Přitom ale

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})] = F(b) - F(a).$$

Zjišťujeme tedy, že pro každé dělení $\mathscr{D}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ je $s(f, \mathscr{D}) \leq F(b) - F(a) \leq S(f, \mathscr{D})$. Jelikož f má na $\langle a, b\rangle$ Riemannův integrál, vidíme odtud, že $(\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, tj. platí rovnost (2.31). □

2.3.7 Poznámka. V tomto odstavci jsme ve značení rozlišovali mezi Newtonovým a Riemannovým integrálem. Dále budeme opět psát pouze $\int_a^b f(x)\,dx$, ať již se jedná o integrál Newtonův nebo Riemannův – věta 2.3.6 to umožňuje.

2.4 Konvergence integrálu

Při vyšetřování určitého integrálu je důležitá otázka existence a konečnosti integrálu. Pokud existuje integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ a je konečný, řekneme, že tento integrál *konverguje* nebo že funkce f je na intervalu (a, b) (resp. na $\langle a, b\rangle$) *integrovatelná* (zdůrazněme, že integrovatelnost tedy neznamená pouze existenci integrálu, ale také jeho konečnost). Pro jednoduchost se v tomto odstavci omezíme na případ spojitých funkcí. Pokud funkce má na daném intervalu určitý integrál, pak otázka konvergence pro nás bude mít smysl pouze pro Newtonův integrál, neboť Riemannův integrál (pokud existuje) je vždy konečný.

Jednoduchý je případ spojité funkce na uzavřeném omezeném intervalu. Z předchozího víme, že v tomto případě integrál existuje a je konečný.

Zajímavější bude případ intervalu otevřeného (resp. polouzavřeného); zvláště zajímavé budou případy neomezeného intervalu nebo neomezené funkce. V tomto případě obecně integrál ani nemusí existovat. Dokažme nejprve následující jednoduché, ale důležité tvrzení.

2.4.1 Věta. *Buď (a, b) interval (omezený nebo neomezený), f funkce spojitá na (a, b). Je-li $f(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje.*

DŮKAZ. Podle věty 2.3.4 f má na (a, b) primitivní funkci. Buď F primitivní funkce k f na (a, b). Potom na (a, b) je $F'(x) = f(x) \geq 0$, tj. F je na (a, b) neklesající. Odtud vidíme, že limity $\lim_{x\to a+} F(x)$, $\lim_{x\to b-} F(x)$ existují (viz větu 3.3.19 z M I). Nyní si stačí uvědomit, že rozdíl $\lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)$ má smysl, tj. nenastane případ $\infty - \infty$. Je ale zřejmé, že tyto limity nemohou být obě zároveň rovny $+\infty$ nebo obě rovny $-\infty$. Vzhledem k tomu, že F je neklesající, je totiž jistě $\lim_{x\to a+} F(x) \leq \lim_{x\to b-} F(x)$, přičemž rovnost zde může nastat pouze když F je na (a, b) konstantní – potom ale obě tyto limity jsou konečné (tento případ nastane pouze když $f \equiv 0$ na (a, b)). □

Je-li f funkce spojitá na otevřeném intervalu (a, b), pak na tomto intervalu integrál f nemusí existovat nebo nemusí být konečný. Je-li ale $\langle c, d\rangle$ libovolný uzavřený (omezený) interval takový, že $\langle c, d\rangle \subset (a, b)$, pak $\int_c^d f(x)\,dx$ konverguje. Vidíme tedy, že v tomto případě mohou „dělat potíže“ pouze krajní body intervalu. Ukážeme si jedno tvrzení poskytující nutnou a postačující podmínku konvergence integrálu za dané situace; toto tvrzení se někdy nazývá *Bolzano-Cauchyovo kritérium konvergence integrálu.* K tomu účelu budeme potřebovat tzv. Bolzano-Cauchyovu podmínku existence konečné limity funkce. Tuto podmínku (která je analogií Bolzano-Cauchyovy podmínky existence konečné limity posloupnosti – viz větu 1.4.8 z M I) jsme v M I explicite nevyslovili, vyslovme ji proto zde:

