na x díváme jako na proměnnou, členy mocninné řady jsou vlastně funkce a je třeba si říci, co budeme rozumět součtem takové řady. Při prvním seznámení s mocninnými řadami se zde však vyhneme práci s obecným pojmem funkční řady a definici různých typů konvergence (pro čtenáře, který se s těmito pojmy již setkal, poznamenáváme, že budeme mluvit pouze o tzv. bodové konvergenci).

Uvažujeme-li $x \in \mathbb{R}$ pevné, pak řada (2.44) (resp. (2.45)) je číselná řada (tj. její členy jsou čísla) a má smysl se ptát, zda tato řada konverguje či diverguje. Jelikož pro různá x dostaneme z (2.44) různé číselné řady, dá se očekávat, že pro některá x tato řada konverguje, pro jiná diverguje. Množinu všech x, pro která řada (2.44) konverguje (jakožto číselná řada) nazveme *obor konvergence* této řady. Je-li x bod z oboru konvergence řady (2.44), pak součet této (číselné) řady pro toto x můžeme označit např. $f(x)$. Pokud tak učiníme pro každé x z oboru konvergence, pak jsme vlastně na oboru konvergence definovali nějakou funkci f. Tuto funkci f nazveme *součet mocninné řady* (2.44).

Můžeme si všimnout, že obor konvergence mocninné řady (2.44) je vždy neprázdný. Tato řada konverguje vždy alespoň pro $x = b$, neboť při tomto x dostaneme řadu o jediném nenulovém členu a_0 (a tedy součet řady (2.44) pro $x = b$ je roven a_0). Dále si ukažme, že obor konvergence mocninné řady (2.44) je vždy buď jednobodová množina $\{b\}$ nebo je to nějaký interval se středem v b (odtud název střed mocninné řady pro konstantu b).

2.4.1 Věta. *Nechť mocninná řada (2.44) konverguje pro nějaké $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom (2.44) absolutně konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$ takové, že $|x - b| < |x_0 - b|$.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že $x_0 \neq b$ (to můžeme, neboť jinak není co dokazovat). Jelikož řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0 - b)^n$ konverguje, je $\lim_{n\to\infty} a_n(x_0 - b)^n = 0$ (věta 2.1.9). Spec. existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n > n_0$ je $|a_n(x_0 - b)^n| \leq 1$. Pro tato n potom platí (pro $x \in \mathbb{R}$ libovolné)

$$(*) \qquad |a_n(x - b)^n| = |a_n(x_0 - b)^n| \left|\frac{x - b}{x_0 - b}\right|^n \leq \left|\frac{x - b}{x_0 - b}\right|^n .$$

Je-li nyní $|x - b| < |x_0 - b|$, pak $\left|\frac{x-b}{x_0-b}\right| < 1$ a řada $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x-b}{x_0-b}\right|^n$ konverguje, neboť je to geometrická řada s kvocientem menším než 1 (viz příklad 2.1.4(1)). Pomocí srovnávacího kritéria již z $(*)$ vidíme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - b)^n$ (pro dané x) konverguje a to dokonce absolutně. □

2.4.2 Věta. *Pro mocninnou řadu (2.44) nastává vždy právě jeden z následujících případů:*

1) *řada (2.44) konverguje pouze pro $x = b$;*

2) *řada (2.44) konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$;*

3) *existuje $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - b| < r$ řada (2.44) konverguje a pro každé $x \in \mathbb{R}$, $|x - b| > r$, řada (2.44) diverguje.*

DŮKAZ. Jak jsme si již uvědomili dříve, mocninná řada (2.44) určitě konverguje pro $x = b$. Nechť K je množina všech $x \in \mathbb{R}$, pro která řada (2.44) konverguje (tj. K je obor konvergence dané řady) a položme

$$(2.46) \qquad r = \sup\{\, |x - b| \mid x \in K \,\}.$$

V případě 1) je $r = 0$. Předpokládejme, že nenastává případ 1). Potom existuje $x \in K$, $x \neq b$, a tedy $r > 0$ (přitom může být $r = +\infty$). Ukažme nejprve, že řada (2.44) konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$ takové, že $|x - b| < r$. Buď tedy $x \in \mathbb{R}$, $|x - b| < r$. Podle definice r a definice suprema existuje $x_0 \in K$ takové, že $|x - b| < |x_0 - b|$. To, že $x_0 \in K$, znamená, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0 - b)^n$ konverguje a podle věty 2.4.1 konverguje také řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - b)^n$. Jelikož $x \in \mathbb{R}$, $|x - b| < r$, bylo libovolné, vidíme opravdu, že řada (2.44) konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$ takové, že $|x - b| < r$.

Mohou nastat dva případy. Buď je $r = +\infty$ nebo $r \in \mathbb{R}$. Je-li $r = +\infty$, pak nastává případ 2). Předpokládejme, že $r < +\infty$. Nyní stačí ukázat, že řada (2.44) diverguje kdykoli $|x - b| > r$ (tj. nastává případ 3)). To je však vidět přímo z definice čísla r. □

2.4.3 Poznámka. Číslo r definované rovností (2.46) se nazývá *poloměr konvergence* mocninné řady (2.44). Věta 2.4.2 vlastně říká, že mocninná řada konverguje na intervalu tvaru $(b - r, b + r)$ a diverguje kdykoli $|x - b| > r$. Je-li $r > 0$, pak interval $(b - r, b + r)$ nazýváme *konvergenční interval* (nebo *interval konvergence*) dané mocninné řady.

Je-li $0 < r < +\infty$, pak tedy pro každé $x \in (b - r, b + r)$ řada (2.44) konverguje a pro $x \in \mathbb{R}$, $|x - b| > r$, diverguje. Ve větě 2.4.2 se však nic neříká o konvergenci v bodech $b \pm r$, tj. v krajních bodech konvergenčního intervalu. Obecně skutečně nelze o konvergenci mocninné řady v krajních bodech konvergenčního intervalu nic říci a mohou nastat případy, kdy mocninná řada v obou krajních bodech konvergenčního intervalu konverguje nebo v obou krajních bodech diverguje nebo v jednom krajním bodu konverguje a v druhém diverguje; přitom konvergence v krajních bodech konvergenčního intervalu nemusí být absolutní (podle věty 2.4.1 je konvergence uvnitř konvergenčního intervalu absolutní). To je vidět na následujících jednoduchých příkladech. Uvažujme tři řady

$$\text{(a)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad \text{(b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad \text{(c)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

(v řadách (b), (c) je $a_0 = 0$). Ukažme nejprve, že interval konvergence všech tří uvedených řad je roven intervalu $(-1, 1)$. Pro řadu (a) je to zřejmé, neboť se jedná o geometrickou řadu s kvocientem x. Pro řady (b), (c) dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} |x| \frac{n}{n+1} = |x|, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right|}{\left|\frac{x^n}{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} |x| \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = |x|;$$

podle podílového kritéria odtud vidíme, že řady (b), (c) konvergují je-li $|x| < 1$ a divergují je-li $|x| > 1$.

Řada (a) přitom v obou krajních bodech svého konvergenčního intervalu diverguje (v těchto krajních bodech dostáváme divergentní řady $1 + 1 + 1 + \cdots$ a $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$). Řada (b) má v $x = 1$ tvar $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ a v $x = -1$ tvar $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$, tj. v $x = 1$ diverguje a v $x = -1$ konverguje (neabsolutně). Řada (c) má v krajních bodech konvergenčního intervalu tvary $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n^2$, tj. v těchto bodech konverguje (a to absolutně).

