# Kapitola 8

# Kvadratické formy a kvadriky

Stejně jako v kapitole 6, i zde se omezíme pouze na reálný případ. Budeme tedy pracovat pouze s prostorem $\mathbb{R}^n$. Maticí zde budeme vždy rozumět reálnou matici; vlastním vektorem budeme rozumět (pokud nebude řečeno něco jiného) reálný vlastní vektor.

Účelem této kapitoly je seznámit se stručně se základy tzv. *kvadratické geometrie*. S rovnicemi kružnice, elipsy, paraboly a hyperboly v rovině se čtenář setkal už na střední škole. V této kapitole budeme mluvit o poněkud obecnějších kvadratických rovnicích. Budeme definovat kvadratickou rovnici a tzv. *kvadriky* obecně v $\mathbb{R}^n$ a podrobněji se budeme zabývat těmito rovnicemi v $\mathbb{R}^2$ (tj. rovnicemi *kuželoseček*) a rovnicemi v $\mathbb{R}^3$ (tj. rovnicemi *kvadratických ploch*). Dále se seznámíme s kvadratickými formami, se kterými se čtenář setká později např. v souvislosti s vyšetřováním extrémů funkcí více proměnných.

## 8.1 Kvadratické funkce a kvadriky

Ještě jednou zdůrazněme, že maticí v této kapitole myslíme pouze reálnou matici. Nenulovou maticí myslíme takovou matici, která má alespoň jeden nenulový prvek. Připomeňme úmluvu, podle které nerozlišujeme mezi sloupcovým a řádkovým vektorem (viz poznámku 2.3.2).

**8.1.1 Definice.** *Buď* $\mathbf{A}$ *nenulová čtvercová symetrická matice řádu* $n$, $\overline{b} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. *Zobrazení (funkci)* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tvaru*

$$f(\overline{x}) = \overline{x}\mathbf{A}\overline{x} - 2\overline{b}\cdot\overline{x} + c \tag{8.1}$$

($\overline{x} \in \mathbb{R}^n$) *nazýváme* ***kvadratická funkce*** *(nebo též* ***trojčlen****) na* $\mathbb{R}^n$. *Množina* $Q \subset \mathbb{R}^n$,

$$Q = f^{-1}(0) = \{\,\overline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\overline{x}) = 0\,\} \tag{8.2}$$

*se nazývá* ***kvadrika s rovnicí*** $f(\overline{x}) = 0$ *[****kvadrika určená rovnicí*** $f(\overline{x}) = 0$*].*

**8.1.2 Poznámka.** Buď $\mathbf{A} = (a_{ij})$ nějaká (reálná) čtvercová symetrická matice řádu $n$, $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. Potom kvadratickou funkci tvaru (8.1) můžeme podrobněji rozepsat ve tvaru [když $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$]

$$f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j - 2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c.$$

Všimneme si, že pokud $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, pak obě rovnice

$$f(\overline{x}) = 0, \qquad kf(\overline{x}) = 0$$

určují stejné kvadriky.

**8.1.3 Definice.** *Soustavou souřadnic v $\mathbb{R}^n$ rozumíme dvojici $(X, \overline{s})$, kde $\overline{s} \in \mathbb{R}^n$, $X = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ je nějaká báze $\mathbb{R}^n$. Bázi $X$ nazýváme **báze souřadné soustavy** $(X, \overline{s})$, bod (vektor) $\overline{s}$ nazýváme **počátek souřadné soustavy** $(X, \overline{s})$. Je-li $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, pak pro $i = 1, 2, \ldots, n$, číslo*

$$y_i = X_i(\overline{x} - \overline{s}) \tag{8.3}$$

*(kde $X_i$ značí $i$-tý souřadnicový funkcionál v bázi $X$ — viz kapitola 1) nazýváme $i$-tá **souřadnice bodu (vektoru) $\overline{x}$ v soustavě souřadnic** $(X, \overline{s})$ a značíme také*

$$y_i = X_i^{\overline{s}}(\overline{x}).$$

*Vektor $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ nazveme **vektor souřadnic (souřadnicový vektor)** bodu $\overline{x}$ v souřadnicové soustavě $(X, \overline{s})$. Řekneme, že soustava souřadnic $(X, \overline{s})$ je **ortonormální**, jestliže báze $X$ je ortonormální.*

**8.1.4 Poznámka.** Buď $(X, \overline{s})$ nějaká soustava souřadnic v $\mathbb{R}^n$, kde $X = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$. Označme

$$\mathbf{X} = (\overline{x}_1 \mid \overline{x}_2 \mid \cdots \mid \overline{x}_n),$$

tj. $\mathbf{X}$ je čtvercová matice řádu $n$, jejíž sloupce tvoří jednotlivé vektory báze $X$ — mluvíme také o *sloupcové matici báze* $X$. Vzpomeneme si, že podle definice souřadnicových funkcionálů $X_i$, rovnosti (8.3) znamenají, že

$$\overline{x} - \overline{s} = \sum_{i=1}^{n} y_i \overline{x}_i = \mathbf{X}\overline{y} \tag{8.4}$$

(rozmyslete si poslední rovnost!). Odtud vidíme, že vektor souřadnic $\overline{y}$ bodu $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ můžeme napsat ve tvaru

$$\overline{y} = \mathbf{X}^{-1}(\overline{x} - \overline{s}) \tag{8.5}$$

(matice $\mathbf{X}$ má inverzní matici, neboť sloupce $\mathbf{X}$ jsou lineárně nezávislé, tj. $\mathbf{X}$ je regulární). Je-li soustava $(X, \overline{s})$ ortonormální, je matice $\mathbf{X}$ ortonormální (viz věta 5.3.5) a tedy $\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}^T$, takže rovnost (8.5) můžeme psát ve tvaru

$$\overline{y} = \mathbf{X}^T(\overline{x} - \overline{s}). \tag{8.6}$$

*Dále předpokládejme, že soustava souřadnic $(X, \overline{s})$ je ortonormální.*

Buď $f$ nějaká kvadratická funkce na $\mathbb{R}^n$ ve tvaru (8.1). Zápis $\overline{x}\mathbf{A}\overline{x}$ byl umožněn tím, že jsme se domluvili, že nebudeme rozlišovat mezi řádkovým a sloupcovým zápisem vektoru. Na chvíli od této úmluvy upusťme a chápejme $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ pouze jako sloupcový vektor.

Potom výraz $\overline{x}\mathbf{A}\overline{x}$ musíme podrobněji psát ve tvaru $\overline{x}^T\mathbf{A}\overline{x}$ [viz též začátek odstavce 5.3, kde jsme ale $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ chápali jako řádkový vektor; jelikož zde budeme mluvit o matici tvaru $\mathbf{X} = (\overline{x}_1 \mid \overline{x}_2 \mid \cdots \mid \overline{x}_n)$, bude výhodnější chápat $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ jako sloupcový vektor]. Potom můžeme psát $\overline{b} \cdot \overline{x} = \overline{b}^T\overline{x}$. Podívejme se nyní, jak pro $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ lze hodnotu $f(\overline{x})$ zapsat pomocí souřadnicového vektoru $\overline{y}$ [budeme potom mluvit o tom, že jsme $f$ *vyjádřili v souřadné soustavě* $(X, \overline{s})$]. Podle (8.4) je $\overline{x} = \overline{s} + \mathbf{X}\overline{y}$. Odtud

$$
\begin{aligned}
f(\overline{x}) &= f(\overline{s} + \mathbf{X}\overline{y}) = (\overline{s} + \mathbf{X}\overline{y})^T\mathbf{A}(\overline{s} + \mathbf{X}\overline{y}) - 2\overline{b}^T(\overline{s} + \mathbf{X}\overline{y}) + c \\
&= (\mathbf{X}\overline{y})^T\mathbf{A}\mathbf{X}\overline{y} + \overline{s}^T\mathbf{A}\overline{s} + (\mathbf{X}\overline{y})^T\mathbf{A}\overline{s} + \overline{s}^T\mathbf{A}\mathbf{X}\overline{y} - 2\overline{b}^T\overline{s} - 2\overline{b}^T\mathbf{X}\overline{y} + c \\
&= \overline{y}^T\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}\overline{y} + 2\overline{y}^T\mathbf{X}^T\mathbf{A}\overline{s} - 2\overline{b}^T\mathbf{X}\overline{y} + (\overline{s}^T\mathbf{A}\overline{s} - 2\overline{b}^T\overline{s} + c) \\
&= \overline{y}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X})\overline{y} + 2\big[\mathbf{X}^T(\mathbf{A}\overline{s} - \overline{b})\big] \cdot \overline{y} + f(\overline{s}),
\end{aligned}
\tag{8.7}
$$

když jsme si ještě uvědomili, že (vzhledem k tomu, že $\overline{s}^T\mathbf{A}\mathbf{X}\overline{y}$ je reálné číslo a $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$) je

$$\overline{s}^T\mathbf{A}\mathbf{X}\overline{y} = (\overline{s}^T\mathbf{A}\mathbf{X}\overline{y})^T = \overline{y}^T\mathbf{X}^T\mathbf{A}\overline{s} = \overline{y} \cdot (\mathbf{X}^T\mathbf{A}\overline{s}) = (\mathbf{X}^T\mathbf{A}\overline{s}) \cdot \overline{y}.$$

Jelikož $\mathbf{A}$ je symetrická, je $\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$ také symetrická, a jelikož $\mathbf{X}^T(\mathbf{A}\overline{s} - \overline{b}) \in \mathbb{R}^n$, je funkce (nyní se opět vrátíme k tomu, že nebudeme v zápise rozlišovat mezi řádkovým a sloupcovým vektorem)

$$f_1(\overline{y}) = \overline{y}(\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X})\overline{y} + 2\big[\mathbf{X}^T(\mathbf{A}\overline{s} - \overline{b})\big]\overline{y} + f(s) \tag{8.8}$$

kvadratická funkce v proměnné $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$. Rovnost (8.7) tedy můžeme psát krátce ve tvaru

$$f(\overline{x}) = f_1(\overline{y}).$$

Vyjádřili jsme tak kvadratickou funkci $f$ v proměnné $\overline{x}$ pomocí kvadratické funkce $f_1$ v proměnné $\overline{y}$, kde $\overline{y}$ je souřadnicový vektor $\overline{x}$ v souřadnicové soustavě $(X, \overline{s})$ — mluvíme potom o *vyjádření kvadratické funkce $f$ v nové souřadnicové soustavě* $(X, \overline{s})$ nebo krátce o *změně souřadnic*. Jedná se totiž o to, že zatímco v původní soustavě souřadnic (tj. v souřadnicové soustavě se středem v $\overline{0}$ a se standardní bází) má kvadratická funkce tvar složitý, může mít ve vhodné souřadné soustavě $(X, \overline{s})$ tvar podstatně jednodušší. V předchozí kapitole jsme ukázali, že je-li $\mathbf{A}$ symetrická, pak existuje ortonormální (reálná) matice $\mathbf{X}$ tak, že $\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$ je diagonální, $\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X} = [\![\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]\!]$. Jestliže nyní $X$ bude báze $\mathbb{R}^n$ složená ze sloupcových vektorů $\mathbf{X}$, pak ve vyjádření $f$ v souřadné soustavě $(X, \overline{s})$ ($\overline{s}$ může být libovolné) se objeví výraz $\overline{y}(\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X})\overline{y}$, přičemž ovšem bude

$$\overline{y}(\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X})\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2.$$

Tímto způsobem se tedy lze „zbavit“ výrazů $a_{ij}x_ix_j$ pro $i \neq j$ ve vyjádření kvadratické funkce. Uvědomme si ještě, že báze souřadné soustavy $(X, \overline{s})$ se v tomto případě skládá z vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$ (viz větu 7.3.3 a její důkaz).

Nakonec si uvědomíme, že je-li $\overline{s}, \overline{z} \in \mathbb{R}^n$, $\overline{x} = \overline{s} + \overline{z}$, a je-li $f$ kvadratická funkce tvaru (8.1), pak

$$f(\overline{x}) = f(\overline{s} + \overline{z}) = \overline{z}\mathbf{A}\overline{z} + 2(\mathbf{A}\overline{s} - \overline{b}) \cdot \overline{z} + f(\overline{s}) \tag{8.9}$$

[tuto rovnost spočteme podobně jako (8.7) — proveďte podrobně].