2.4.2 Věta. *Buď f (reálná) funkce definovaná na intervalu (a,b) $(a,b \in \overline{\mathbb{R}},\ a<b)$. Potom limita $\lim_{x\to b-} f(x)$ existuje a je konečná, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $b^* \in (a,b)$ tak, že pro každé $x,y \in (b^*,b)$ je $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Podobně pro limitu zprava a oboustrannou limitu.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že $\lim_{x\to b-} f(x) = c \in \mathbb{R}$ a buď $\varepsilon > 0$. Podle definice limity existuje potom $b^* \in (a,b)$ tak, že pro každé $x \in (b^*,b)$ je $|f(x)-c| < \varepsilon/2$. Je-li nyní $x,y \in (b^*,b)$, pak

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-c| + |c-f(y)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

tj. uvedená podmínka je splněna.

Nyní předpokládejme, že daná podmínka je splněna, buď $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost bodů $x_n \in (a,b)$, $x_n \to b$, a buď $\varepsilon > 0$. Potom tedy existuje $b^* \in (a,b)$ tak, že $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ pro každé $x,y \in (b^*,b)$. Jelikož $x_n \to b$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n > n_0$ je $x_n > b^*$ (a $x_n < b$, neboť podle předpokladu je $x_n \in (a,b)$). Je-li $m,n \in \mathbb{N}$, $m,n > n_0$, pak je tedy $|f(x_n)-f(y_n)| < \varepsilon$. Z věty 1.4.8 z MI plyne, že posloupnost $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní. Vidíme tedy, že je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost taková, že $x_n \in (a,b)$, $x_n \to b$, pak posloupnost $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní. K existenci a konečnosti limity $\lim_{x\to b-} f(x)$ nyní podle věty 3.2.10 z MI (viz též poznámku 3.2.12 z MI) stačí ukázat, že limity všech posloupností tvaru $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ jsou stejné (když $x_n \in (a,b)$, $x_n \to b$). To je ale již snadné. Buďte $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dvě posloupnosti bodů z (a,b), $x_n \to b$, $y_n \to b$, $f(x_n) \to c_1$, $f(y_n) \to c_2$. Potom je snadno vidět, že posloupnost

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots, x_n, y_n, \ldots$$

má také limitu b. Podle předchozího posloupnost

$$f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \ldots, f(x_n), f(y_n), \ldots$$

je konvergentní. Je-li c hodnota limity této posloupnosti, pak je $c_1 = c$, $c_2 = c$ (viz např. větu 1.4.3 z MI o limitě vybrané posloupnosti), tj. $c_1 = c_2$. □

2.4.3 Poznámka. Rozmyslete si, že z věty 2.4.2 a věty 2.2.7 plyne, že pokud (a,b) je otevřený *omezený* interval, f funkce spojitá na (a,b), pak f je možné spojitě rozšířit z (a,b) na $\langle a,b\rangle$, právě když f je na (a,b) stejnoměrně spojitá.

2.4.4 Věta. *Buď f funkce spojitá na intervalu $\langle a,b)$ $(a \in \mathbb{R},\ b \in \overline{\mathbb{R}},\ a<b)$. Potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $b^* \in (a,b)$ tak, že pro každé c,d takové, že $b^* < c < d < b$, je*

$$\left|\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon. \tag{2.32}$$

Podobně v případě intervalu tvaru $(a,b\rangle$ nebo (a,b).