V určení poloměru konvergence (tj. konvergenčního intervalu) řad (b), (c) jsme jednoduchým způsobem používali podílové konvergenční kritérium. Pomocí podílového resp. odmocninového kritéria můžeme skutečně obecně zjišťovat poloměr konvergence mocninných řad a pomocí těchto kritérií můžeme dokázat následující tvrzení. Připomeňme, že podle konvence z kapitoly 1 klademe $\frac{1}{+\infty} = 0$.

2.4.4 Věta. *Nechť a_n značí koeficienty mocninné řady (2.44) a předpokládejme, že existuje limita*

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Je-li r poloměr konvergence mocninné řady (2.44), pak $r = \frac{1}{\mu}$ pokud $\mu \neq 0$; je-li $\mu = 0$, pak $r = +\infty$.

DŮKAZ. Členy řady (2.44) mají tvar $a_n(x - b)^n$. Přitom je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x - b)|^n} = |x - b| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \mu |x - b|$$

(pokud není $\mu = +\infty$, $x = b$). Je-li $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$, pak $\mu|x - b| < 1$ pokud $|x - b| < \frac{1}{\mu}$, $\mu|x - b| > 1$ pokud $|x - b| > \frac{1}{\mu}$, tj. podle odmocninového kritéria řada (2.44) konverguje je-li $|x - b| < \frac{1}{\mu}$ a diverguje pokud $|x - b| > \frac{1}{\mu}$. To ovšem znamená, že $r = \frac{1}{\mu}$.

Je-li $\mu = 0$, pak je ovšem $\mu|x - b| = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, tj. pro každé $x \in \mathbb{R}$ řada (2.44) konverguje a je $r = +\infty$.

Je-li $\mu = +\infty$, pak pro $x \in \mathbb{R}$, $x \neq b$, je $\mu|x - b| = +\infty$ (> 1) a podle odmocninového kritéria řada (2.44) diverguje a je $r = 0$. □

Následující tvrzení bychom mohli dokázat buď úplně stejným způsobem pomocí podílového konvergenčního kritéria nebo bychom si mohli všimnout, že plyne z věty 2.4.4 a Cauchyova vzorce (tvrzení 1.3.4).

2.4.5 Věta. *Nechť a_n jsou koeficienty mocninné řady (2.44), nechť pro všechna dost velká n je $a_n \neq 0$ a nechť existuje limita $\lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$. Potom pro poloměr konvergence r mocninné řady (2.44) platí rovnost*

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Následující tvrzení obsahuje zobecnění věty 2.4.4, kde místo limity (která nemusí existovat) použijeme limes superior (které existuje vždy). Podrobný důkaz tohoto tvrzení (v kterém bychom použili tvar odmocninového kritéria formulovaného v poznámce 2.2.14) zde neuvádíme.

2.4.6 Věta (Cauchyova-Hadamardova). *Předpokládejme, že a_n jsou koeficienty mocninné řady (2.44),*

$$\mu = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Je-li r poloměr konvergence řady (2.44), pak $r = \frac{1}{\mu}$ pokud $\mu \neq 0$; je-li $\mu = 0$, pak $r = +\infty$.

2.4.7 Poznámka. Pomocí Cauchyovy-Hadamardovy věty by bylo možné dokázat např. následující tvrzení (které bude později důležité v souvislosti s derivováním mocninných řad):

> *Nechť řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - b)^n$ má poloměr konvergence roven r. Potom každá z řad tvaru*
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - b)^{n-1}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - n)^{n-2}, \ldots,$$
> $$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n (x - b)^{n-k}, \ldots$$
>
> *má poloměr konvergence také r.*

Důkaz tohoto tvrzení bude snadný za dodatečného předpokladu, že pro všechna dost velká n je $a_n \neq 0$ a existuje limita $\lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$. Podle věty 2.4.5 je potom r rovno této limitě. Buď nyní $k \in \mathrm{N}$ a uvažujme řadu

$$(*) \qquad \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n (x - b)^{n-k}.$$

Označíme-li

$$B_n = n(n-1)\dots(n-k+1)a_n, \qquad b_n = B_{n+k},$$

pak řada (*) je totéž jako řada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-b)^n$. Nyní stačí ukázat, že $\lim_{n\to\infty} |b_n/b_{n+1}| = r$. Je ale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{B_{n+k}}{B_{n+1+k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{B_{n+1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)a_n}{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+2)a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-k+1}{n+1}\frac{a_n}{a_{n+1}} = r$$

(neboť $(n-k+1)/(n+1) \to 1$).

Uvedené tvrzení je tedy dokázáno za předpokladu existence limity $\lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$. Obecně tato limita nemusí existovat a důkaz by byl složitější a nebudeme jej zde provádět. Pouze poznamenejme, že při použití Cauchyovy-Hadamardovy věty je podstatné, že tato věta umožní vyjádřit poloměr konvergence mocninné řady bez jakýchkoli dodatečných předpokladů.

2.5 Řady komplexních čísel a mocninné řady v komplexním oboru

Nechť $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost komplexních čísel. Jelikož už jsme definovali limitu posloupnosti komplexních čísel (odstavec 1.5, definice 1.5.2), můžeme snadno definovat součet nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ s komplexními členy z_n. Definice bude ovšem formálně stejná jako v případě řad reálných čísel.

Pro $n \in \mathrm{N}$ nechť s_n značí n-tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, tj.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k = z_1 + z_2 + \dots + z_n.$$

Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je potom posloupnost komplexních čísel. Řekneme, že řada komplexních čísel $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ je konvergentní a má součet $z \in \mathbb{C}$, jestliže posloupnost jejích částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu a tato limita je rovna z. Vzhledem k tomu, že jsme nedefinovali nekonečnou limitu posloupnosti komplexních čísel, nedefinujeme ani nekonečný součet řady komplexních čísel (při dané definici součtu tedy řada komplexních čísel buď konverguje nebo nemá součet).

2.5.1 Věta. *Řada komplexních čísel $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konverguje právě když konvergují řady*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{Re}\, z_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{Im}\, z_n.$$

Pokud tyto řady konvergují, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{Re}\, z_n + \mathrm{i} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{Im}\, z_n. \tag{2.47}$$

3.5 Mocninné řady a spojitost

V tomto odstavci ukážeme důležitou vlastnost mocninných řad, že totiž (v reálném oboru) součet mocninné řady je spojitý na svém definičním oboru (tj. na oboru konvergence dané mocninné řady).