**8.1.5 Definice.** *Kvadratická funkce $f$ na $\mathbb{R}^n$ a také příslušná kvadrika $Q = f^{-1}(0)$ se nazývá* ***centrální****, jestliže existuje $\overline{s} \in \mathbb{R}^n$ tak, že pro každé $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ je*

$$f(\overline{s}+\overline{x}) = f(\overline{s}-\overline{x});$$

*každé takové $\overline{s}$ se nazývá* ***střed*** *$f$ a také* ***střed kvadriky*** *$Q = f^{-1}(0)$. Množinu všech středů $f$ značíme $S_f$. Kvadratická funkce (a příslušná kvadrika) se nazývá* ***necentrální****, pokud není centrální.*

V dalším budeme ztotožňovat matici $\mathbf{A}$ s lineárním zobrazením s touto maticí.

**8.1.6 Věta.** *Kvadratická funkce $f$ na $\mathbb{R}^n$ tvaru* (8.1) *je centrální právě když existuje bod $\overline{s} \in \mathbb{R}^n$ takový, že $\overline{b} = \mathbf{A}\overline{s}$ [tj. právě když $\overline{b} \in$* $\operatorname{Im}\mathbf{A}$*, tj. právě když $h(\mathbf{A}) = h((\,\mathbf{A} \mid \overline{b}\,))$].*

DŮKAZ. Buď $\overline{s}, \overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Podle (8.9) je

$$f(\overline{s} \pm \overline{x}) = \overline{x}\mathbf{A}\overline{x} \pm 2(\mathbf{A}\overline{s} - \overline{b}) \cdot \overline{x} + f(\overline{s}).$$

Odtud vidíme, že $f(\overline{s}+\overline{x}) = f(\overline{s}-\overline{x})$ pro každé $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ právě když $\mathbf{A}\overline{s} = \overline{b}$, odkud již plyne tvrzení [ekvivalentní podmínka centrálnosti $h(\mathbf{A}) = h((\,\mathbf{A} \mid \overline{b}\,))$ není nic jiného než Frobeniova věta]. □

**8.1.7 Poznámka.** Z důkazu věty 8.1.6 je vidět poněkud víc. Je totiž vidět, že pokud $f$ je centrální, pak $\overline{s} \in \mathbb{R}^n$ je střed $f$ právě když $\mathbf{A}\overline{s} = \overline{b}$, tj.

$$S_f = \{\, \overline{s} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\overline{s} = \overline{b} \,\}. \tag{8.10}$$

**8.1.8 Věta.** *Je-li kvadratická funkce $f$ tvaru* (8.1) *centrální, pak $f$ je konstantní na $S_f$, tj. $f(S_f) = \{f_0\}$ [tj. existuje $f_0 \in \mathbb{R}$ tak, že $f(\overline{s}) = f_0$ pro každé $\overline{s} \in S_f$]; $f_0$ se potom nazývá* ***centrální hodnota*** *kvadratické funkce $f$. Množina středů $S_f$ je lineál se zaměřením* $\operatorname{Ker}\mathbf{A}$.

DŮKAZ. Skutečnost, že $S_f$ je lineál se zaměřením $\operatorname{Ker}\mathbf{A}$ plyne z (8.10) a vlastností nehomogenních soustav [rovnost (8.10) říká, že $S_f$ je množina všech řešení soustavy $\mathbf{A}\overline{s} = \overline{b}$].

Ukažme, že $f$ je konstantní na $S_f$, tj. pro každé $\overline{s}_1, \overline{s}_2 \in S_f$ je $f(\overline{s}_1) = f(\overline{s}_2)$. Buďte tedy $\overline{s}_1, \overline{s}_2 \in S_f$. Podle předchozího je $(\overline{s}_1 - \overline{s}_2) \in \operatorname{Ker}\mathbf{A}$, tj. $\mathbf{A}(\overline{s}_1 - \overline{s}_2) = \overline{0}$. Jelikož je jistě $\mathbf{A}\overline{s}_1 = \overline{b}$, dostáváme z (8.9)

$$f(\overline{s}_2) = f\big(\overline{s}_1 + (\overline{s}_2 - \overline{s}_1)\big) = (\overline{s}_2 - \overline{s}_1)\mathbf{A}(\overline{s}_2 - \overline{s}_1) + 2(\mathbf{A}\overline{s}_1 - \overline{b}) \cdot (\overline{s}_2 - \overline{s}_1) + f(\overline{s}_1) = f(\overline{s}_1).$$

Tvrzení je dokázáno. □

**8.1.9 Poznámka.** Buď $\mathbf{A}$ nenulová symetrická matice řádu $n$. Podle věty 7.3.3 existuje (reálná) ortonormální matice $\mathbf{X}$ tak, že $\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X} = [\![\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]\!]$ je diagonální, přičemž sloupce $\mathbf{X}$ jsou vlastní vektory $\mathbf{A}$. Pořadí prvků na diagonále součinu $\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$ závisí na pořadí sloupců $\mathbf{X}$ (pouze pořadí, nikoli samotné hodnoty $\lambda_i$, neboť $\lambda_i$ jsou vlastní čísla $\mathbf{A}$). Předpokládejme, že mezi hodnotami $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ je právě $k$ nenulových prvků. Uvědomíme si, že za daných předpokladů (že matice $\mathbf{A}$ je nenulová a symetrická) je jistě $k > 0$. Jelikož $\mathbf{A}$ je nenulová, je $h(\mathbf{A}) > 0$. Protože $\mathbf{X}$ a také $\mathbf{X}^T$ jsou regulární matice, podle věty 2.4.6 dostáváme, že

$$h[\![\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]\!] = h(\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}) = h(\mathbf{X}^T \mathbf{A}) = h(\mathbf{A}) > 0,$$

tj. ne všechna vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou nulová [poznamenejme, že obecně ale — pokud není diagonalizovatelná — může mít i nenulová matice všechna vlastní čísla nulová; jednoduchý příklad jsou třeba matice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$]. Nyní vidíme, že po vhodném přerovnání sloupců $\mathbf{X}$ (a přeindexování hodnot $\lambda_i$) lze docílit toho, že $\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X}$ má tvar

$$\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = [\![\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, 0, \dots, 0]\!], \tag{8.11}$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \neq 0$. Buď nyní $X$ báze $\mathbb{R}^n$ skládající se ze sloupců $\mathbf{X}$ (v daném pořadí). Tuto bázi budeme nazývat *vlastní* (ortonormální) *bází* matice $\mathbf{A}$.

Buď $f$ centrální kvadratická funkce na $\mathbb{R}^n$ s centrální hodnotou $f_0$ a buď $\overline{s} \in S_f$. Nechť dále $X$ je vlastní (ortonormální) báze $\mathbf{A}$. Potom souřadnou soustavu $(X, \overline{s})$ nazýváme *kanonickou soustavou souřadnic* $f$ [resp. kvadriky $Q = f^{-1}(0)$]. Všimněme si, jaké vyjádření bude mít $f$ v kanonické soustavě souřadnic $(X, \overline{s})$. Jelikož $\mathbf{A}\overline{s} = \overline{b}$, $f(\overline{s}) = f_0$, a jelikož platí (8.11), dostáváme z (8.7) pro $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$

$$f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i^2 + f_0, \tag{8.12}$$

kde $y_i = X_i^{\overline{s}}(\overline{x})$ je $i$-tá souřadnice $\overline{x}$ v souřadné soustavě $(X, \overline{s})$. Vyjádření $f$ ve tvaru (8.12) se říká *kanonický tvar* $f$.

Nakonec si všimněme ještě dvou jednoduchých skutečností. Buď $f$ centrální kvadratická funkce na $\mathbb{R}^n$ ve tvaru (8.1) s centrální hodnotou $f_0$ a buď $\overline{s} \in S_f$. Potom je

$$f_0 = c - \overline{b} \cdot \overline{s}. \tag{8.13}$$

Jelikož je $\mathbf{A}\overline{s} = \overline{b}$, dostáváme opravdu

$$f_0 = f(\overline{s}) = \overline{s}\mathbf{A}\overline{s} - 2\overline{b} \cdot \overline{s} + c = \overline{s} \cdot \overline{b} - 2\overline{b} \cdot \overline{s} + c = c - \overline{b} \cdot \overline{s}.$$

Ukažme, že je-li $\mathbf{A}$ regulární, pak je vždy $f$ centrální a má jediný střed. To je také snadno vidět, neboť je-li $\mathbf{A}$ regulární, pak soustava $\mathbf{A}\overline{s} = \overline{b}$ má vždy řešení, a to řešení jediné (je $\overline{s} = \mathbf{A}^{-1}\overline{b}$).

Dále vyšetřujme necentrální kvadratické funkce a kvadriky. Nejprve dokažme následující pomocné tvrzení.

**8.1.10 Lemma.** *Buď* $\mathbf{A}$ *symetrická matice řádu* $n$. *Potom*

$$\operatorname{Im} \mathbf{A} = (\operatorname{Ker} \mathbf{A})^{\perp}. \tag{8.14}$$

DŮKAZ. Je-li $\mathbf{A}$ regulární, pak $\operatorname{Ker} \mathbf{A} = \{\overline{0}\}$, $\operatorname{Im} \mathbf{A} = \mathbb{R}^n$ a tvrzení evidentně platí.

Předpokládejme nyní, že $\mathbf{A}$ je singulární. Potom je $0 \in \mathfrak{S}_{\mathbf{A}}$. Přitom $\operatorname{Ker} \mathbf{A}$ je vlastní podprostor odpovídající vlastnímu číslu 0. Buď $\dim(\operatorname{Ker} \mathbf{A}) = k$. Potom existuje ortonormální báze $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ prostoru $\mathbb{R}^n$ složená z vlastních vektorů $\mathbf{A}$ taková, že

$$[\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_k] = \operatorname{Ker} \mathbf{A}$$

(viz větu 7.3.3 a poznámku 7.3.4). Nyní stačí ukázat, že

$$[\overline{x}_{k+1}, \overline{x}_{k+2}, \dots, \overline{x}_n] = \operatorname{Im} \mathbf{A}.$$

Pro $i = k+1, k+2, \dots, n$ je ale $\overline{x}_i$ vlastní vektor $\mathbf{A}$ odpovídající nějakému vlastnímu (reálnému) číslu $\lambda_i \neq 0$, tj. $\mathbf{A}\overline{x}_i = \lambda_i \overline{x}_i$, odkud vidíme, že pro tato $i$ je $\overline{x}_i \in \operatorname{Im} \mathbf{A}$ a tedy

$$[\overline{x}_{k+1}, \overline{x}_{k+2}, \dots, \overline{x}_n] \subset \operatorname{Im} \mathbf{A}.$$

Jelikož $\dim(\operatorname{Im} \mathbf{A}) = n - \dim(\operatorname{Ker} \mathbf{A}) = n - k = \dim[\overline{x}_{k+1}, \overline{x}_{k+2}, \dots, \overline{x}_n]$, dostáváme odtud požadovanou rovnost. □

**8.1.11 Poznámka.** Buď $f$ necentrální kvadratická funkce na $\mathbb{R}^n$ tvaru (8.1). Podle předchozího lemmatu je $\operatorname{Im} \mathbf{A} = (\operatorname{Ker} \mathbf{A})^{\perp}$ a tedy

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} \mathbf{A} \oplus \operatorname{Ker} \mathbf{A}$$

(viz větu 5.4.4). Existují tedy (jednoznačně určené) $\overline{b}_1 \in \operatorname{Im} \mathbf{A}$, $\overline{b}_2 \in \operatorname{Ker} \mathbf{A}$ tak, že [když $\overline{b}$ je vektor z vyjádření $f$ ve tvaru (8.1)]

$$\overline{b} = \overline{b}_1 + \overline{b}_2 \tag{8.15}$$

(viz větu 5.4.5), přičemž $\overline{b}_1$ je ortogonální průmět $\overline{b}$ na $\operatorname{Im} \mathbf{A}$ ($\overline{b}_2$ je ortogonální průmět $\overline{b}$ na $\operatorname{Ker} \mathbf{A}$). *Pro danou necentrální kvadratickou funkci $f$ ve tvaru* (8.1) *bude všude v dalším $\overline{b}_1 \in \operatorname{Im} \mathbf{A}$ značit ortogonální průmět $\overline{b}$ na $\operatorname{Im} \mathbf{A}$, $\overline{b}_2$ ortogonální průmět $\overline{b}$ na* $\operatorname{Ker} \mathbf{A}$.