DŮKAZ. Buď F primitivní funkce k f na $\langle a,b)$. Potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b-} F(x) - F(a)$$

pokud $\lim_{x\to b-} F(x)$ existuje a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když tato limita je konečná. Podle věty 2.4.2 $\lim_{x\to b-} F(x)$ existuje a je konečná, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $b^* \in (a,b)$ tak, že pro každé $c,d \in (b^*,b)$ je $|F(d) - F(c)| < \varepsilon$. Je-li zde navíc $c < d$, pak je ovšem

$$F(d) - F(c) = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$$

a vidíme, že tvrzení je dokázáno. Případ intervalu $(a,b\rangle$ nebo otevřeného intervalu (a,b) přenecháváme čtenáři. □

2.4.5. Řekneme, že funkce f je na intervalu (a,b) *absolutně integrovatelná* (nebo že integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *absolutně konverguje*), pokud f a zároveň $|f|$ je na (a,b) integrovatelná. Vztah mezi konvergencí a absolutní konvergencí integrálu spojité funkce je podobný vztahu mezi konvergencí a absolutní konvergencí číselných řad. Platí totiž následující tvrzení.

2.4.6 Věta. *Buď f funkce spojitá na intervalu (a,b). Je-li $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$, pak je f na (a,b) integrovatelná; platí potom*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{2.33}$$

DŮKAZ. Podle věty 2.4.1 integrál funkce $|f|$ jistě existuje (je zřejmé, že absolutní hodnota spojité funkce je spojitá). O nerovnosti (2.33) jsme se zmínili již v poznámce 2.2.14 – víme, že tato nerovnost platí, pokud oba integrály existují. Stačí tedy dokázat existenci integrálu funkce f na (a,b). Buď $\varepsilon > 0$. Jelikož $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$, podle věty 2.4.4 existují $a^*, b^* \in (a,b)$ tak, že

$$\int_c^d |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

kdykoli $a < c < d < a^*$ nebo $b^* < c < d < b$ (existence těchto integrálů je přitom zřejmá, neboť se jedná o integrály funkce spojité na uzavřeném omezeném intervalu $\langle c,d\rangle$). Protože $\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje, bude pro tato c,d

$$\left|\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_c^d |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Jelikož $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, z věty 2.4.4 vidíme, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ dokonce konverguje. □

Následující tvrzení je analogií srovnávacího kritéria pro nekonečné řady.

2.4.7 Věta. *Nechť f, g jsou funkce spojité na intervalu (a, b).*

(a) *Je-li g integrovatelná na (a, b), $|f(x)| \leq g(x)$ pro každé $x \in (a, b)$, pak f je absolutně integrovatelná na (a, b).*

(b) *Je-li $f(x) \geq g(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, g není integrovatelná na (a, b), pak také f není na (a, b) integrovatelná.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že $|f(x)| \leq g(x)$ na (a, b). Jelikož $|f|, g$ jsou nezáporné (a spojité), mají na (a, b) integrály. Přitom bude $\int_a^b |f(x)| \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx < +\infty$. Z věty 2.4.6 již vidíme, že f je na (a, b) absolutně integrovatelná. Platí tedy (a). Tvrzení (b) plyne z (a). $\square$

2.4.8 Důsledek. *Funkce spojitá a omezená na omezeném intervalu je zde absolutně integrovatelná.*

DŮKAZ. Nechť (a, b) je omezený interval, f funkce omezená na (a, b), $|f(x)| \leq c$ na (a, b) ($c \in \mathbb{R}$). Tvrzení nyní plyne z věty 2.4.7(a), neboť $\int_a^b c \, dx = c(b - a) < +\infty$. $\square$

Použití srovnávacího kritéria (tj. věty 2.4.7) pro konvergenci integrálu nemusí být vždy jednoduché, neboť je přitom potřeba provádět různé odhady. Zde často pomůže následující tvrzení, kterému můžeme říkat „limitní konvergenční kritérium“. Toto tvrzení přitom vystihuje skutečnost, že konvergence integrálu spojité funkce závisí pouze na chování funkce „poblíž krajních bodů“ intervalu (viz též větu 2.4.4).