3.5.1 Lemma. *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$ je (reálná) mocninná řada s poloměrem konvergence $r > 0$ a buď $r_1 \in \mathbb{R}$, $0 < r_1 < r$. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, je*

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k(x-b)^k\right| < \varepsilon \qquad \text{pro každé } x \in \langle b-r_1, b+r_1\rangle. \tag{3.31}$$

DŮKAZ. Jelikož $0 < r_1 < r$ a mocninná řada na otevřeném konvergenčním intervalu konverguje absolutně (viz odstavec 2.4), je tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r_1^n < +\infty \tag{$*$}$$

(je $r_1 = (b + r_1) - b$, přičemž $b + r_1$ leží v otevřeném intervalu konvergence dané řady). Buď $\varepsilon > 0$. Podle definice součtu řady a definice limity dostáváme z $(*)$, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, je

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r_1^k - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| r_1^k\right| < \varepsilon.$$

Přitom je ovšem

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r_1^k - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| r_1^k = \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| r_1^k$$

(viz větu 2.1.6), tj. je

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} |a_k| r_1^k\right| < \varepsilon. \tag{$**$}$$

Buď nyní $x \in \langle b - r_1, b + r_1\rangle$. Potom je $|x - b| \le r_1$ a

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k(x-b)^k\right| \le \sum_{k=n}^{\infty} |a_k(x-b)^k| \le \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| r_1^k < \varepsilon,$$

tj. pro každé $n > n_0$ opravdu platí (3.31). □

3.5.2 Poznámka. Ze samotného faktu konvergence v nějakém bodě x z oboru konvergence dané mocninné řady plyne, že pokud je $\varepsilon > 0$, pak

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k(x-b)^k\right| < \varepsilon$$

pro všechna n větší než nějaké n_0 (ukázali bychom to stejně, jako jsme dokazovali (**)). Pro různá x přitom můžeme dostat různá n_0. V lemmatu 3.5.1 je podstatné, že n_0 lze volit nezávisle na $x \in \langle b - r_1, b + r_1\rangle$, tj. daná nerovnost platí pro všechna $n > n_0$ a *pro všechna* $x \in \langle b - r_1, b + r_1\rangle$. Tato vlastnost (které se říká *stejnoměrná konvergence* dané řady na intervalu $\langle b - r_1, b + r_1\rangle$) hraje důležitou roli v důkazu spojitosti součtu mocninné řady.

3.5.3 Věta. *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $r > 0$. *Potom součet této řady je funkce spojitá na otevřeném intervalu konvergence* $(b - r, b + r)$.

DŮKAZ. Máme ukázat, že součet dané řady je spojitý v každém bodě otevřeného konvergenčního intervalu. Pro $x \in (b - r, b + r)$ označme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n.$$

Buď $a \in (b-r, b+r)$ a ukažme, že f je spojitá v a. K tomu stačí ukázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in (a - \delta, a + \delta)$ je $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Buď tedy $\varepsilon > 0$. Volme $r_1 \in \mathbb{R}$ tak, že $|a - b| < r_1 < r$ (jelikož $a \in (b - r, b + r)$, takové r_1 určitě existuje). Podle lemmatu 3.5.1 existuje $n_0 \in \mathrm{N}$ tak, že pro $n \in \mathrm{N}$, $n > n_0$, je

$$(*) \qquad \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k(x-b)^k\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{pro každé } x \in \langle b - r_1, b + r_1\rangle.$$

Buď nyní $n > n_0$ pevně zvolené. Součet

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x-b)^k$$

je konečný součet spojitých funkcí a je tedy spojitý (podle věty 3.3.16). Spec. je spojitý v bodě a a existuje tedy $\delta > 0$ tak, že pro $x \in (a - \delta, a + \delta)$ je

$$(**) \qquad \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x-b)^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(a-b)^k\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Volme navíc δ tak, že $\delta < r_1 - |a-b|$ (to můžeme, neboť jsme r_1 volili tak, že $r_1 > |a-b|$) – potom je $(a-\delta, a+\delta) \subset \langle b-r_1, b+r_1\rangle$ (nakreslete si obrázek). Je-li nyní $x \in (a-\delta, a+\delta)$, pak platí nerovnost z $(*)$ i $(**)$. Pro tato x tedy dostáváme (když použijeme ještě větu 2.1.6)

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(a)| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-b)^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k(a-b)^k\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x-b)^k + \sum_{k=n}^{\infty} a_k(x-b)^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(a-b)^k - \sum_{k=n}^{\infty} a_k(a-b)^k\right| \\
&\le \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x-b)^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(a-b)^k\right| + \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k(x-b)^k\right| + \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k(a-b)^k\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

(nerovnost v $(*)$ platí spec. i pro $x = a$). Tvrzení je dokázáno. □

Nyní víme, že součet mocninné řady je vždy funkce spojitá na otevřeném konvergenčním intervalu. V případě, že poloměr konvergence je konečný (a kladný), může mocninná řada konvergovat i v krajním bodě konvergenčního intervalu a vzniká otázka, zda v tomto případě je součet mocninné řady spojitý v daném krajním bodě. Odpověď je kladná. Jelikož však v krajním bodě konvergenčního intervalu, na rozdíl od bodů vnitřních, nemusí mocninná řada konvergovat absolutně, dá se očekávat, že důkaz příslušného tvrzení bude jiný než důkaz věty 3.5.3.

3.5.4 Věta (Abelova věta). *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$ je mocninná řada s konečným kladným poloměrem konvergence r a předpokládejme, že tato řada konverguje v bodě $b+r$. Potom je*

$$\lim_{x\to(b+r)-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n. \tag{3.32}$$

Důkaz. Nejprve si všimneme, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ není nic jiného než daná mocninná řada v bodě $b+r$. Podle předpokladu tedy řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ konverguje. Označme $b_n = a_n r^n$; potom tedy řada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konverguje. Dále označme

$$y = \frac{x-b}{r}.$$

Potom je

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n,$$

$x \to (b+r)+$ je totéž jako $y \to 1+$ a rovnost (3.32) je totéž jako rovnost

$$\lim_{y\to 1-} \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tag{$*$}$$

(vlastně jsme se tímto způsobem omezili na případ $b = 0$, $r = 1$, což zjednoduší zápis).

Položme $s_{-1} = 0$ a pro $k \geq 0$ nechť s_k značí k-tý částečný součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, tj.

$$s_k = b_0 + b_1 + \cdots + b_k.$$

Potom pro $k \geq 0$ je $b_k = s_k - s_{k-1}$ a pro $y \in \mathbb{R}$ dostáváme (využijeme toho, že $s_{-1} = 0$)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} b_k y^k &= \sum_{k=0}^{n} (s_k - s_{k-1}) y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} s_k y^k - \sum_{k=0}^{n} s_{k-1} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} s_k y^k + s_n y^n - \sum_{k=0}^{n-1} s_k y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} s_k y^k - y \sum_{k=0}^{n-1} s_k y^k - s_n y^n \\
&= (1-y) \sum_{k=0}^{n-1} s_k y^k - s_n y^n.
\end{aligned}$$

Je-li $|y| < 1$, je $y^n \to 0$ pro $n \to \infty$ a jelikož

$$s_n \to \sum_{k=0}^{\infty} b_k \in \mathbb{R},$$

je $s_n y^n \to 0$ pro $n \to \infty$. Odtud a z předchozího dostáváme, že pro $y \in \mathbb{R}$, $|y| < 1$, platí

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} b_k y^k \\
&= \lim_{n \to \infty} \left[(1-y) \sum_{k=0}^{n-1} s_k y^k - s_n y^n \right] \\
&= (1-y) \sum_{k=0}^{\infty} s_k y^k.
\end{aligned}$$