**8.1.12 Věta.** *Buď $f$ necentrální kvadratická funkce na $\mathbb{R}^n$ tvaru* (8.1). *Potom existuje $\overline{s} \in \mathbb{R}^n$ tak, že*

$$\mathbf{A}\overline{s} = \overline{b}_1, \qquad f(\overline{s}) = 0. \tag{8.16}$$

*Každé $\overline{s} \in \mathbb{R}^n$, které splňuje* (8.16) *se nazývá* ***vrchol kvadratické funkce*** *$f$ (resp.* ***vrchol kvadriky*** *$Q = f^{-1}(0)$). Množinu všech vrcholů $f$ značíme $V_f$. Množina $V_f$ je lineál, který nazýváme* ***vrcholový lineál.***

DŮKAZ. Buď $A\colon \operatorname{Im} \mathbf{A} \to \operatorname{Im} \mathbf{A}$ takové, že pro $\overline{x} \in \operatorname{Im} \mathbf{A}$ je $A(\overline{x}) = \mathbf{A}\overline{x}$ (tj. $A$ je restrikce lineárního zobrazení určeného maticí $\mathbf{A}$ na $\operatorname{Im} \mathbf{A}$). Všimneme si, že $A(\operatorname{Im} \mathbf{A}) = \operatorname{Im} \mathbf{A}$, tj. $A$ je na $\operatorname{Im} \mathbf{A}$ automorfismus. Je ovšem $A(\operatorname{Im} \mathbf{A}) \subset \operatorname{Im} \mathbf{A}$. V důkazu lemmatu 8.1.10 jsme viděli, že existuje báze $(\overline{x}_{k+1}, \overline{x}_{k+2}, \dots, \overline{x}_n)$ podprostoru $\operatorname{Im} \mathbf{A}$ složené z vlastních vektorů $\mathbf{A}$ taková, že $A(\overline{x}_i) = \mathbf{A}\overline{x}_i = \lambda_i \overline{x}_i$, kde $\lambda_i \neq 0$ ($i = k+1, k+2, \dots, n$). Odtud okamžitě dostáváme, že $\operatorname{Im} \mathbf{A} \subset A(\operatorname{Im} \mathbf{A})$.

Jelikož $A$ je tedy automorfismus na $\operatorname{Im} \mathbf{A}$, $\overline{b}_1 \in \operatorname{Im} \mathbf{A}$, existuje právě jedno $\overline{s}_1 \in \operatorname{Im} \mathbf{A}$ takové, že

$$A(\overline{s}_1) = \overline{b}_1,$$

tj. $\overline{s}_1$ je jediné řešení soustavy

$$\mathbf{A}\overline{s} = \overline{b}_1, \tag{8.17}$$

které leží v $\operatorname{Im}\mathbf{A}$. Z vlastností nehomogenních soustav plyne, že $\bar{s} \in \mathbb{R}^n$ je řešením soustavy (8.17) právě když má tvar $\bar{s} = \bar{s}_1 + \bar{s}_2$, kde $\bar{s}_2 \in \operatorname{Ker}\mathbf{A}$. Ukažme, že $\bar{s}_2$ lze volit tak, že $f(\bar{s}) = f(\bar{s}_1 + \bar{s}_2) = 0$. Nejprve si uvědomíme, že (připomínáme, že používáme značení zavedené v poznámce 8.1.11) $\bar{b}_2 \neq \bar{0}$ — podle předpokladu je $f$ necentrální a podle věty 8.1.6 je $\bar{b} \notin \operatorname{Im}\mathbf{A}$. Přitom je $\bar{b}_2 \in \operatorname{Ker}\mathbf{A}$. Uvažujme $\bar{s}_2$ ve tvaru

$$(*) \qquad \bar{s}_2 = t\bar{b}_2,$$

kde $t \in \mathbb{R}$. Všimneme si, že potom

$$\bar{b} \cdot \bar{s}_1 = (\bar{b}_1 + \bar{b}_2) \cdot \bar{s}_1 = \bar{b}_1 \cdot \bar{s}_1$$

(neboť podle lemmatu 8.1.10 je $\bar{b}_2 \perp \bar{s}_1$) a

$$\bar{b} \cdot \bar{b}_2 = (\bar{b}_1 + \bar{b}_2) \cdot \bar{b}_2 = \|\bar{b}_2\|^2.$$

Jelikož dále $\mathbf{A}\bar{s}_1 = \bar{b}_1$, $\mathbf{A}\bar{b}_2 = \bar{0}$ a také $\bar{b}_2\mathbf{A} = \bar{0}$ (neboť $\mathbf{A}$ je symetrická), dostáváme

$$\begin{aligned} f(\bar{s}) = f(\bar{s}_1 + t\bar{b}_2) &= (\bar{s}_1 + t\bar{b}_2)\mathbf{A}(\bar{s}_1 + t\bar{b}_2) - 2\bar{b} \cdot (\bar{s}_1 + t\bar{b}_2) + c = \\ &= \bar{s}_1\mathbf{A}\bar{s}_1 - 2\bar{b}_1 \cdot \bar{s}_1 - 2t\|\bar{b}_2\|^2 + c = c - \bar{b}_1 \cdot \bar{s}_1 - 2t\|\bar{b}_2\|^2. \end{aligned}$$

Nyní vidíme, že k tomu, aby $f(\bar{s}) = 0$, stačí v $(*)$ volit

$$t = \frac{c - \bar{b}_1 \cdot \bar{s}_1}{2\|\bar{b}_2\|^2}.$$

Dokázali jsme tedy, že $f$ má vrchol, tj. $V_f \neq \emptyset$. Zbývá ukázat, že $V_f$ je lineál. Buď $\bar{s} \in \mathbb{R}^n$ takové, že $\mathbf{A}\bar{s} = \bar{b}_1$. Potom

$$f(\bar{s}) = \bar{s}\mathbf{A}\bar{s} - 2\bar{b} \cdot \bar{s} + c = \bar{s} \cdot \bar{b}_1 - 2\bar{b} \cdot \bar{s} + c = c - (2\bar{b} - \bar{b}_1) \cdot \bar{s}.$$

Odtud vidíme, že $V_f$ je rovno množině všech řešení soustavy

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\bar{s} &= \bar{b}_1 \\ (2\bar{b} - \bar{b}_1) \cdot \bar{s} &= c \end{aligned}$$

[k rovnicím soustavy (8.17) jsme přidali ještě jednu lineární rovnici] a tedy $V_f$ je opravdu lineál.

□

**8.1.13 Poznámka.** Buď $f$ necentrální kvadratická funkce na $\mathbb{R}^n$ tvaru (8.1). Z předchozí věty mimo jiné plyne, že kvadrika určená $f$, $Q = f^{-1}(0)$, je neprázdná, neboť $V_f \subset Q$ a $V_f \neq \emptyset$ (centrální kvadrika může být obecně i prázdná množina).

Zatím jsme nalezli kanonický tvar centrální kvadratické funkce (viz poznámku 8.1.9). Podívejme se nyní, jak je to v případě necentrální kvadratické funkce. Předpokládejme tedy, že $f$ tvaru (8.1) je necentrální kvadratická funkce. Buď $X$ nějaká vlastní ortonormální báze $\mathbf{A}$ (viz opět poznámku 8.1.9), $\mathbf{X}$ ortonormální matice, jejíž sloupce jsou tvořeny vektory báze $X$ (v daném pořadí) a nechť

$$\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X} = [\![\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, 0, 0, \ldots, 0]\!],$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \neq 0$. Je-li $X = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$, pak pro $i = 1, 2, \dots, k$ je $\overline{x}_i$ vlastní vektor $\mathbf{A}$ s vlastním číslem $\lambda_i$ a pro $i = k+1, k+2, \dots, n$ je $\overline{x}_i$ vlastní vektor $\mathbf{A}$ s vlastním číslem 0, tj. $\overline{x}_i \in \operatorname{Ker} \mathbf{A}$. Přitom je jistě $k < n$, neboť jinak nula by nebyla vlastní číslem $\mathbf{A}$, tj. $\mathbf{A}$ by byla regulární a podle poznámky 8.1.9 by $f$ byla centrální. Nechť $\overline{b}_1, \overline{b}_2$ mají stejný význam jako v poznámce 8.1.11, tj. $\overline{b}_1 \in \operatorname{Im} \mathbf{A}$, $\overline{b}_2 \in \operatorname{Ker} \mathbf{A}$ a platí (8.15). Podle poznámky 7.3.4 o konstrukci ortonormální báze složené z vlastních vektorů můžeme volit $X$ tak, že

$$(*) \qquad \overline{x}_{k+1} = \frac{\overline{b}_2}{\|\overline{b}_2\|}$$

(v důkazu věty 8.1.12 jsme si všimli, že $\overline{b}_2 \neq \overline{0}$). Buď tedy $X$ takováto vlastní ortonormální báze $\mathbf{A}$, $\overline{s} \in V_f$. Potom soustavu souřadnic $(X, \overline{s})$ nazýváme *kanonická soustava souřadnic* $f$ [nebo kvadriky $Q = f^{-1}(0)$]. Podívejme se, jaký tvar má $f$ v kanonické souřadné soustavě. Především si uvědomíme, že

$$(**) \qquad \mathbf{X}^T \overline{b}_2 = \big(0, \dots, 0, \|\overline{b}_2\|, 0, \dots, 0\big),$$

kde $\|\overline{b}_2\|$ leží na místě $(k+1)$-ní složky. Řádky $\mathbf{X}^T$ jsou totiž vektory $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n$ a jelikož platí $(*)$, je opravdu $(k+1)$-ní složka součinu $\mathbf{X}^T \overline{b}_2$ rovna

$$\overline{b}_2 \cdot \frac{\overline{b}_2}{\|\overline{b}_2\|} = \|\overline{b}_2\|.$$

Přitom pro $i \neq k+1$ je $\overline{x}_i \perp \overline{b}_2$ a tedy opravdu všechny ostatní složky součinu $\mathbf{X}^T \overline{b}_2$ jsou nulové.

Nechť pro $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ je $\overline{y} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2, \dots, \overline{y}_n)$ souřadnicový vektor $\overline{x}$ v soustavě souřadnic $(X, \overline{s})$. Jelikož $\mathbf{A}\overline{s} = \overline{b}_1$, $\overline{b} - \overline{b}_1 = \overline{b}_2$, $f(\overline{s}) = 0$, dostáváme z (8.7) [když ještě použijeme $(**)$]

$$\begin{aligned} f(\overline{x}) &= \overline{y}(\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X})\overline{y} + 2\big[\mathbf{X}^T(\mathbf{A}\overline{s} - \overline{b})\big] \cdot \overline{y} + f(\overline{s}) \\ &= \overline{y}(\mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X})\overline{y} - 2(\mathbf{X}^T \overline{b}_2) \cdot \overline{y} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i^2 - 2\|\overline{b}_2\| y_{k+1}. \end{aligned}$$

V kanonické souřadné soustavě má tedy $f$ tvar

$$(8.18) \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i^2 - 2\|\overline{b}_2\| y_{k+1}.$$

Tomuto tvaru říkáme *kanonický tvar* $f$.

Nyní již známe kanonické tvary centrálních i necentrálních kvadratických funkcí (rovnic kvadrik). Z předchozího si budeme především pamatovat, že pro každou kvadratickou funkci $f$ existuje nějaká (ortonormální) souřadná soustava (kanonická souřadná soustava), ve které má $f$ buď tvar (8.12) (je-li $f$ centrální) nebo tvar (8.18) (je-li $f$ necentrální). Kanonické tvary kvadratických funkcí a kvadratických rovnic [tj. rovnic $f(\overline{x}) = 0$, kde $f$ je vyjádřeno v kanonickém tvaru] bývá zvykem zapisovat v následujícím, poněkud pozměněném tvaru.

Je-li $f$ ve tvaru (8.12), $f_0 \neq 0$, podělíme $f$ hodnotou $-f_0$; podobně ve tvaru (8.18) podělíme hodnotou $\|\bar{b}_2\|$. Koeficienty u $y_i^2$ vyjádříme ve tvaru $1/\alpha_i^2$ pokud jsou tyto koeficienty kladné a ve tvaru $-1/\alpha_i^2$ pokud jsou záporné (přitom uvažujeme $\alpha_i > 0$). Kanonické rovnice kvadrik potom mohou mít pouze následující tři tvary:

(centrální, $f_0 \neq 0$) $$\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{y_i}{\alpha_i}\right)^2 - \sum_{i=r+1}^{k}\left(\frac{y_i}{\alpha_i}\right)^2 = 1,$$

(centrální, $f_0 = 0$) $$\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{y_i}{\alpha_i}\right)^2 - \sum_{i=r+1}^{k}\left(\frac{y_i}{\alpha_i}\right)^2 = 0,$$

(necentrální) $$\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{y_i}{\alpha_i}\right)^2 - \sum_{i=r+1}^{k}\left(\frac{y_i}{\alpha_i}\right)^2 = 2y_{k+1}$$

(součty, které měly v kanonickém vyjádření $f$ původně tvar $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i y_i^2$, jsme rozdělili na dvě části podle toho, je-li $\lambda_i > 0$ nebo $\lambda_i < 0$). Poznamenejme ještě, že hodnoty $\alpha_i$ se nazývají *reálné* ($i \leq r$), resp. *imaginární* ($i > r$) *poloosy* příslušných kvadrik.