2.4.9 Věta. *Buď f funkce spojitá na intervalu $\langle a, b)$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$), g buď funkce spojitá na $\langle a, b)$, a nechť existuje $c \in \langle a, b)$ tak, že $g(x) > 0$ na (c, b). Potom:*

(a) *Jestliže $\int_a^b g(x) \, dx$ konverguje a jestliže existuje **konečná** limita*

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)},$$

pak také $\int_a^b f(x) \, dx$ konverguje (a to absolutně).

(b) *Jestliže $\int_a^b g(x) \, dx$ nekonverguje a jestliže existuje **nenulová** limita*

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)},$$

pak $\int_a^b f(x) \, dx$ také nekonverguje.

(c) *Pokud existuje limita*

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

*a tato limita je **konečná a nenulová**, pak $\int_a^b f(x) \, dx$ konverguje, právě když konverguje $\int_a^b g(x) \, dx$.*

Podobně v případě intervalu tvaru $(a, b\rangle$.

DŮKAZ. Nechť
$$\lim_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)}=d\in\mathbb{R}$$
a předpokládejme, že $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Potom je
$$\lim_{x\to b-}\frac{|f(x)|}{g(x)}=|d|$$
a (podle definice limity funkce) existuje $c_1<b$, $c_1>c$, tak, že pro každé $x\in(c_1,b)$ je

$$(*)\qquad \frac{|f(x)|}{g(x)}\le |d|+1,\qquad \text{tj.}\qquad |f(x)|\le(|d|+1)g(x).$$

Jelikož $\int_{c_1}^b g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje (integrál $\int_a^{c_1} g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje (integrál funkce spojité na omezeném uzavřeném intervalu), integrál $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje podle předpokladu, a je $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{c_1} g(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c_1}^b g(x)\,\mathrm{d}x$ podle věty 2.1.5), je také $(|d|+1)g(x)$ integrovatelná na (c_1,b). Z věty 2.4.7 (a) a z $(*)$ nyní plyne, že $\int_{c_1}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je absolutně konvergentní. Jelikož f je absolutně integrovatelná na $\langle a,c_1\rangle$, vidíme již (opět použijeme větu 2.1.5), že f je absolutně integrovatelná na $\langle a,b)$. Dokázali jsme tak bod (a).

Předpokládejme nyní, že $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ nekonverguje. Uvědomíme si nejprve, že je potom

$$(**)\qquad \int\limits_{c_1}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x=+\infty$$

pro každé c_1, $c<c_1<b$. Je-li totiž $c<c_1<b$, pak je $g(x)>0$ na (c_1,b), takže $\int_{c_1}^b g(x)\,\mathrm{d}x$ existuje. Jelikož $\int_a^{c_1} g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje a $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ nikoli, platí nutně $(**)$ (stále používáme rovnost $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{c_1} g(x)\,\mathrm{d}x+\int_{c_1}^b g(x)\,\mathrm{d}x$ z věty 2.1.5; odtud je mimochodem vidět, že za daných předpokladů je také $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=+\infty$). Předpokládejme dále, že
$$\lim_{x\to b-}\frac{f(x)}{g(x)}=d\ne 0;$$
potom je
$$\lim_{x\to b-}\frac{|f(x)|}{g(x)}=|d|>0.$$
Předpokládejme navíc, že $|d|\ne+\infty$. Potom existuje $c_1<b$, $c_1>c$, tak, že pro každé $x\in(c_1,b)$ je
$$\frac{|f(x)|}{g(x)}\ge\frac{|d|}{2},\qquad \text{tj.}\qquad |f(x)|\ge\frac{|d|}{2}g(x).$$
Jelikož podle předchozího je $\int_{c_1}^b g(x)\,\mathrm{d}x=+\infty$, je také $\int_{c_1}^b|f(x)|\,\mathrm{d}x=+\infty$. Jelikož za daných předpokladů f na nějakém (levém) okolí b nemění znaménko, bude dokonce platit $\left|\int_{c_1}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|=+\infty$ (rozmyslete si!). Použijeme-li opět větu 2.1.5, pak vidíme, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nekonverguje (za daných předpokladů existuje, ale má nekonečnou hodnotu). Případ $|d|=+\infty$ je podobný a přenecháváme jej čtenáři. Dokázali jsme tak bod (b).