Označme $b = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ (je $b \in \mathbb{R}$ podle předpokladu). Buď $\varepsilon > 0$ a volme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n > n_0$ je

$$|s_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(víme, že $s_n \to b$). Jelikož pro $y \in \mathbb{R}$, $|y| < 1$, je

$$\sum_{k=0}^{\infty} y^k = \frac{1}{1-y}, \qquad \text{tj.} \qquad (1-y) \sum_{k=0}^{\infty} y^k = 1,$$

dostáváme, že pro $y \in \mathbb{R}$, $0 < y < 1$, platí

$$
(**) \quad
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{\infty} b_k y^k - b\right| &= \left|(1-y)\sum_{k=0}^{\infty} s_k y^k - b(1-y)\sum_{k=0}^{\infty} y^k\right| \\
&= \left|(1-y)\sum_{k=0}^{\infty}(s_k - b)y^k\right| \\
&\le \left|(1-y)\sum_{k=0}^{n_0}(s_k - b)y^k\right| + \left|(1-y)\sum_{k=n_0+1}^{\infty}(s_k - b)y^k\right| \\
&\le (1-y)\sum_{k=0}^{n_0}|s_k - b|y^k + (1-y)\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2}y^k \\
&\le (1-y)\sum_{k=0}^{n_0}|s_k - b| + \frac{\varepsilon}{2}(1-y)\sum_{k=0}^{\infty} y^k \\
&= (1-y)\sum_{k=0}^{n_0}|s_k - b| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}
$$

(použili jsme toho, že $|s_n - b| < \varepsilon/2$ pro všechna $n > n_0$). Označme

$$K = \sum_{k=0}^{n_0}|s_k - b|$$

(je $K \in \mathbb{R}$, neboť se jedná o konečný součet),

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2(K+1)}.$$

Potom pro $y \in (1-\delta, 1)$ je $1 - y < \delta$ a z $(**)$ vidíme, že pro tato y je

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} b_k y^k - b\right| < \delta K + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2(K+1)}K + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Jelikož $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, znamená to, že opravdu platí $(*)$ a tvrzení je dokázáno. □

3.5.5 Poznámka. Pokud budeme předpokládat, že konverguje řada

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n,$$

pak z $(*)$ dostáváme substitucí $z = -y$, že platí rovnost

$$\lim_{z \to -1+}\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n.$$

Přejdeme-li k původní mocninné řadě

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n,$$

dostáváme, že pokud tato řada konverguje v levém krajním bodě $b-r$ svého konvergenčního intervalu, pak

$$\lim_{x\to(b-r)+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-r)^n.$$

Jinými slovy, pokud v některém z krajních bodů konvergenčního intervalu mocninná řada konverguje, pak její součet je v tomto bodě spojitý. Spolu s větou o spojitosti součtu mocninné řady na otevřeném intervalu konvergence tak dostáváme, že součet reálné mocninné řady je funkce spojitá na svém definičním oboru, tj. na oboru konvergence dané mocninné řady.

Poznamenejme ještě, že tvrzení v tomto tvaru platí pouze pokud mluvíme o reálném oboru konvergence mocninné řady. V případě komplexní mocninné řady a konvergenčního kruhu je situace poněkud složitější.

složené funkce (kterou zde musíme použít dvakrát, neboť vnitřní funkce v logaritmu obsahuje výraz $\sqrt{x^2+1}$, což je opět složená funkce) dostaneme

$$\begin{aligned}(\operatorname{argsinh} x)' &= \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]' = \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\,\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}},\end{aligned}$$

tj. rovnost (4.26). Ověřme ještě rovnost (4.28). Podle (3.25) a věty o derivaci složené funkce ovšem bude (pro $x \in (-1,1)$)

$$(\operatorname{argtgh} x)' = \left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right]' = \frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}\,\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{2}\frac{2}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Zbývající dvě rovnosti přenecháváme k ověření čtenáři.

4.2 Mocninná řada a derivace

V odstavci 3.5 jsme ukázali, že součet mocninné řady je funkce spojitá na otevřeném konvergenčním intervalu. Nyní ukážeme, že platí víc – totiž, že na otevřeném konvergenčním intervalu je součet mocninné řady dokonce funkce derivovatelná a mocninnou řadu lze derivovat člen po členu (co to znamená „derivovat člen po členu" ukážeme dále). Jelikož se ukáže, že derivace součtu mocninné řady je na otevřeném konvergenčním intervalu konečná, dostaneme tak (pomocí věty 4.1.9 o spojitosti funkce s konečnou derivací), že součet mocninné řady je na otevřeném konvergenčním intervalu funkce spojitá, tj. jiné ověření tvrzení z věty 3.5.3.

4.2.1 Věta. *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$ je (reálná) mocninná řada s kladným poloměrem konvergence r. Potom součet této řady je funkce derivovatelná na otevřeném intervalu konvergence a pro každé $x \in (b-r, b+r)$ platí*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-b)^{n-1}. \tag{4.30}$$

DŮKAZ. Pro jednoduchost zápisu předpokládejme, že $b=0$, tj. uvažujme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a označme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

pro $x \in (-r,r)$ (od původní řady můžeme k této řadě dospět pomocí jednoduché substituce $x-b=t$; rozmyslete si, že tato substituce nic nemění na derivovatelnosti součtu řady). Máme ukázat, že pro $x \in (-r,r)$ je

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{$*$}$$

Buď $x \in (-r,r)$ pevně zvolené a volme dále $r_1 \in \mathbb{R}$ tak, že $|x| < r_1 < r$. Pro $y \in \mathbb{R}$ taková, že

$$0 < |y-x| < r_1 - |x|,$$

odhadujme absolutní hodnotu výrazu

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1};$$

poznamenejme, že podle tvrzení z poznámky 2.4.7 má řada napravo stejný poloměr konvergence r jako původní řada. Upravme nejprve první část tohoto výrazu. Použijeme-li známou rovnost

$$(**) \qquad y^n - x^n = (y-x)\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}y^i$$

(ověřte podobným způsobem jako jsme ověřovali rovnost (0.34) z příkladu 0.4.6), dostáváme (pro uvedená y)

$$\begin{aligned}
\frac{f(y)-f(x)}{y-x} &= \frac{1}{y-x}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right] \\
&= \frac{1}{y-x}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(y^n - x^n) \\
&= \frac{1}{y-x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(y-x)\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}y^i\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}y^i
\end{aligned}$$

(členy odpovídající $n=0$ se odečtou, neboť je zde $a_0 - a_0$). Všimneme si ještě, že nx^{n-1} můžeme napsat ve tvaru

$$nx^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1}.$$

Odtud a z předchozího dostáváme

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}\right| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}y^i - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}y^i - nx^{n-1}\right)\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{i=0}^{n-1}(x^{n-1-i}y^i - x^{n-1})\right|.
\end{aligned}$$

Pro $n=1$ má vnitřní součet tvar $\sum_{i=0}^{0}(x^{-i}y^i - x^0) = 0$, tj. ve vnějším součtu můžeme sčítat až od indexu $n=2$ a dostáváme (použijeme opět vztahu $(**)$ – tentokrát pro $n=i$)