## Klasifikace kvadrik v $\mathbb{R}^2$ (kuželoseček)

Kvadriky v $\mathbb{R}^2$ nazýváme *kuželosečky*. Kuželosečky rozdělíme podle kanonického tvaru jejich rovnic. Pro jednoduchost nebudeme složky vektoru (bodu) v $\mathbb{R}^2$ značit $x_1, x_2$, ale $x, y$. Složky souřadného vektoru v kanonické souřadné soustavě budeme značit $x', y'$. Podle předchozího stačí uvažovat jenom kanonické tvary rovnic kuželoseček. Může nastat jenom několik následujících případů [$k$ značí počet nenulových vlastních čísel **A** ve vyjádření kvadratické funkce ve tvaru (8.1)]. Zapíšeme zde pouze stručně rovnici kuželosečky v kanonickém tvaru a název příslušné kuželosečky (geometrický význam).

### (I) Centrální kuželosečky

(a) $k = 2$

(1) $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$ — elipsa

(2) $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = -1$ — prázdná množina

(3) $\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$ — hyperbola

(4) $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 0$ — jediný bod (střed)

(5) $\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 0$ — dvojice přímek $y' = \pm\frac{b}{a}x'$

(b) $k = 1$

(1) $\frac{x'^2}{a^2} = 1$ dvojice přímek $x' = \pm a$

(2) $\frac{x'^2}{a^2} = -1$ prázdná množina

(3) $\frac{x'^2}{a^2} = 0$ jediná přímka $x' = 0$

(II) **Necentrální kuželosečka** (existuje pouze jedna)

(a) (1) $\frac{x'^2}{a^2} = 2y'$ parabola

## Klasifikace kvadrik v $\mathbb{R}^3$

Podobně jako v $\mathbb{R}^2$, budeme vektory v $\mathbb{R}^3$ značit $(x, y, z)$ a složky souřadnicového vektoru v kanonické souřadné soustavě kvadriky značíme $x', y', z'$.

(I) **Centrální kvadriky**

(a) $k = 3$

(1) $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$ elipsoid

(2) $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = -1$ prázdná množina

(3) $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$ jednodílný hyperboloid

(4) $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$ dvoudílný hyperboloid

(5) $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 0$ jediný bod (střed)

(6) $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 0$ kužel

(b) $k = 2$

(1) $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ eliptický válec

(2) $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1$ prázdná množina

(3) $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$ hyperbolický válec

(4) $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0$ přímka $x' = y' = 0$

(5) $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0$ dvojice rovin $\frac{x'}{a} \pm \frac{y'}{b} = 0$

(c) $k = 1$

(1) $\dfrac{x'^2}{a^2} = 1$ — dvojice rovin $x' = \pm a$

(2) $\dfrac{x'^2}{a^2} = -1$ — prázdná množina

(3) $\dfrac{x'^2}{a^2} = 0$ — rovina $x' = 0$

(II) **Necentrální kvadriky**

(a) $k = 2$

(1) $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 2z'$ — eliptický paraboloid

(2) $\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 2z'$ — hyperbolický paraboloid

(b) $k = 1$

(1) $\dfrac{x'^2}{a^2} = 2y'$ — parabolický válec

**8.1.14 Poznámka.** Předpokládáme, že čtenář je seznámen s geometrickým tvarem kuželoseček v zásadě již ze střední školy. Tvary některých kuželoseček připomínáme na obrázcích na konci kapitoly. Zastavme se zde blíže alespoň u některých kvadrik v $\mathbb{R}^3$. Tvary některých kvadrik jsou opět znázorněny na obrázcích na konci kapitoly. Geometrickou představu o tvaru kvadrik mohou ale také poskytnout rovinné řezy, tj. průniky kvadrik s nějakými rovinami. Nejjednodušší je vyšetřovat průnik kvadriky s rovinou rovnoběžnou s některou souřadnou rovinou. Budeme vyšetřovat případ, kdy kvadriky jsou v tzv. *základní poloze*, tj. kdy kanonická souřadná soustava má tvar $(X, \overline{0})$, kde $X$ je standardní báze.

**Elipsoid.** Rovnice elipsoidu v základní poloze má tvar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

kde $a, b, c > 0$. Uvažujme řez tímto elipsoidem s rovinou rovnoběžnou se souřadnou rovinou $x, y$, tj. s nějakou rovinou o rovnici tvaru $z = k$, kde $k \in \mathbb{R}$ je konstanta (krátce také mluvíme o rovině $z = k$). Potom rovnice tohoto řezu má tvar (jednoduše dosadíme $k$ za $z$ do dané rovnice elipsoidu)

$$(*) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$$

(přesněji řečeno, jedná se o rovnici kolmého průmětu tohoto řezu do roviny $xy$ pokud tuto rovnici uvažujeme pouze v této rovině — rozmyslete si). Je-li $|k| > c$, pak je ovšem na pravé straně této rovnice záporné číslo, tj. daný řez je prázdná množina. Je-li $|k| = c$, pak dostáváme rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

tj. daný řez je jediný bod (roviny $z = \pm c$ jsou tečné roviny daného elipsoidu).

Buď nyní $|k| < c$. Potom je $1 - k^2/c^2 > 0$. Označme $r = \sqrt{1 - k^2/c^2}$. Potom $(*)$ má tvar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2,$$

což můžeme napsat ve tvaru

$$\frac{x^2}{(ar)^2} + \frac{y^2}{(br)^2} = 1.$$

Toto je rovnice elipsy o poloosách $ar, br$. V případě, že $a = b$, jedná se o rovnici kružnice; v tomto případě daný elipsoid je tzv. rotační elipsoid — vidíme, že vznikl rotací elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(řez daného elipsoidu rovinou $y = 0$) kolem osy $z$. Podobně bychom zjistili, že řezy daného elipsoidu rovinami $x = k$ ($|k| < a$) nebo $y = k$ ($|k| < b$) jsou elipsy (resp. kružnice, pokud $b = c$ nebo $a = b$). Je-li dokonce $a = b = c$, pak se jedná o kulovou sféru o poloměru $a$ (a se středem v počátku).

**Jednodílný hyperboloid.** Rovnice jednodílného hyperboloidu v základní poloze má následující tvar:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Podívejme se nejprve na řezy tohoto hyperboloidu rovinami $y = k$; tyto řezy mají tvar

$$(**) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}.$$

Uvažujme případ $|k| = b$. Potom $(**)$ má tvar

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

což je dvojice přímek $z = \pm \frac{c}{a} x$. Je-li $|k| \neq b$, pak $(**)$ je rovnice hyperboly — odtud název hyperboloid. Označme $r = \sqrt{|1 - k^2/b^2|}$. Potom $(**)$ můžeme napsat ve tvaru (když uvažujeme zvlášť případy $|k| < b$ a $|k| > b$)

$$\frac{x^2}{(ar)^2} - \frac{z^2}{(cr)^2} = 1 \quad (|k| < b), \qquad \frac{z^2}{(cr)^2} - \frac{x^2}{(ar)^2} = 1 \quad (|k| > b)$$

(rozmyslete si geometrický význam rozdílu mezi prvním a druhým případem).

Nyní uvažujme řez rovinou $z = k$. Tento řez má tvar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}.$$

Jelikož je $1 + k^2/c^2 > 0$, jedná se vždy o elipsu. Je-li navíc $a = b$, pak se jedná o kružnici (o poloměru $a\sqrt{1 + k^2/c^2}$); v tomto případě se jedná o rotační (jednodílný) hyperboloid, který vznikne rotací hyperboly

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(řez rovinou $y = 0$) kolem osy $z$. Jelikož dvě větve této hyperboly jsou navzájem symetricky položeny vzhledem k ose $z$, je vidět, že se jedná opravdu o jednodílnou plochu (odtud název jednodílný hyperboloid). Přenecháváme čtenáři, aby vyšetřil řezy daného hyperboloidu rovinami tvaru $x = k$.

**Dvoudílný hyperboloid.** Rovnice dvoudílného hyperboloidu v základní poloze má tvar

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Nejprve se podívejme na řezy tohoto hyperboloidu s rovinami tvaru $z = k$. Tyto řezy mají tvar

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

a jedná se tedy o hyperboly (pro všechna $k \in \mathbb{R}$). Podobně zjistíme, že řezy rovinami $y = k$ jsou také hyperboly.

Uvažujme řez rovinou $x = k$. Tento řez má tvar

$$(***) \qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1.$$

Je-li $|k| < a$, pak tento řez je prázdná množina (neboť potom je $k^2/a^2 - 1 < 0$). Je-li $|k| = a$, pak $(***)$ má tvar

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

a daný řez je jediný bod.

Je-li nyní $|k| > a$, pak $k^2/a^2 - 1 > 0$ a $(***)$ je rovnicí elipsy — řezy jsou tedy elipsy. Je-li navíc $b = c$, pak tyto řezy budou kružnice (o poloměru $b\sqrt{k^2/a^2 - 1}$). V tomto případě se jedná o rotační (dvoudílný) hyperboloid, který vznikl rotací hyperboly

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(řez rovinou $z = 0$) kolem osy $x$. Jelikož tato hyperbola má dvě větve symetricky položené na polorovinách $x > 0$, $x < 0$, rotací každé větve dostaneme jednu část daného hyperboloidu. Tyto dvě části hyperboloidu jsou odděleny rovinou $x = 0$ (připomeňme, že řezy rovinami $x = k$ pro $|k| < a$ jsou prázdné množiny) — odtud název dvoudílný hyperboloid.

Snadné je vyšetřit eliptický, hyperbolický a parabolický válec. Jelikož v jejich rovnicích (v základní poloze) nevystupuje $z$, je snadno vidět (rozmyslete si), že se dají „složit“ z přímek rovnoběžných s osou $z$ (odtud název válec). Podrobnosti přenecháváme čtenáři.

Z necentrálních kvadrik se podívejme na hyperbolický paraboloid.

**Hyperbolický paraboloid.** Rovnice této kvadriky v základní poloze má tvar

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Řezy rovinami tvaru $z = k$ mají rovnice

$$(\#) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2k.$$

Je-li $k = 0$, pak $(\#)$ má tvar

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

a jedná se tedy o dvojici přímek $y = \pm x$.

Je-li $k > 0$, pak $(\#)$ je rovnicí hyperboly, jejíž dvě větve jsou umístěny v polorovinách $x > 0$ a $x < 0$.

V případě $k < 0$ je $(\#)$ opět rovnicí hyperboly, ovšem v tomto případě jsou větve této hyperboly umístěny v polorovinách $y > 0$ a $y < 0$.

Podívejme se nyní na řezy rovinami tvaru $y = k$. Tyto řezy mají rovnice (po jednoduché úpravě)

$$\frac{x^2}{a^2} = 2\left(z + \frac{k^2}{2b^2}\right).$$

Poslední rovnice je rovnicí paraboly (v rovině $xz$), ovšem nikoli s vrcholem v počátku, ale v bodě $(0, -k^2/(2b^2))$. Osou této paraboly je osa $z$ a parabola je „otočena nahoru“ (v kladném směru osy $z$).

Řezy rovinami $x = k$ mají tvar

$$\frac{y^2}{b^2} = -2\left(z - \frac{k^2}{2a^2}\right).$$

Jedná se o parabolu (v rovině $yz$) s vrcholem v bodě $(0, k^2/2a^2)$. Osa této paraboly je osa $z$ a parabola je „otočena dolů“.

**8.1.15 Poznámka.** V předchozí poznámce jsme alespoň velice stručně vyšetřili některé jednoduché vlastnosti některých kvadrik v $\mathbb{R}^3$, pokud jsou tyto kvadriky v základní poloze. Máme-li ovšem rovnici kuželosečky nebo rovnici kvadriky v $\mathbb{R}^3$, která není v základní poloze, nemusí být ani zdaleka na první pohled zřejmé, o jakou kuželosečku či kvadriku se jedná. Možnost, jak to zjistit, ukazují předchozí obecné úvahy o převedení kvadratické funkce na kanonický tvar. Podle těchto úvah, je-li kuželosečka či kvadrika v $\mathbb{R}^3$ určena kvadratickou funkcí $f$ tvaru (8.1), je především potřeba nalézt jistou vlastní bázi matice $\mathbf{A}$ ve vyjádření $f$ a dále střed (u centrální kvadriky) či vrchol (u necentrální kvadriky). Nalezneme tak kanonickou souřadnou soustavu a převedeme danou kvadratickou funkci na kanonický tvar. Dostaneme kanonický tvar rovnice dané kvadriky (či kuželosečky) a zároveň zjistíme její polohu v $\mathbb{R}^3$ (či v $\mathbb{R}^2$).