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}\right| &= \left|\sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{i=0}^{n-1}(x^{n-1-i}y^i - x^{n-1})\right| \\
&= \left|\sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}(y^i - x^i)\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{i=1}^{n-1} x^{n-1-i}(y^i - x^i)\right| \\
&= \left|\sum_{n=2}^{\infty} a_n \sum_{i=1}^{n-1} x^{n-1-i}(y - x)\sum_{j=0}^{i-1} x^{i-1-j}y^j\right| \\
&\leq |y - x| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{i=1}^{n-1} |x|^{n-1-i} \sum_{j=0}^{i-1} |x|^{i-1-j}|y|^j \\
&\leq |y - x| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{i=1}^{n-1} r_1^{n-1-i} \sum_{j=0}^{i-1} r_1^{i-1-j} r_1^j \\
&= |y - x| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{i=1}^{n-1} r_1^{n-1-i} \sum_{j=0}^{i-1} r_1^{i-1} \\
&= |y - x| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r_1^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} i \\
&= |y - x| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r_1^{n-2} \sum_{i=1}^{n} i \\
&= |y - x| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r_1^{n-2} \frac{n(n-1)}{2};
\end{aligned}
$$

použili jsme zde toho, že $|x| < r_1$ a za daných předpokladů také $|y| < r_1$; nakonec jsme použili známé rovnosti z příkladu 0.4.5. Podle tvrzení z poznámky 2.4.7 má také řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

stejný poloměr konvergence r jako původní řada. Jelikož $r_1 < r$ ($r_1 > 0$) a mocninná řada na otevřeném intervalu konvergence konverguje absolutně, je tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r_1^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n| r_1^{n-2} = k < +\infty.$$

Nakonec tedy dostáváme nerovnost

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right| \leq k|y - x|.$$

Odtud je vidět, že pro $y \to x$ je

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right| \longrightarrow 0,$$

tj.

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Tato limita ovšem není nic jiného než definiční limita pro $f'(x)$ a vidíme tedy, že opravdu $f'(x)$ existuje a platí ($*$). □

4.2.2 Poznámka. Vlastnost mocninných řad popsaná ve větě 4.2.1 je jedna z nejdůležitějších vlastností mocninných řad. Jelikož

$$[(x-b)^n]' = n(x-b)^{n-1},$$

řadu pro vyjádření derivace součtu mocninné řady dostaneme tak, že derivujeme každý člen řady zvlášť, tj. *člen po členu* – odtud tvrzení, že mocninnou řadu můžeme derivovat člen po členu (to, že v „derivované řadě" sčítáme až od indexu $n = 1$ odpovídá skutečnosti, že nultý člen je konstanta a derivace konstanty je nulová).

Zjistili jsme tedy, že součet mocninné řady je derivovatelná funkce a tuto derivaci lze opět vyjádřit ve tvaru součtu mocninné řady. Mocninnou řadu, která vyjadřuje tuto derivaci můžeme (podle téhož tvrzení) opět derivovat a dostáváme tak „derivaci derivace". Zaveďme v této souvislosti obecný pojem derivace vyššího řádu. Derivaci f', o které jsme zatím mluvili, budeme podrobněji nazývat *první derivace*. Pokud funkce f s definičním oborem D_f má konečnou derivaci $f'(x)$ pro každé x z nějaké množiny $M \subset D_f$, pak se na f' můžeme dívat jako na funkci definovanou na množině M. Je-li x_0 vnitřní bod M, má smysl se ptát, zda funkce f' má v x_0 derivaci. Pokud ano, budeme tuto derivaci nazývat *druhá derivace* funkce f v bodě x_0. Její hodnotu označíme symbolem

$$f''(x_0) \quad \text{nebo} \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\, x^2}(x_0).$$

Bude tedy

$$f''(x_0) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\, x^2}(x_0) = (f')'(x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x}\left(\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d}\, x}\right)(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Podobně můžeme zavést třetí derivaci f''' jako derivaci z funkce f'' atd. Obecně mluvíme o n-té derivaci (nebo o derivaci *n-tého řádu*). Přitom u derivace čtvrtého řádu (a vyšších) již nepoužíváme značení f'''', ale místo toho píšeme $f^{(4)}$ (někdy též $f^{(\mathrm{iv})}$); obecně $f^{(n)}$ značí n-tou derivaci funkce f (derivaci n-tého řádu; většinou se toto označení používá pro $n \in \mathbb{N}$, ale v některých souvislostech je užitečné pro $n = 0$ formálně značit $f^{(0)} = f$). Je tedy (pro $n \in \mathbb{N}$)

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}\, x^n}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1} f}{\mathrm{d}\, x^{n-1}}\right)(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

Všimneme si, že nutná podmínka (samozřejmě nikoli postačující) k existenci n-té derivace funkce f v bodě x_0 je existence $(n-1)$-ní derivace f (a všech předchozích) nejenom v bodě x_0, ale na nějakém okolí bodu x_0. Pokud funkce f má na nějaké množině derivace všech řádů (tj. pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje na této množině $f^{(n)}$), pak říkáme, že f je na této množině *nekonečně derivovatelná*.

Jak jsme již poznamenali, tvrzení z věty 4.2.1 o derivovatelnosti součtu mocninné řady můžeme aplikovat na řadu vyjadřující první derivaci tohoto součtu. Druhá derivace bude ovšem opět vyjádřena mocninnou řadou, takže bude existovat třetí derivace atd. Přitom při označení

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n$$

dostaneme aplikací vztahu (4.30) postupně rovnosti

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-b)^{n-1}, \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-b)^{n-2},$$

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n(x-b)^{n-3}, \quad \text{atd.}$$

Poznamenejme, že podle tvrzení z poznámky 2.4.7 mají všechny zde uvedené (mocninné) řady stejný poloměr konvergence. Indukcí tak dostáváme, že platí následující tvrzení.

4.2.3 Věta. *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$ je (reálná) mocninná řada s kladným poloměrem konvergence r. Potom součet $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$ je funkce nekonečně derivovatelná na otevřeném intervalu konvergence $(b-r, b+r)$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ $(x \in (b-r, b+r))$ je*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)a_n(x-b)^{n-k}. \tag{4.31}$$

4.2.4 Poznámka. V kapitole 2 jsme nalezli vyjádření funkcí e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$, $\cosh x$ ve tvaru součtu mocninné řady (viz odstavec 2.6). Na základě věty 4.2.3 (resp. 4.2.1) můžeme nyní ověřit tvar derivací těchto funkcí. Dostáváme tedy

$$(e^x)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x,$$

$$(\sin x)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+1)x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x,$$

$$(\cos x)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2kx^{2k-1}}{(2k)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell+1} \frac{x^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} = -\sin x.$$

Podobně pro funkce $\sinh x$, $\cosh x$.

4.2.5 Poznámka. Funkce, které lze napsat (alespoň lokálně, tj. v okolí každého bodu jejich definičního oboru) jako součet mocninné řady, se někdy nazývají *analytické funkce*. Podle věty 4.2.3 je každá analytická funkce nekonečně derivovatelná. Vzniká otázka, zda platí i obrácené tvrzení, tj. zda každou nekonečně derivovatelnou funkci lze (lokálně) napsat jako součet mocninné řady (pokud to lze, pak říkáme, že funkci lze *rozvinout* do mocninné řady, a mocninné řadě, jejíž součet vyjadřuje danou funkci, říkáme *rozvoj* této funkce do mocninné řady). Ukazuje se, že takovéto tvrzení neplatí a že existují nekonečně derivovatelné funkce, které nelze napsat (v okolí některých bodů) jako součet mocninné řady (viz poznámka 4.10.7). Později se setkáme s tvrzením, které v některých případech umožní nalézt rozvoj funkce do mocninné řady. Zatím si však můžeme uvědomit důležité tvrzení, že pokud funkce má rozvoj do mocninné řady, pak už tento rozvoj je určen jednoznačně (tj. koeficienty tohoto rozvoje jsou určeny jednoznačně).

4.2.6 Tvrzení. *Nechť f je reálná funkce s definičním oborem D_f, b vnitřní bod D_f a předpokládejme, že existuje okolí U_b bodu b tak, že pro každé $x \in U_b$ je*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, je

$$a_n = \frac{f^{(n)}(b)}{n!}. \tag{4.32}$$

DŮKAZ. Ze samotné rovnosti $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$ dostáváme okamžitě $f(b) = a_0$, neboť pro $x = b$ bude mít tato řada až na a_0 všechny členy nulové (připomínáme, že výraz $f^{(0)}$ značí formálně „nultou derivaci", tj. přímo funkci f – v tomto smyslu platí tedy (4.32) pro $n = 0$). Je-li nyní $n > 0$, pak (4.32) dostaneme z věty 4.2.3. Podle této věty je

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)a_k(x-b)^{k-n} \\ &= n!a_n + (n+1)n\dots 2a_{n+1}(x-b) + (n+2)(n+1)\dots 3a_{n+2}(x-b)^2 + \cdots \end{aligned}$$

Pro $x = b$ jsou až na $n!a_n$ všechny sčítanci v této řadě nulové, tj. $f^{(n)}(b) = n!a_n$ a platí tedy rovnost (4.32).

□

Tvrzení 4.2.6 má následující důsledek, jehož snadný důkaz přenecháváme čtenáři (důkaz je ovšem snadný pouze díky tomu, že máme již na základě věty 4.2.1 dokázáno tvrzení 4.2.6).

4.2.7 Věta. *Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-b)^n$ jsou dvě mocninné řady (se stejným středem b) a předpokládejme, že existuje okolí U_b bodu b tak, že pro každé $x \in U_b$ tyto řady konvergují a je*

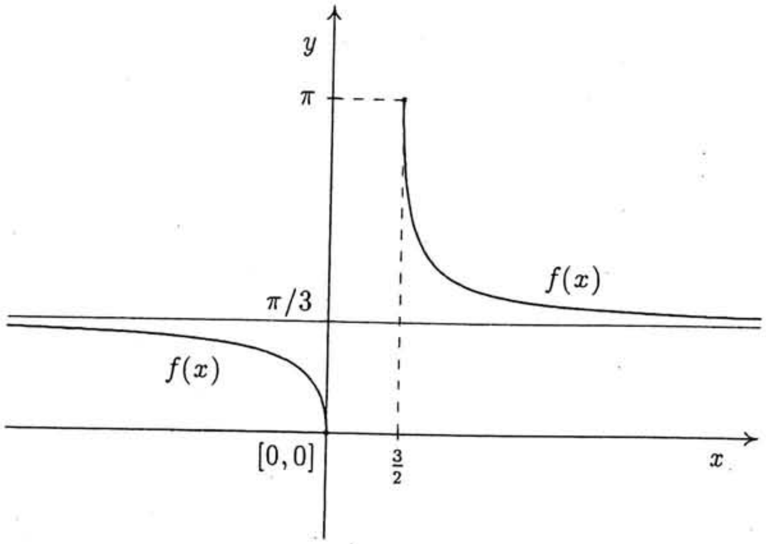
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-b)^n.$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, je $a_n = b_n$.

4.3 Základní věty diferenciálního počtu

V odstavci 4.1 jsme si ukázali nejzákladnější vlastnosti derivace funkce jako např. větu o derivaci součtu, součinu, složené funkce, a dále tvary derivací elementárních funkcí. To vše nám umožní nalézt derivace dalších funkcí složených z elementárních funkcí. V tomto odstavci si ukážeme některá důležitá teoretická tvrzení, která budou základem aplikací diferenciálního počtu. Především se bude jednat o větu o střední hodnotě a některé její důsledky. Čtenář by si měl uvědomit důležitost věty o střední hodnotě, o které se dá říci, že tvoří jádro celého klasického diferenciálního počtu. Začneme relativně jednoduchou větou o vztahu lokálních extrémů a první derivace (tato věta má samostatnou důležitost a později ji použijeme v souvislosti s vyšetřováním extrémů funkce). Nejprve však definujme pojem lokálního extrému.

Ukažme nyní, že na $(\frac{2}{3}, +\infty)$ je f' rostoucí a tedy f je na tomto intervalu ryze konvexní. Můžeme postupovat podobně jako v předchozím. Pro $x \in (\frac{2}{3}, +\infty)$ je $|1 - 2x| = 2x - 1$, tj. tento výraz je zde funkce rostoucí; výraz $\sqrt{x(3x-2)}$ je evidentně na $(\frac{2}{3}, +\infty)$ rostoucí, takže výraz $|1 - 2x|\sqrt{x(3x-2)}$ je na $(\frac{2}{3}, +\infty)$ rostoucí a skutečně vidíme, že f' je na $(\frac{2}{3}, +\infty)$ rostoucí. Nyní zbývá již jenom načrtnout graf f:



4.10 Taylorova věta

V souvislosti s vyšetřováním diferenciálu funkce v odstavci 4.1 jsme zjistili, že lineární funkce g tvaru $g(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$ v jistém smyslu nejlépe aproximuje funkci f v okolí bodu x_0, pokud $a = f'(x_0)$ (za předpokladu, že derivace $f'(x_0)$ existuje a je konečná). Lineární funkce je polynom prvního řádu. Nyní budeme chtít aproximovat funkci f v okolí bodu x_0 polynomem vyššího řádu než prvního. Funkci f budeme v okolí bodu x_0 aproximovat polynomem stupně (nejvýše) n (kde $n \in \mathrm{N}$) tvaru

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n \tag{4.54}$$

(dá se ukázat, že každý polynom stupně (nejvýše) n lze napsat ve tvaru (4.54) a že tedy není na újmu obecnosti uvažovat právě tento tvar polynomu P). Podobně jako jsme ukázali, že lineární funkce $g(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$ nejlépe aproximuje f v okolí bodu x_0 pokud $a = f'(x_0)$, dá se obecněji ukázat následující tvrzení.

Předpokládejme, že funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ konečnou n-tou derivaci a nechť P je polynom tvaru (4.54). Potom je

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \tag{4.55}$$

právě když pro $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ je

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}. \tag{4.56}$$

Toto tvrzení, které vlastně něco říká o polynomu nejlepší aproximace funkce v okolí bodu, zde nebudeme dokazovat. Z tohoto tvrzení je vidět, že bude užitečné vyšetřovat polynomy tvaru (4.54), kde koeficienty a_k mají tvar $a_k = f^{(k)}(x_0)/k!$. S polynomy tohoto tvaru a s nutností je vyšetřovat jsme se ale již setkali. V odstavci 4.2 jsme zjistili, že pokud funkci f lze v okolí bodu x_0 napsat jako součet mocninné řady,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

pak $a_k = f^{(k)}(x_0)/k!$. Polynom P tvaru (4.54) pak vlastně je n-tý částečný součet takovéto mocninné řady. Budou-li mít koeficienty a_k uvedený tvar, pak polynomu P budeme říkat *Taylorův polynom:*