Jde tedy o to vhodně změnit souřadnou soustavu (mluvíme také o transformaci souřadnic) tak, aby daná kvadratická funkce v nových souřadnicích „přešla" na kanonický tvar. Uvědomíme si, jaký *geometrický význam* má transformace souřadnic. Uvažujme stále případ ortonormální souřadné soustavy. Buď $(X, \overline{s})$ nějaká ortonormální soustava souřadnic v $\mathbb{R}^n$, kde $X = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$. Označíme-li

$$\mathbf{X} = (\overline{x}_1 \mid \overline{x}_2 \mid \dots \mid \overline{x}_n)$$

a jestliže bod $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ má v soustavě $(X, \overline{s})$ souřadný vektor $\overline{y}$, pak

$$\overline{x} = \overline{s} + \mathbf{X}\overline{y}$$

[viz (8.4)] a

$$\overline{y} = \mathbf{X}^T(\overline{x} - \overline{s}) = \mathbf{X}^T\overline{x} - \mathbf{X}^T\overline{s}$$

[viz (8.6)]. Zastavme se u rovnosti $\overline{x} = \overline{s} + \mathbf{X}\overline{y}$. Tato rovnost ukazuje vztah mezi „starými" souřadnicemi $\overline{x}$ a „novými" souřadnicemi $\overline{y}$; ukazuje, jak lze „nové" souřadnice zobrazit na „staré". Výraz $\overline{s} + \mathbf{X}\overline{y}$ vlastně určuje nějaké zobrazení na $\mathbb{R}^n$. Přitom toto zobrazení lze vyjádřit jako složené zobrazení $f_2(f_1(\overline{y}))$, kde $f_1(\overline{y}) = \mathbf{X}\overline{y}$, $f_2(\overline{z}) = \overline{s} + \overline{z}$ ($\overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{R}^n$). Geometricky velmi jednoduché je zobrazení $f_2$ — je to pouhé posunutí (prostoru $\mathbb{R}^n$) o vektor $\overline{s}$. Chování zobrazení $f_1$ je určeno maticí $\mathbf{X}$ — $f_1$ je lineární zobrazení na $\mathbb{R}^n$ s maticí $\mathbf{X}$. Přitom v našem případě matice $\mathbf{X}$ je ortonormální. Vidíme tedy, že např. $f_1$ zachovává velikost vektorů a úhel mezi vektory a každou ortonormální bázi zobrazí opět na ortonormální bázi (viz větu 5.3.5, důsledek 5.3.8 a definici úhlu mezi vektory v odstavci 6.2). V případě $n = 2$ (tj. v případě ortonormální transformace souřadnic v $\mathbb{R}^2$) podle poznámky 7.3.6 zobrazení $f_1$ je geometricky buď otočení roviny (kolem počátku) o nějaký úhel nebo symetrie kolem přímky („překlopení" roviny kolem nějaké pevné přímky procházející počátkem). V případě $\mathbb{R}^2$ je tedy zobrazení $\overline{s} + \mathbf{X}\overline{y} = f_2(f_1(\overline{y}))$ složení dvou geometricky velice jednoduchých zobrazení — buď otočení a posunutí nebo „překlopení" a posunutí. V obou těchto případech ovšem geometrické figury nemění svůj tvar. Jestliže převádíme rovnici kuželosečky na kanonický tvar, pak to geometricky odpovídá tomu, že danou kuželosečku posuneme a vhodně otočíme (resp. „překlopíme" kolem přímky). Kdybychom analogicky poznámce 7.3.6 podrobněji vyšetřili ortonormální matice řádu 3, viděli bychom, že geometrický význam ortonormální transformace souřadnic v $\mathbb{R}^3$ je velice podobný případu $\mathbb{R}^2$ (zhruba řečeno, bude se opět jednat o posunutí a otočení či „překlopení"). Ještě si můžeme uvědomit, že vektory $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n$ báze $X$ udávají směry souřadných os souřadné soustavy $(X, \overline{s})$.

Nakonec připomeňme, že podle poznámky 8.1.2 se rovnice každé kuželosečky dá zapsat ve tvaru

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy - 2b_1x - 2b_2y + c = 0, \tag{8.19}$$

kde alespoň jedno z čísel $a_{11}, a_{22}, a_{12}$ je nenulové. Podobně rovnice každé kvadriky v $\mathbb{R}^3$ se dá zapsat ve tvaru

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz - 2b_1x - 2b_2y - 2b_3z + c = 0, \tag{8.20}$$

kde alespoň jedno z čísel $a_{ij}$ je nenulové.

Nakonec si ukažme několik jednoduchých konkrétních příkladů. Nejjednodušší případ, se kterým se můžeme setkat, je ten, že v rovnici kuželosečky ve tvaru (8.19) se neobjeví výraz $xy$ (tj. $a_{12} = 0$) a v rovnici kvadriky tvaru (8.20) se neobjeví výrazy $xy, xz, yz$ (tj. $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$). Potom příslušná transformace souřadnic, která převádí danou rovnici na kanonický tvar, bude spočívat pouze buď v posunutí počátku nebo nejvýše v „překlopení" kolem přímky (roviny) rovnoběžné se souřadnou přímkou (rovinou). V tomto případě není ani třeba hledat kanonickou souřadnou soustavu, ale rovnici kuželosečky či kvadriky můžeme v tomto případě upravit na kanonický tvar „doplněním na čtverec".

**8.1.16 Příklad.** Vyšetřete kuželosečku o rovnici

$$x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 1 = 0.$$

**Řešení.** Příslušnou kvadratickou funkci upravíme následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 1 &= (x^2 - 4x + 4) - 4 + 4(y^2 + 2y + 1) - 4 - 1 \\ &= (x-2)^2 + 4(y+1)^2 - 9. \end{aligned}$$

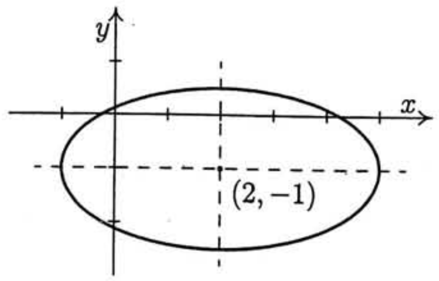
Původní rovnici jsme tak převedli na tvar

$$(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 9$$

a tuto rovnici můžeme ještě zapsat ve tvaru

$$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y+1)^2}{(3/2)^2} = 1.$$

Daná kuželosečka je elipsa. Navíc vidíme, že tato elipsa má střed v bodě $(2, -1)$, její




osy jsou rovnoběžné se souřadnými osami $x, y$ a velikost poloos je $3, 3/2$. Vysvětleme to podrobněji. V posledním zápise dané rovnice provedeme transformaci $x' = x-2$, $y' = y+1$, tj. $x = x' + 2$, $y = y' - 1$. V souřadnicích $x', y'$ má daná rovnice tvar

$$\frac{x'^2}{3^2} + \frac{y'^2}{(3/2)^2} = 1,$$

což je opravdu rovnice elipsy (v základní poloze) s poloosami $3, 3/2$. Přitom uvedená transformace je pouze posunutí počátku do bodu $(2, -1)$.

**8.1.17 Příklad.** Vyšetřete kuželosečku o rovnici

$$x^2 + x + y - \frac{7}{4} = 0.$$

**Řešení.** Příslušnou kvadratickou funkci upravíme takto

$$x^2 + x + y - \frac{7}{4} = \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + y - \frac{7}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y - 2$$

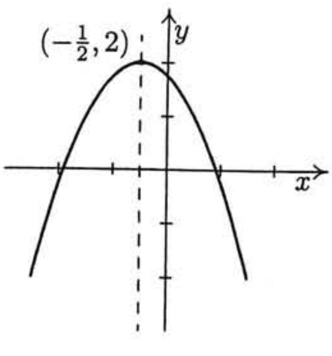
a rovnici dané kuželosečky zapíšeme ve tvaru

$$\frac{(x + 1/2)^2}{1/2} = -2(y - 2).$$

Položíme-li $x' = x + 1/2$, $y' = -(y - 2)$, bude mít tato rovnice tvar

$$\frac{x'^2}{1/2} = 2y',$$

což je kanonický tvar rovnice paraboly. V původní souřadné soustavě má daná parabola vrchol v bodě $(-1/2, 2)$ [jedná se o posunutí počátku do bodu $(-1/2, 2)$] a osu rovnoběžnou s osou $y$. Transformace $y' = -(y - 2)$ odpovídá „překlopení" kolem přímky $y = 2$, což znamená, že daná parabola je „otočena dolů".

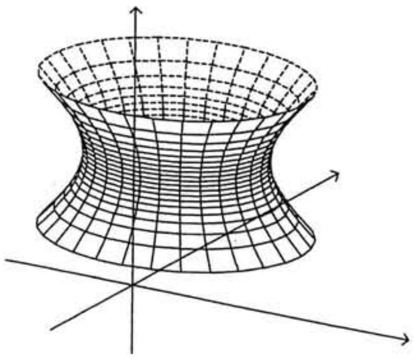



**8.1.18 Příklad.** Určete jaká kvadrika (v $\mathbb{R}^3$) je určena rovnicí

$$9x^2 + 36y^2 - 4z^2 - 18x + 16z - 43 = 0.$$

**Řešení.** Podobně jako v předchozím, upravíme příslušnou kvadratickou funkci následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} 9x^2 + 36y^2 - 4z^2 - 18x + 16z - 43 &= 9(x^2 - 2x + 1) - 9 + 36y^2 - \\ &\qquad - 4(z^2 - 4z + 4) + 16 - 43 \\ &= 9(x - 1)^2 + 36y^2 - 4(z - 2)^2 - 36. \end{aligned}$$



Dostáváme tak rovnici

$$9(x-1)^2 + 36y^2 - 4(z-2)^2 = 36,$$

kterou ještě můžeme upravit na tvar

$$\frac{(x-1)^2}{2^2} + y^2 - \frac{(z-2)^2}{3^2} = 1.$$

Vidíme, že daná kvadrika je jednodílný hyperboloid se středem v bodě $(1,0,2)$.

**8.1.19 Příklad.** Vyšetřete kuželosečku o rovnici

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 + 20\sqrt{5}\,x + 20 = 0.$$

**Řešení.** Položíme-li

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \bar{b} = (-10\sqrt{5}, 0), \qquad c = 20,$$

můžeme danou rovnici zapsat ve tvaru [když $\bar{x} = (x,y)$]

$$f(\bar{x}) = \bar{x}\mathbf{A}\bar{x} - 2\bar{b}\cdot\bar{x} + c.$$

Snadno zjistíme (spočtěte), že matice $\mathbf{A}$ má vlastní čísla $\lambda_1 = 20$, $\lambda_2 = 5$ a že vlastní vektor $\mathbf{A}$ s vlastním číslem $\lambda_1 = 20$ a o velikosti 1 je

$$\bar{x}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

a vlastní vektor $\mathbf{A}$ s vlastním číslem $\lambda_2 = 5$ (opět o velikosti 1) je

$$\bar{x}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

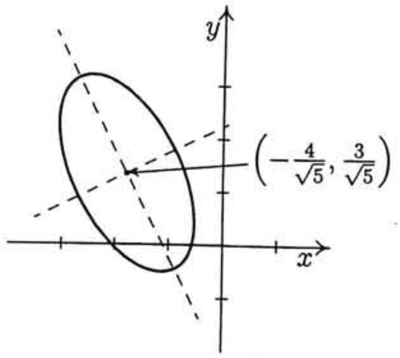
Jelikož matice **A** je regulární, je daná kuželosečka centrální (viz poznámku 8.1.9). Nalezněme střed této kuželosečky. Podle věty 8.1.6 je střed $\overline{s}$ dané kuželosečky roven řešení soustavy $\mathbf{A}\overline{s} = \overline{b}$. Snadno spočteme (spočtěte), že

$$\overline{s} = \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right).$$

Podle poznámky 8.1.9 spočteme

$$f_0 = f(\overline{s}) = c - \overline{b} \cdot \overline{s} = 20 - (-10\sqrt{5}, 0) \cdot \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right) = -20$$

(zkuste spočítat též přímo dosazením $\overline{s}$ do původního tvaru $f$).




Uvažujeme-li nyní souřadnou soustavu $(X, \overline{s})$, kde $X = (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$, a značíme-li souřadnice bodu $(x, y)$ v této souřadné soustavě $(x', y')$, pak $f$ má v souřadnicích $(x', y')$ tvar

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + f_0$$

[viz poznámku 8.1.9, rovnost (8.12)], takže v těchto souřadnicích má daná kuželosečka rovnici

$$20x'^2 + 5y'^2 = 20,$$

což upravíme na kanonický tvar

$$x'^2 + \frac{y'^2}{2^2} = 1.$$

Daná kuželosečka je elipsa o poloosách velikosti 1 a 2. Střed této elipsy je v bodě

$$\overline{s} = \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

a směr (zaměření) jedné poloosy (o velikosti 1) je

$$\overline{x}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

zatímco zaměření druhé poloosy je

$$\overline{x}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

**8.1.20 Příklad.** Vyšetřete kuželosečku

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 + 25x - 50y + 50 = 0.$$

**Řešení.** Rovnici této kuželosečky napíšeme ve tvaru [opět značíme $(x, y) = \overline{x}$]

$$f(\overline{x}) = \overline{x}\mathbf{A}\overline{x} - 2\overline{b} \cdot \overline{x} + c,$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \overline{b} = (-\tfrac{25}{2}, 25), \qquad c = 50.$$

Zjistíme, že matice $\mathbf{A}$ má vlastní čísla (spočtěte) $\lambda_1 = 25$, $\lambda_2 = 0$. Vlastní vektor $\mathbf{A}$ o velikosti 1 s vlastním číslem $\lambda_1 = 25$ je

$$\overline{x}_1 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

a vlastní vektor $\mathbf{A}$ s vlastním číslem $\lambda_2 = 0$ je

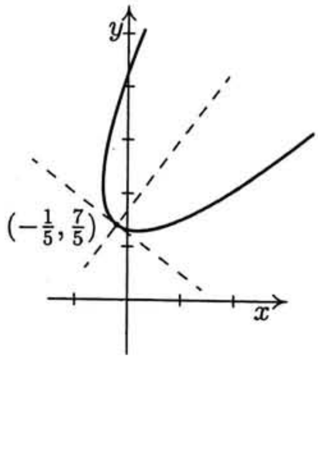
$$\overline{x}_2 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Jelikož $h(\mathbf{A}) = 1$, $h((\mathbf{A} \mid \overline{b})) = 2$ (ověřte!), soustava $\mathbf{A}\overline{s} = \overline{b}$ nemá řešení a tedy daná kuželosečka je necentrální (věta 8.1.6). Podle věty 8.1.12 má tato kuželosečka nějaký vrchol $\overline{s}$. Nebudeme tento vrchol hledat přímo tak, jak je to ukázáno v důkazu věty 8.1.12, ale ukážeme si trochu jiný postup.

Uvažujme nejprve souřadnou soustavu $(X, \overline{0})$, kde $X = (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$. Je-li $\overline{x} = (x, y)$ a jestliže $(x', y')$ značí souřadný vektor $\overline{x}$ v soustavě $(X, \overline{0})$, pak

$$(*) \qquad x = -\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y', \qquad y = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y'.$$

Dosazením do původního tvaru rovnice dané kuželosečky dostaneme po úpravě rovnici




(spočtěte!)

$$25x'^2 - 50x' - 25y' + 50 = 0.$$

Tuto rovnici podělíme 25 a po doplnění na čtverec dostaneme rovnici

$$\left(x' - 1\right)^2 = y' - 1,$$

což je rovnice paraboly (samotný fakt, že se jedná o parabolu, jsme viděli již v okamžiku, kdy jsme zjistili, že daná kuželosečka je necentrální, neboť necentrální kuželosečka je pouze jediná — parabola). Tato parabola má vrchol $x' = 1$, $y' = 1$, tj. [dosazením do (*)] $x = -1/5$, $y = 7/5$.

Závěr: vyšetřovaná kuželosečka je parabola s vrcholem v bodě $\overline{s} = (-1/5, 7/5)$ a osou ve směru (kladném) $\overline{x}_2 = (3/5, 4/5)$.

**8.1.21 Příklad.** Vyšetřete kvadriku (v $\mathbb{R}^3$) o rovnici

$$x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2yz - 6x + 6y - 6z + 9 = 0.$$

**Řešení.** Rovnici dané kvadriky zapíšeme ve tvaru [když označíme $\overline{x} = (x, y, z)$]

$$f(\overline{x}) = \overline{x}\mathbf{A}\overline{x} - 2\overline{b} \cdot \overline{x} + c,$$

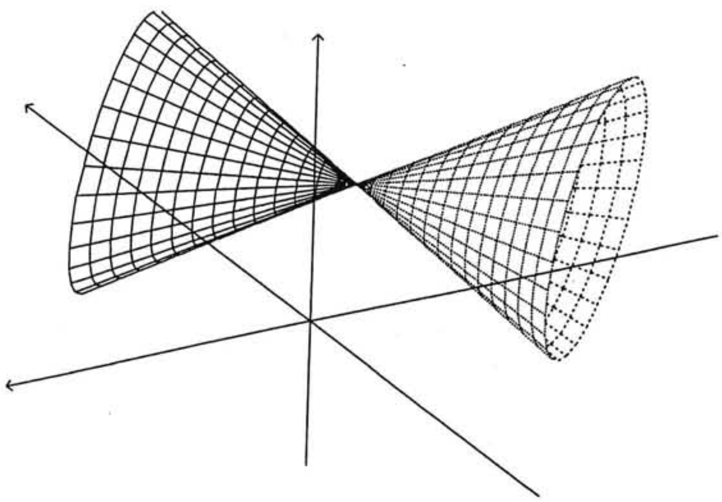
kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \overline{b} = (3, -3, 3), \qquad c = 9.$$

Zjistíme, že (spočtěte)

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36)$$

a vlastní čísla $\mathbf{A}$ jsou $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -2$ [nejprve si např. všimneme, že jedno



z vlastních čísel je $-2$ a podělením daného polynomu kořenovým činitelem $(\lambda + 2)$ převedeme úlohu na hledání kořenů kvadratické rovnice]. Dále spočteme (spočtěte!), že vlastní vektory matice $\mathbf{A}$ odpovídající vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ jsou po řadě

$$\overline{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1), \qquad \overline{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2), \qquad \overline{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$$

(píšeme zde vektory o velikosti 1). Jelikož $\mathbf{A}$ je regulární (nula není vlastní číslo $\mathbf{A}$), je daná kvadrika centrální a má jediný střed (poznámka 8.1.9). Víme, že střed $\bar{s}$ této kvadriky dostaneme jako řešení soustavy $\mathbf{A}\bar{s} = \bar{b}$; spočteme (spočtěte), že

$$\bar{s} = (1, -1, 1).$$

Centrální hodnota $f_0$ je [viz rovnost (8.13)]

$$f_0 = c - \bar{b} \cdot \bar{s} = 0.$$

Je-li nyní $X = (\bar{x}_1 \mid \bar{x}_2 \mid \bar{x}_3)$, pak $(X, \bar{s})$ je kanonická soustava souřadnic pro danou kvadriku. Kanonický tvar rovnice této kvadriky je [viz rovnost (8.12)]

$$3x'^2 + 6y'^2 - 2z'^2 = 0.$$

Vidíme tedy, že daná kvadrika je kužel s vrcholem (středem) v bodě $\bar{s} = (1, -1, 1)$; osa tohoto kuželu je přímka procházející $\bar{s}$ se zaměřením $\bar{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$.

## 8.2 Kvadratické formy

V závěrečném odstavci se zastavíme u jednoho pojmu týkajícího se kvadratických forem, a to u pojmu definitnosti (resp. semidefinitnosti) kvadratické formy. Stejně jako v předchozím odstavci rozumíme i zde maticí pouze reálnou matici.

**8.2.1 Definice.** *Buď $\mathbf{A} = (a_{ij})$ čtvercová symetrická matice řádu $n$. Potom zobrazení $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definované rovností*

$$q(\bar{x}) = \bar{x}\mathbf{A}\bar{x} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \tag{8.21}$$

*[$\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$] se nazývá **kvadratická forma** na $\mathbb{R}^n$; matici $\mathbf{A}$ potom nazýváme **matice kvadratické formy** $q$.*

*Kvadratická forma $q$ na $\mathbb{R}^n$ (resp. matice $\mathbf{A}$) se nazývá*

(i) ***pozitivně definitní,*** *jestliže pro každé $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \neq \bar{0}$, je $q(\bar{x}) > 0$,*

(ii) ***pozitivně semidefinitní,*** *jestliže pro každé $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ je $q(\bar{x}) \geq 0$,*

(iii) ***indefinitní,*** *jestliže existují $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ tak, že $q(\bar{x}_1)q(\bar{x}_2) < 0$,*

(iv) ***negativně definitní,*** *jestliže pro každé $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \neq \bar{0}$, je $q(\bar{x}) < 0$,*

(v) ***negativně semidefinitní,*** *jestliže pro každé $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ je $q(\bar{x}) \leq 0$.*

*Řekneme, že kvadratická forma $q$ s maticí $\mathbf{A}$ je **regulární**, je-li $\mathbf{A}$ regulární.*

**8.2.2 Věta.** *Buď $q$ kvadratická forma na $\mathbb{R}^n$ s maticí $\mathbf{A}$ a nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ (každé se tu opakuje tolikrát, kolik činí jeho násobnost). Potom platí:*

(i) *$q$ je pozitivně definitní právě když $\lambda_i > 0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$,*

(ii) *$q$ je pozitivně semidefinitní právě když $\lambda_i \geq 0$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$,*

(iii) *$q$ je indefinitní právě když existují $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ tak, že $\lambda_i \lambda_j < 0$,*

(iv) *$q$ je negativně definitní právě když $\lambda_i < 0$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$,*

(v) *$q$ je negativně semidefinitní právě když $\lambda_i \leq 0$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$.*

*Je-li $q$ definitní (pozitivně nebo negativně), pak je $q$ regulární.*

DŮKAZ. Buď $X = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ ortonormální báze $\mathbb{R}^n$ taková, že $\overline{x}_i$ je vlastní vektor $\mathbf{A}$ s vlastním číslem $\lambda_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ a buď $X = \left(\overline{x}_1 \mid \overline{x}_2 \mid \cdots \mid \overline{x}_n\right)$. Potom $\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X} = [\![\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]\!]$ (viz větu 7.3.3).

Pro $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ nechť $\overline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ je souřadnicový vektor $\overline{x}$ v bázi $X$. Stejně jako jsme dokázali rovnost (8.7) bychom mohli ukázat, že potom

$$q(\overline{x}) = \overline{x}\mathbf{A}\overline{x} = \overline{y}(\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X})\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2. \tag{8.22}$$

Z této rovnosti již snadno plynou tvrzení (i)–(v). Dokažme např. tvrzení (i) a (iii).

(i) Buď $\lambda_i > 0$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Buď $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ souřadnicový vektor $\overline{x}$ v bázi $X$. Je-li $\overline{x} \neq \overline{0}$, pak je $\overline{y} \neq \overline{0}$, odkud dostaneme

$$q(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 > 0,$$

což znamená, že $q$ je pozitivně definitní.

Buď $q$ pozitivně definitní a předpokládejme, že pro nějaké $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ je $\lambda_i \leq 0$. Potom $\mathbf{A}\overline{x}_i = \lambda_i \overline{x}_i$ a tedy

$$q(\overline{x}_i) = \overline{x}_i \mathbf{A} \overline{x}_i = \overline{x}_i \cdot \lambda_i \overline{x}_i = \lambda_i \|\overline{x}_i\|^2 = \lambda_i \leq 0, \tag{$*$}$$

což znamená (jelikož $\overline{x}_i \neq \overline{0}$), že $q$ není pozitivně definitní, což je spor. Dokázali jsme, že platí (i).

(iii) Již jsme si všimli, že pro vektory $\overline{x}_i$ z báze $X$ je $q(\overline{x}_i) = \lambda_i$ [rovnost $(*)$]. Existují-li $i, j$ tak, že $\lambda_i \lambda_j < 0$, pak je ovšem $q(\overline{x}_i) q(\overline{x}_j) = \lambda_i \lambda_j < 0$, tj. $q$ je indefinitní.

Jestliže takové $i, j$ neexistují, pak je buď $\lambda_i \geq 0$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ anebo $\lambda_i \leq 0$ pro každé $i$, což podle (8.22) znamená, že $q$ nenabývá hodnot různých znamének a tedy $q$ není indefinitní. Dokázali jsme bod (iii).

Je-li $q$ definitní, pak podle předchozího nula není vlastní číslo $\mathbf{A}$, což znamená, že $\mathbf{A}$ je regulární, tj. $q$ je regulární.