4.10.1 Definice. *Nechť funkce f je definovaná v okolí bodu x_0, $n \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že f má v x_0 konečnou n-tou derivaci $f^{(n)}(x_0)$. Potom polynom*

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned} \tag{4.57}$$

nazveme ***Taylorův polynom*** *(stupně (nejvýše) n) funkce f v bodě x_0.*

4.10.2 Poznámka. Bude-li $x_0 = 0$, pak Taylorův polynom funkce f v bodě x_0 bude mít tvar

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{4.58}$$

Polynom tohoto tvaru se také nazývá *Maclaurinův polynom.*

4.10.3 Poznámka. Nechť T_n je Taylorův polynom funkce f v bodě x_0. Pro x z okolí bodu x_0 označíme

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x). \tag{4.59}$$

Při tomto označení je tedy pro x z okolí bodu x_0

(4.60)

$$\begin{aligned} f(x) &= T_n(x) + R_n(x) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x). \end{aligned}$$

Této rovnosti budeme říkat *Taylorův vzorec* (v případě $x_0 = 0$ též *Maclaurinův vzorec*) a hodnotě $R_n(x)$ *zbytek* Taylorova vzorce (nebo zbytek v Taylorově vzorci). Jak vidíme, zbytek $R_n(x)$ v Taylorově vzorci má význam chyby, které se dopustíme, pokud funkci nahradíme jejím Taylorovým polynomem. Pokud f lze v okolí bodu x_0 napsat jako součet mocninné řady, tj.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

pak (podle definice součtu nekonečné řady) je (při pevném x)

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} (f(x) - T_n(x)) = \lim_{n\to\infty} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k \right) = 0,$$

tj. zbytek $R_n(x)$ se bude se zvětšujícím se n zmenšovat. Vzniká otázka, zda lze obecně nějakým způsobem hodnotu zbytku $R_n(x)$ odhadnout. Odpověď na tuto otázku dává *Taylorova věta.*

4.10.4 Věta (Taylorova věta). *Nechť $x_0, x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$, $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že funkce f má derivace až do řádu $n+1$ v uzavřeném intervalu J s krajními body x_0, x. Nechť T_n je Taylorův polynom funkce f v bodě x_0 stupně (nejvýše) n, R_n je příslušný zbytek (tj. R_n je určeno rovností (4.59)). Buď dále φ funkce spojitá na J, která má konečnou a nenulovou derivaci v každém vnitřním bodu z J. Potom existuje $\xi \in J$, ξ vnitřní bod J, tak, že*

$$R_n(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi). \tag{4.61}$$

Volíme-li spec. $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, dostáváme tzv. ***Lagrangeův tvar zbytku:***

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \tag{4.62}$$

Při volbě $\varphi(t) = t$ dostáváme tzv. ***Cauchyův tvar zbytku:***

$$R_n(x) = \frac{(x-\xi)^n (x-x_0)}{n!} f^{(n+1)}(\xi). \tag{4.63}$$

DŮKAZ. Na intervalu J (tj. na uzavřeném intervalu s krajními body x, x_0) definujme pomocnou funkci $F = F(t)$ rovností

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - f''(t)\frac{(x-t)^2}{2!} - \cdots - f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}$$

(na x se zde díváme jako na konstantu). Všimneme si, že je

$$F(x) = 0, \qquad F(x_0) = R_n(x).$$

Na J má (za daných předpokladů) funkce F derivaci

$$\begin{aligned} F'(t) = {} & -f'(t) - [-f'(t) + f''(t)(x-t)] - \left[-f''(t)(x-t) + f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\right] - \cdots - \\ & - \left[f^{(n-1)}(t)\frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} + f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{(n-1)}}{(n-1)!}\right] \\ & - \left[-f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\right] \\ = {} & -f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Pro dvojici funkcí F, φ jsou splněny předpoklady Cauchyovy věty o střední hodnotě (věta 4.3.9), ze které okamžitě dostáváme, že existuje $\xi \in J$, $\xi \neq x, x_0$, tak, že

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Jelikož $F(x) = 0$, $F(x_0) = R_n(x)$, a

$$F'(t) = -f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!},$$

dostáváme odtud

$$-R_n(x) = -\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-\xi)^n}{n!},$$

což je rovnost (4.59). Při volbě $\varphi(t) = t$ je $\varphi'(t) = 1$ a dostáváme odtud okamžitě Cauchyův tvar zbytku (4.61).

Při volbě $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$ je $\varphi'(t) = -(n+1)(x-t)^n$,

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)} = \frac{0 - (x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x-\xi)^n};$$

dosazením do (4.61) dostaneme opravdu (4.62). □

4.10.5 Poznámka. Nejčastěji používaný a snadno zapamatovatelný tvar zbytku v Taylorově vzorci je Lagrangeův tvar (4.62). Tento výraz je snadno zapamatovatelný proto, že má vlastně tvar dalšího členu v Taylorově polynomu až na to, že místo $f^{(n+1)}(x_0)$ je zde $f^{(n+1)}(\xi)$, kde ξ je nějaký bod mezi x, x_0. Kdybychom se omezili na Lagrangeův tvar zbytku v Taylorově formuli, pak v Taylorově větě se vlastně říká, že za daných předpokladů existuje ξ mezi x, x_0 tak, že

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

4.10.6 Poznámka. V odstavci 2.6 jsme zjistili, že pro $z \in \mathbb{C}$ platí

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

(viz věta 2.6.1). Pro $x \in \mathbb{R}$ máme nyní možnost tuto rovnost ověřit jiným způsobem. Taylorův polynom pro funkci $f(x) = e^x$ v $x_0 = 0$ má tvar

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

neboť pro každé $k \in \mathbb{N}$ je $f^{(k)}(x) = e^x$, $f^{(k)}(0) = 1$. Je-li nyní $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, pevně dané, $n \in \mathbb{N}$, pak zbytek $R_n(x)$ v Taylorově formuli bude mít tvar (když použijeme Lagrangeův tvar zbytku)

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi},$$

kde ξ je vhodné číslo mezi body 0 a x. Z monotonie exponenciely dostaneme $e^{\xi} < e^{|x|}$ a tedy

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}.$$

Jelikož $\lim_{n\to\infty} |x|^{n+1}/(n+1)! = 0$ (viz 1.3.7b)), je tedy (při daném pevném x)

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0.$$

Jelikož $R_n(x) = e^x - T_n(x)$, je tedy

$$\lim_{n\to\infty} \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = 0,$$

což ovšem neznamená nic jiného, než že platí rovnost

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Ověřte podobným způsobem např. rovnosti

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Analogicky bychom mohli pomocí Taylorovy věty nalézt rozvoje do mocninných řad některých dalších funkcí.