□

**8.2.3 Poznámka.** Věta 8.2.2 dává návod jak zjistit definitnost nebo semidefinitnost kvadratické formy pomocí vlastních čísel matice této formy. Tento postup je sice obecný, ale ne vždy je možné snadno nalézt vlastní čísla dané matice. Jednu z možností, jak určit definitnost kvadratické formy, nabízí tzv. *Sylvestrovo kritérium*. Toto kritérium používá pojem tzv. hlavních minorů matice, které jsme dosud nedefinovali.

Buď $\mathbf{A} = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu $n$. Pro $i = 1, 2, \dots, n$ označme

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}. \tag{8.23}$$

Potom číslo

$$\Delta_i = \det \mathbf{A}_i$$

($i = 1, 2, \dots, n$) nazveme *hlavní minor matice* $\mathbf{A}$ *řádu* $i$. Poznamenejme, že je spec. $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_n = \det \mathbf{A}$.

Dále poznamenejme, že obecně minor čtvercové matice $\mathbf{A}$ je determinant čtvercové matice, která vznikla z $\mathbf{A}$ vynecháním nějakých $k$ řádků a $k$ sloupců. V našem případě hlavního minoru řádu $i$ vznikne matice $\mathbf{A}_i$ z $\mathbf{A}$ vynecháním $(n - i)$ posledních řádků a $(n - i)$ posledních sloupců.

**8.2.4 Věta (Sylvestrovo kritérium).** *Buď $q$ kvadratická forma na $\mathbb{R}^n$ s maticí $\mathbf{A}$ a nechť pro $i = 1, 2, \dots, n$ je $\mathbf{A}_i$ hlavní minor řádu $i$ matice $\mathbf{A}$. Potom platí:*

(i) *$q$ je pozitivně definitní právě když $\Delta_i > 0$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$;*

(ii) *$q$ je negativně definitní právě když $(-1)^i \Delta_i > 0$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ (tj. když $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, ... ).*

DŮKAZ. Dokažme bod (i).

(a) Předpokládejme, že $q$ je pozitivně definitní a ukažme, že potom $\Delta_i > 0$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Důkaz provedeme indukcí podle $n$. Je-li $n = 1$, pak je vše zřejmé (neboť potom $\Delta_i = a_{11} = \lambda_1 > 0$).

Buď nyní $n > 1$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro $(n - 1)$. K dané kvadratické formě $q$ na $\mathbb{R}^n$ přiřaďme formu $q_{n-1} \colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ definovanou následujícím způsobem. Pro $\overline{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ položme

$$q_{n-1}(\overline{x}) = q(\overline{x}^*), \tag{$*$}$$

kde $\overline{x}^* = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n$. Snadno je vidět, že $q_{n-1}$ je opravdu kvadratická forma na $\mathbb{R}^{n-1}$, přičemž matice formy $q_{n-1}$ je rovna $\mathbf{A}_{n-1}$. Jelikož $q$ je pozitivně definitní na $\mathbb{R}^n$, je $q_{n-1}$ pozitivně definitní na $\mathbb{R}^{n-1}$ [je-li $\overline{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\overline{x} \neq \overline{0}$, pak $\overline{x}^* \neq \overline{0}$ a $q_{n-1}(\overline{x}) = q(\overline{x}^*) > 0$]. Podle indukčního předpokladu je tedy $\Delta_i > 0$ pro $i = 1, 2, \dots, n-1$. Zbývá ukázat, že $\Delta_n = \det \mathbf{A} > 0$. To ale plyne z věty 8.2.2, neboť jsou-li $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ vlastní čísla matice $\mathbf{A}$, pak $\det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ (viz poznámka 7.1.2).

(b) Nejprve se podívejme na jedno pomocné tvrzení týkající se kvadrik. Uvažujme kvadriku s rovnicí

$$\overline{x}\mathbf{A}\overline{x} - 2\overline{b} \cdot \overline{x} + c = 0$$

($\mathbf{A}$ je symetrická matice řádu $n$, $\overline{b} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$). Je-li daná kvadrika centrální, pak, jak jsme ukázali v poznámce 8.1.7, střed dané kvadriky $\overline{s}$ (všechny středy) je řešením soustavy $\mathbf{A}\overline{s} = \overline{b}$ a podle poznámky 8.1.9 centrální hodnota $f_0$ má tvar $f_0 = c - \overline{b} \cdot \overline{s}$. Střed $\overline{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ a centrální hodnotu $f_0$ tedy můžeme dostat jako řešení jedné soustavy $(n+1)$ rovnic o $(n+1)$ neznámých $s_1, s_2, \dots, s_n, f_0$, kde rozšířená matice této soustavy má tvar

$$(**) \qquad \left(\begin{array}{c|c||c} \mathbf{A} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \overline{b} \\ \hline \overline{b} & 1 & c \end{array}\right)$$

(zde zdvojená svislá čára naznačuje oddělení matice soustavy od sloupce pravých stran; prvních $n$ rovnic této soustavy odpovídá soustavě $\mathbf{A}\overline{x} = \overline{b}$, poslední rovnice, která má tvar $\overline{b} \cdot \overline{x} + f_0 = c$, určuje $f_0$).

Předpokládejme nyní, že matice $\mathbf{A}$ kvadratické formy $q$ má všechny hlavní minory kladné. Chceme ukázat, že $q$ je pozitivně definitní, tj. pro každé $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\overline{x} \neq \overline{0}$, je $q(\overline{x}) > 0$. Tvrzení dokážeme opět indukcí podle $n$.

Podobně jako v bodu (a) je zřejmé, že tvrzení platí v případě $n = 1$ (stačí se podívat na tvar $q$ v tomto případě).

Buď nyní $n > 1$. Je-li dán bod $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n$, označme $\overline{x}^* = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Potom můžeme psát [je-li $\mathbf{A} = (a_{ij})$]

$$q_{x_n}(\overline{x}^*) = q(\overline{x}) = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}x_ix_j + 2x_n \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}x_i + a_{nn}x_n^2 = \overline{x}^*\mathbf{A}_{n-1}\overline{x}^* - 2\overline{b} \cdot \overline{x}^* + c,$$

kde $\mathbf{A}_{n-1}$ má stejný význam jako v poznámce 8.2.3,

$$\overline{b} = -x_n(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{n-1\,n}) \in \mathbb{R}^{n-1}, \qquad c = a_{nn}x_n^2.$$

Uvažujeme-li $x_n$ pevné, pak tedy $q_{x_n}$ je kvadratická funkce na $\mathbb{R}^{n-1}$ s maticí $\mathbf{A}_{n-1}$. Podle předpokladu je $\Delta_{n-1} = \det \mathbf{A}_{n-1} > 0$ a tedy podle poznámky 8.1.9 je $q_{x_n}$ centrální a má jediný střed. Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}_{n-1}$ (každé se opakuje tolikrát, kolik činí jeho násobnost) a buď $q_0$ centrální hodnota $q_{x_n}$. Potom v příslušné kanonické soustavě v $\mathbb{R}^{n-1}$ (viz poznámku 8.1.9) má $q_{x_n}$ tvar

$$(***) \qquad q(\overline{x}) = q_{x_n}(\overline{x}^*) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i y_i^2 + q_0$$

[kde $\overline{y}^* = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ je souřadnicový vektor $\overline{x}^*$ v dané kanonické souřadné soustavě]. Podle předchozí úvahy dostaneme střed $\overline{s}^*$ a centrální hodnotu $q_0$ řešením soustavy s rozšířenou maticí [viz (**)]

$$\left(\begin{array}{c|c||c} \mathbf{A}_{n-1} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \overline{b} \\ \hline \overline{b} & 1 & c \end{array}\right).$$

Snadno zjistíme (rozepsáním podle posledního sloupce), že

$$\det \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{n-1} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \bar{b} & 1 \end{array} \right) = \det \mathbf{A}_{n-1} = \Delta_{n-1}.$$

Dále zjistíme, že

$$\det \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{n-1} & \bar{b} \\ \hline \bar{b} & c \end{array} \right) = x_n^2 \det \mathbf{A} = x_n^2 \Delta_n$$

(v tomto determinantu nejprve z posledního sloupce „vytkneme" $-x_n$ a potom z posledního řádku „vytkneme" opět $-x_n$ — viz tvar $\bar{b}, c$). Podle Cramerova pravidla odtud dostaneme

$$q_0 = x_n^2 \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

a podle (***) můžeme tedy hodnotu kvadratické formy $q$ v $\bar{x} = (\bar{x}^*, x_n)$ napsat ve tvaru

$$(\#) \qquad q(\bar{x}) = q_{x_n}(\bar{x}^*) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i y_i^2 + x_n^2 \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

(kde $\lambda_i, y_i$ mají výše popsaný význam). Jelikož $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0, \dots, \Delta_{n-1} > 0$, podle indukčního předpokladu [že tvrzení platí pro $(n-1)$] a podle věty 8.2.2 (i) je $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0, \dots, \lambda_{n-1} > 0$. Nyní z (#) je již vidět, že pro každé $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \neq \bar{0}$ je $q(\bar{x}) > 0$, tj. $q$ je opravdu pozitivně definitní [je třeba si ještě rozmyslet, že pokud $x_n = 0$, pak střed kvadriky $q_{x_n}$ je roven $\bar{0}$ ($\in \mathbb{R}^{n-1}$) a v příslušné kanonické souřadné soustavě v $\mathbb{R}^{n-1}$ je $\bar{y}^* = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \neq \bar{0}$ pokud $\bar{x}^* \neq \bar{0}$].

Důkaz bodu (ii) bychom provedli analogicky (rozmyslete si, jakým způsobem dojdeme k tomu, že v tomto případě se znaménka hlavních minorů střídají). □

**8.2.5 Poznámka.** Sylvestrovo kritérium umožňuje určit, zda daná kvadratická forma je pozitivně či negativně definitní. Pokud forma není definitní, je buď indefinitní nebo semidefinitní (pozitivně nebo negativně). Rozlišit indefinitní formu od semidefinitní ale Sylvestrovo kritérium neumožňuje. Podle předchozího (věta 8.2.2) by k tomu bylo potřeba najít vlastní čísla matice dané kvadratické formy. Vzpomeneme-li si na důkaz věty 8.2.2, pak vidíme, že v podstatě jde o to, převést kvadratickou formu, která má tvar

$$(*) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

a kde se obecně vyskytují součiny $x_i x_j$ pro $i \neq j$, na součet kvadrátů — ze znaménka koeficientů u těchto kvadrátů je potom vidět, o jaký typ kvadratické formy se jedná. Danou kvadratickou formu můžeme na součet kvadrátů převést ale i jiným způsobem, než jenom vyjádřením v kanonické souřadné soustavě. Tento převod můžeme totiž také provést pouze jistými úpravami výrazu $(*)$. Tyto úpravy se zakládají na vhodném použití vzorce $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ (vlastně se bude jednat o „doplňování na čtverec"). Této metodě určení typu kvadratické formy se říká *Lagrangeův algoritmus* nebo *Babylónská redukce*. Nebudeme zde tuto metodu formálně popisovat (ani dokazovat příslušné tvrzení), ale ukážeme si ji na konkrétních příkladech.

**8.2.6 Příklad.** Určete typ kvadriky $q$ na $\mathbb{R}^3$, když

(a) $q(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 2xy$,

(b) $q(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 4xy + 2xz - 2yz$,

(c) $q(x,y,z) = x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 2xz - 8yz$,

(d) $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4xz - 3yz$.

**Řešení.** (a) Matice dané kvadratické formy má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Snadno zjistíme (spočtěte), že hlavní minory $\mathbf{A}$ jsou $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 3$, $\Delta_3 = 9$. Podle Sylvestrova kritéria je tedy $q$ pozitivně definitní. Ukažme si, jak můžeme tuto skutečnost zjistit pomocí Lagrangeova algoritmu. Nejprve si všimneme, že

$$x^2 + 2xy = (x+y)^2 - y^2.$$

Odtud

$$q(x,y,z) = (x+y)^2 - y^2 + 4y^2 + 3z^2 = (x+y)^2 + 3y^2 + 3z^2.$$

Nyní opět vidíme, že $q$ je pozitivně definitní. Podrobněji: Můžeme zavést „nové proměnné" $x', y', z'$ vztahem

$$x' = x + y, \qquad y' = y, \qquad z' = z.$$

V těchto nových proměnných má $q$ tvar

$$q(x,y,z) = x'^2 + 3y'^2 + 3z'^2,$$

což je opravdu tvar pozitivně definitní kvadratické formy na $\mathbb{R}^3$.