4.10.7 Poznámka. Jak víme již z odstavce 4.2, nutná podmínka k tomu, aby funkci bylo možné na okolí nějakého bodu rozvinout do mocninné řady, je, aby na daném okolí bodu byla tato funkce nekonečně derivovatelná. Z příkladů, se kterými jsme se doposud setkali, by čtenář mohl nabýt dojem, že součet Taylorovy řady nekonečně derivovatelné funkce (tj. mocninné řady se středem x_0, jejíž koeficienty mají tvar $f^{(n)}(x_0)/n!$) je vždy roven dané funkci alespoň na nějakém okolí daného bodu. Není to obecně pravda. Známý příklad je např. funkce

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{pro } x \in \mathbb{R},\ x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Vyšetřeme Taylorovu řadu této funkce se středem v $x_0 = 0$. Nejprve si všimneme, že pro každé $n \in \mathbb{Z}$ je

$$(*) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n} e^{-1/x^2} = 0.$$

Je-li $n \geq 0$, je tato rovnost zřejmá, neboť

$$\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = \lim_{y\to+\infty} e^{-y} = 0$$

(je $\lim_{x\to 0}(1/x^2) = +\infty$). Buď nyní $n \in \mathbb{N}$. Je-li n sudé, $n = 2k$, pak po substituci $y = 1/x^2$ dostáváme (užíváme větu o limitě složené funkce)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2k}} e^{-1/x^2} = \lim_{y\to+\infty} y^k e^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^k}{e^y} = 0,$$

neboť podle příkladu 3.3.21 a) je

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y^k} = +\infty.$$

Je-li n liché ($n \in \mathbb{N}$), pak pro $x \in (-1,1)$, $x \neq 0$, je

$$\left|\frac{1}{x^n}e^{-1/x^2}\right| \leq \frac{1}{x^{n+1}}e^{-1/x^2},$$

odkud již (z předchozího) vidíme, že i v tomto případě platí ($*$).

Z ($*$) především vidíme, že f je v bodě 0 spojitá (volba $n = 0$).

Je zřejmé, že f má derivace všech řádů na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (rozmyslete si). Vyšetřeme derivace f v bodě 0. Vzhledem ke spojitosti f v 0 můžeme zkusit nalézt $f'(0)$ pomocí věty o limitě derivace (věta 4.5.4). Jelikož pro $x \neq 0$ je

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2},$$

dostáváme tedy podle ($*$), že

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} = 0.$$

Navíc vidíme, že f' je v 0 spojitá. Pro nalezení $f''(0)$ můžeme proto opět zkusit použít větu o limitě derivace. Jelikož pro $x \neq 0$ je (spočtěte)

$$f''(x) = \frac{4-6x^2}{x^6}e^{-1/x^2},$$

dostáváme tak

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} f''(x) = \lim_{x\to 0}(4-6x^2)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^6}e^{-1/x^2} = 0,$$

když jsme opět použili ($*$).

Nyní bychom mohli obecně zjistit, že n-tá derivace f pro $x \neq 0$ má obecně tvar

$$f^{(n)}(x) = \frac{P(x)}{x^k}e^{-1/x^2},$$

kde P je vhodný polynom, k vhodné celé číslo (rozmyslete si!). Předpokládejme, že již víme, že $f^{(n-1)}$ je spojitá v 0. Potom podle věty o limitě derivace dostáváme, když ještě použijeme ($*$), že

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = P(0)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^k}e^{-1/x^2} = 0$$

a navíc je odtud vidět, že $f^{(n)}$ je spojitá v 0. Indukcí tak dostáváme, že f má derivace všech řádů na $\mathbb{R}$, tyto derivace jsou spojité a pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

Jelikož je navíc $f(0) = 0$, budou všechny koeficienty $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ Taylorovy řady funkce f v bodě x_0 nulové. Tato řada má tedy formálně tvar

$$0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \cdots$$

Tato řada ovšem konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$ a její součet je na $\mathbb{R}$ nulový. Jelikož ale pro $x \neq 0$ je $f(x) > 0$, mimo bod 0 není součet této řady nikde roven f.

Na tomto příkladu je tedy vidět, že je rozdíl mezi pojmem nekonečně derivovatelná a analytická funkce (viz poznámka 4.2.5).

4.10.8 Poznámka. Víme, že pro $x \in \mathbb{R}$ platí rovnost

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Chceme-li však tento vztah použít k přibližnému výpočtu exponenciely, je třeba nějakým způsobem rozhodnout, jak mnoho členů této řady je třeba sečíst, abychom dostali výsledek s předem zadanou přesností. To umožňuje právě odhad zbytku pomocí Taylorovy věty. Zkusíme třeba vyčíslit $e = e^1$ s chybou menší než 10^{-8}. Použijeme odhad zbytku v Taylorově formuli z poznámky 4.10.6, tj. odhad $|R_n(x)| \leq |x|^{n+1} e^x/(n+1)!$. Pro $x = 1$ dostáváme spec.

$$|R_n(1)| \leq \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{2.8}{(n+1)!},$$

kde jsme použili hrubého odhadu $e < 2.8$ (pro hrubé odhady čísla e viz odstavec 1.6.4). Spočteme např., že

$$\frac{2.8}{11!} \approx 6.76 \cdot 10^{-8}, \qquad \frac{2.8}{12!} \approx 5.85 \cdot 10^{-9}.$$

Odtud (a z odhadu zbytku) vidíme, že k přesnosti 10^{-8} nestačí sčítat až po výraz $1/10!$, ale pokud budeme sčítat až po $1/11!$, dostaneme hodnotu e s chybou menší než 10^{-8}. Spočteme tedy

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{11!} \approx 2.718281826$$

Porovnáme-li tuto hodnotu se „skutečnou“ hodnotou čísla e, (tj. s hodnotou získanou přesnějším výpočtem), zjišťujeme, že chyba se objevuje opravdu až na devátém desetinném místě.

4.10.9 Poznámka. Nechť f má na okolí U_{x_0} bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ derivace až do řádu $n+1$ a předpokládejme, že $f^{(n+1)}$ je na U_{x_0} omezená (toto bude např. určitě splněno v případě, že $f^{(n+1)}$ je v x_0 spojitá), $|f^{(n+1)}(x)| \leq c$ pro $x \in U_{x_0}$). Je-li T_n Taylorův polynom funkce f v bodě x_0 stupně (nejvýše) n, R_n příslušný zbytek, pak podle (4.62) pro $x \in U_{x_0}$ bude

$$|R_n(x)| = \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi)| \leq \frac{c}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}$$

(neboť zde bude také $\xi \in U_{x_0}$). Odtud vidíme, že za daných předpokladů je

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0, \tag{4.64}$$

tj.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \tag{4.65}$$

Dostali jsme tak, že pokud $P = T_n$, pak (za daných předpokladů) skutečně platí rovnost (4.55) z tvrzení na začátku odstavce (podle tohoto tvrzení – které jsme ovšem nedokazovali – tato rovnost platí za podstatně slabšího předpokladu než je omezenost $f^{(n+1)}$).

V souvislosti s vyšetřováním asymptotického chování funkce v okolí bodu x_0 bývá zvykem používat následující značení. Buď f funkce definovaná na prstencovém okolí bodu x_0. Je-li φ funkce definovaná a nenulová na prstencovém okolí bodu x_0 taková, že

$$\limsup_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| < +\infty$$

(tj. existují takové prstencové okolí P_{x_0} bodu x_0 a konstanta $c \in \mathbb{R}$, že $|f(x)| \leq c|\varphi(x)|$ pro $x \in P_{x_0}$), pak píšeme

$$f(x) = O(\varphi(x)) \qquad \text{pro } x \to x_0.$$

Pokud je dokonce

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0,$$

pak píšeme

$$f(x) = o(\varphi(x)) \qquad \text{pro } x \to x_0.$$

Při tomto značení je tedy

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n).$$

Mluvíme potom o tzv. *Peanově tvaru* zbytku v Taylorově formuli (i když se spíše jedná o *vlastnost* zbytku).