Poznamenejme, že uvedená transformace odpovídá jisté změně báze v $\mathbb{R}^3$, tj. jisté nové souřadné soustavě. Tato nová souřadná soustava není ortonormální (ani ortogonální), což ale pro určení definitnosti není podstatné. Podstatné je, že zobrazení $(x,y,z) \mapsto (x',y',z')$ je izomorfismus (vše si rozmyslete!).

(b) Matice dané kvadratické formy má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spočteme hlavní minory $\mathbf{A}$ (spočtěte): $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 2$, $\Delta_3 = 1$. Opět podle Sylvestrova kritéria okamžitě dostáváme, že $q$ je pozitivně definitní. Zkusme ověřit pozitivní definitnost $q$ Babylónskou redukcí. Podobně jako v předchozím si nejprve všimneme, že

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4xy + 2xz &= 2\big[x^2 - 2x(y - \tfrac{1}{2}z)\big] = \\ &= 2\big[(x - y + \tfrac{1}{2}z)^2 - (y - \tfrac{1}{2}z)^2\big] = 2(x - y + \tfrac{1}{2}z)^2 + 2y^2 + 2yz - \tfrac{1}{2}z^2. \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= 2(x - y + \frac{1}{2}z)^2 - 2y^2 + 2yz - \tfrac{1}{2}z^2 + 3y^2 + z^2 - 2yz \\ &= 2(x - y + \tfrac{1}{2}z)^2 + y^2 + \tfrac{1}{2}z^2, \end{aligned}$$

z čehož vidíme, že $q$ je opravdu pozitivně definitní.

(c) Matice dané kvadratické formy má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Spočteme hlavní minory $\mathbf{A}$ (spočtěte): $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 1$, $\Delta_3 = 0$. Ze Sylvestrova kritéria nyní vidíme, že $q$ není definitní. Zatím ale nelze rozhodnout, zda $q$ je semidefinitní či indefinitní. Použijeme opět Babylónskou redukci. Na $q$ provedeme následující úpravy:

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= x^2 + 2x(2y - z) + 5y^2 + 5z^2 - 8yz \\ &= (x + 2y - z)^2 - (2y - z)^2 + 5y^2 + 5z^2 - 8yz \\ &= (x + 2y - z)^2 - 4y^2 + 4yz - z^2 + 5y^2 + 5z^2 - 8yz \\ &= (x + 2y - z)^2 + y^2 + 4z^2 - 4yz \\ &= (x + 2y - z)^2 + (y - 2z)^2. \end{aligned}$$

Zavedeme-li nové proměnné $x', y', z'$ vztahem

$$x' = x + 2y - z, \qquad y' = y - 2z, \qquad z' = z,$$

dostáváme $q$ ve tvaru

$$q(x,y,z) = x'^2 + y'^2.$$

Jelikož se jedná o kvadratickou formu na $\mathbb{R}^3$, vidíme, že $q$ je pozitivně semidefinitní.

Bylo by možná zajímavé nalézt nějaký bod $\overline{0} \neq (x, y, x) \in \mathbb{R}^3$, pro který $q(x, y, z) = 0$. Z vyjádření $q$ v proměnných $x', y', z'$ je vidět, že stačí např. volit $x' = y' = 0$, $z' = 1$, tj.

$$x + 2y - z = 0, \qquad y - 2z = 0, \qquad z = 1.$$

Odtud spočteme $x = -3$, $y = 2$, $z = 1$, tj. např. $q(-3, 2, 1) = 0$ (ověřte dosazením do původního tvaru $q$).

(d) Matice dané kvadratické formy má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Spočteme hlavní minory $\mathbf{A}$ (spočtěte): $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = -\frac{1}{4}$. Opět je ze Sylvestrova kritéria pouze vidět, že $q$ není definitní, ale nelze zatím rozhodnout, zda je semidefinitní či indefinitní. Na $q$ provedeme úpravu

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= x^2 + 2x(-y + 2z) + y^2 + 4z^2 - 3yz \\ &= (x - y + 2z)^2 - (-y + 2z)^2 + y^2 + 4z^2 - 3yz \\ &= (x - y + 2z)^2 - y^2 + 4yz - 4z^2 + y^2 + 4z^2 - 3yz \\ &= (x - y + 2z)^2 + yz. \end{aligned}$$

Položíme-li

$$x' = x - y + 2z, \qquad y' = y, \qquad z' = z,$$

můžeme $q$ napsat ve tvaru

$$q(x, y, z) = x'^2 + y'z'.$$

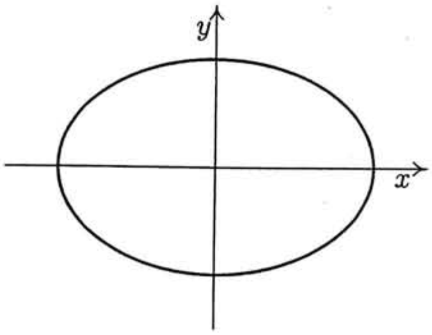
Z tohoto tvaru bychom nyní měli odstranit součin $y'z'$. To ovšem nemůžeme provést předchozím způsobem pomocí doplňování na čtverec, neboť v posledním vyjádření $q$ nevystupuje $y'^2$ ani $z'^2$ (není tedy k čemu doplňovat na čtverec). Standardní úprava, která se v tomto případě používá, je následující. Zavedeme opět nové proměnné, tentokrát vztahem

$$x' = x'', \qquad y' = y'' + z'', \qquad z' = y'' - z''$$

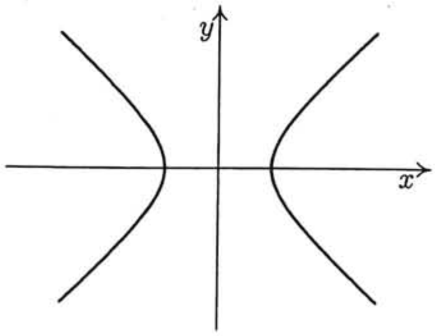
[snadno se ověří, že zobrazení $(x', y', z') \mapsto (x'', y'', z'')$ je opět izomorfismus na $\mathbb{R}^3$]. Dosazením do předchozího tvaru $q$ dostaneme

$$q(x, y, z) = x'^2 + y'z' = x''^2 + (y'' + z'')(y'' - z'') = x''^2 + y''^2 - z''^2.$$

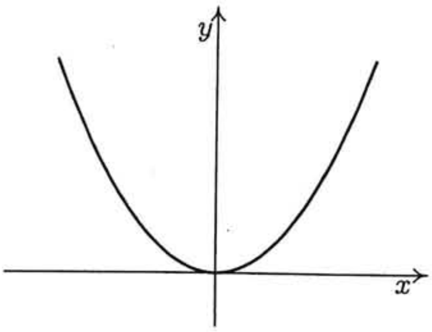
Vidíme, že $q$ je indefinitní [zkuste nalézt dva body $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$, $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ tak, že $q(x_1, y_1, z_1) > 0$, $q(x_2, y_2, z_2) < 0$].



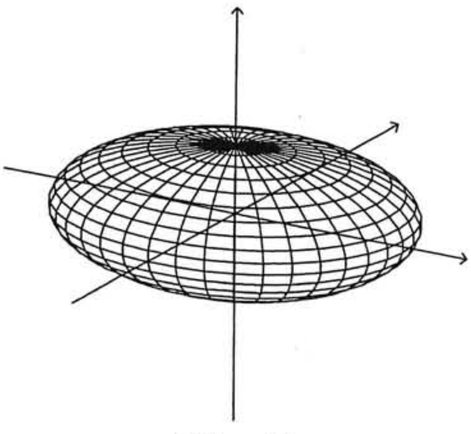

**Elipsa**



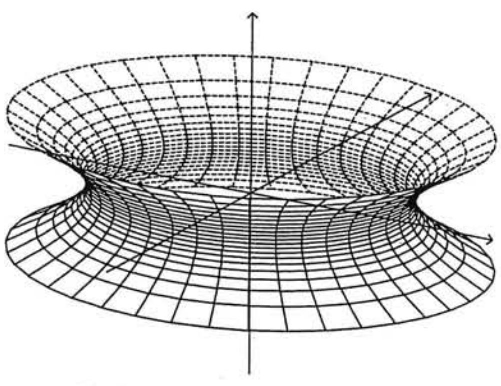

**Hyperbola**



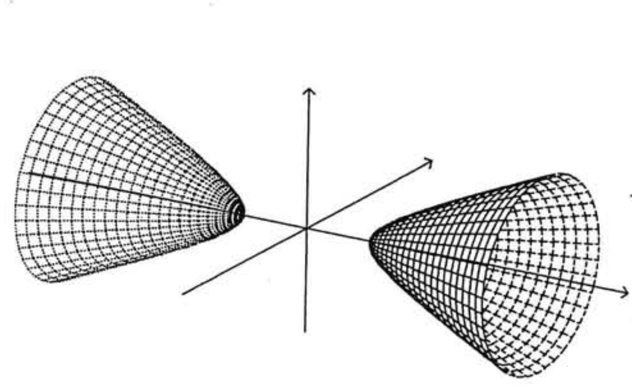

**Parabola**



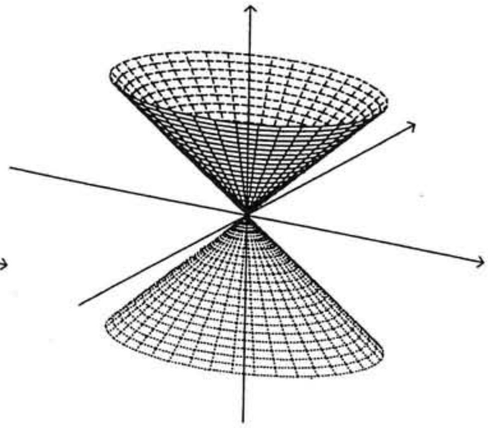
**Elipsoid**



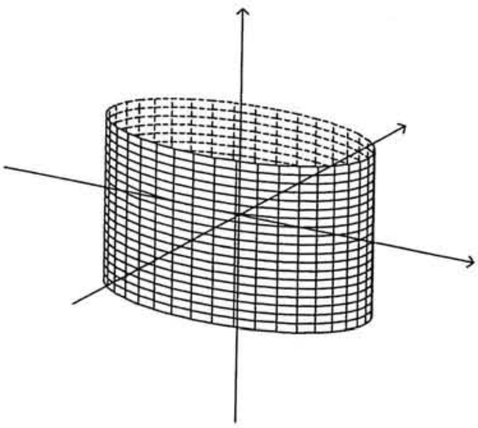
**Jednodílný hyperboloid**



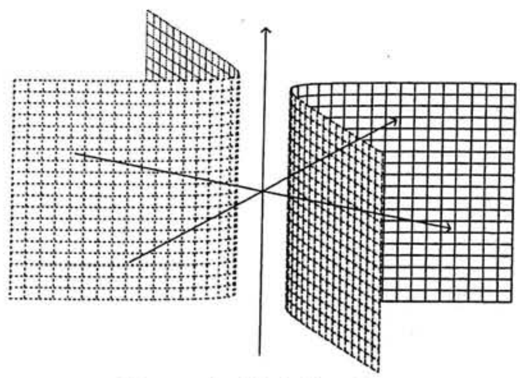
**Dvoudílný hyperboloid**



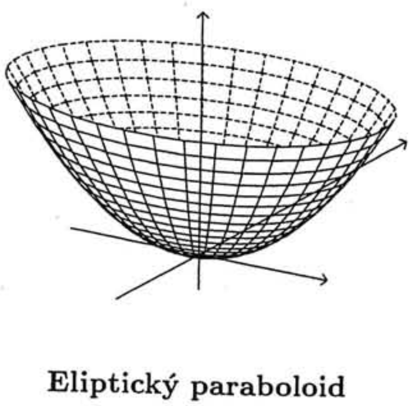
**Kužel**



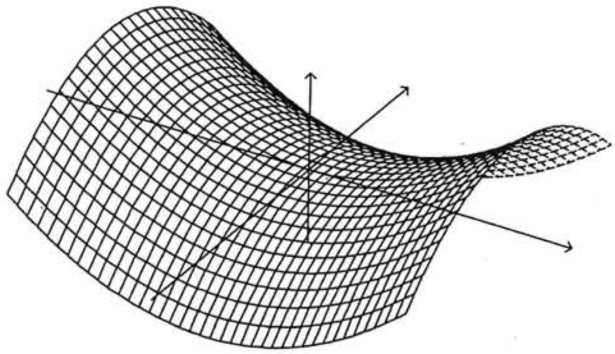
**Eliptický válec**



**Hyperbolický válec**



**Eliptický paraboloid**



**Hyperbolický paraboloid**