Bod (c) plyne okamžitě z bodů (a),(b). □

2.4.10 Příklad. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů:

$$\text{a)}\ \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2+1}}, \qquad \text{b)}\ \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{c)}\ \int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \quad (\alpha \in \mathbb{R}),$$

$$\text{d)}\ \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{e)}\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení

(a) Stačí si všimnout, že pro $x \in \langle 1, +\infty)$ platí nerovnost $x^3\sqrt{x^2+1} \geq x^3\sqrt{x^2} = x^4$, tj. $1/(x^3\sqrt{x^2+1}\,) \leq 1/x^4$ a

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2+1}} \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4} = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{x^3}\right]_1^{+\infty} < +\infty$$

(uvažovaný integrál přitom existuje, neboť integrujeme nezápornou funkci – viz větu 2.4.1), tj. daný integrál konverguje. Zde jsme použili srovnávací kritérium. Můžeme ale také použít limitního kritéria. Daná funkce je spojitá na $\langle 1, +\infty)$. Snadno spočteme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1/x^3\sqrt{x^2+1}}{1/x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1.$$

Jelikož

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4} = \left[\frac{-1}{3x^3}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{3}$$

(tj. $\int_1^{+\infty} (1/x^4)\,\mathrm{d}x$ konverguje), vidíme podle věty 2.4.9, že uvažovaný integrál konverguje.

(b) Integrovaná funkce je spojitá na $\langle 0, 1)$. Spočteme

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x/\sqrt{1-x^4}}{1/\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1-} x\,\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^4}} = \lim_{x\to 1-} x\,\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1+x^2)(1+x)(1-x)}} =$$
$$= \lim_{x\to 1-} \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)(1+x)}} = \frac{1}{2}.$$

Jelikož $\int_0^1 (1/\sqrt{1-x}\,)\,\mathrm{d}x$ konverguje (spočtěte tento integrál), vidíme již podle věty 2.4.9, že uvažovaný integrál konverguje.

(c) Daný integrál vždy existuje, neboť se jedná o integrál spojité nezáporné funkce. V případě $\alpha = 0$ se jedná o jednoduchý konvergentní integrál $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-x}]_0^{+\infty} = 1$.
V případě $\alpha \neq 0$ rozdělíme integraci na integrál na $(0,1)$ a na $(1, +\infty)$ – podle věty 2.1.5 je

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^\alpha \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

(je zřejmé, že výraz napravo má smysl). Nejprve si všimneme, že pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ je

$$(*) \qquad \int_1^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Integrovaná funkce je spojitá na $\langle 1, +\infty)$. Všimneme si, že (pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x/2}} = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x/2} = 0$$

(ověřte!). Jelikož

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x = \left[-2\mathrm{e}^{-x/2}\right]_1^{+\infty} = 2\mathrm{e}^{-1/2} < +\infty,$$

podle srovnávacího kritéria vidíme, že opravdu platí $(*)$.

Nyní je zřejmé, že uvažovaný integrál konverguje, právě když konverguje $\int_0^1 x^\alpha \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Funkce $x^\alpha \mathrm{e}^{-x}$ je spojitá na $(0, 1\rangle$. Jelikož

$$\lim_{x\to0+} \frac{x^\alpha \mathrm{e}^{-x}}{x^\alpha} = \lim_{x\to0+} \mathrm{e}^{-x} = 1$$

(tj. tato limita je konečná a nenulová), vidíme podle věty 2.4.9 (c), že $\int_0^1 x^\alpha \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje $\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x$. Vyšetřeme tedy konvergenci integrálu $\int_0^1 x^\alpha$.

Pro $\alpha = -1$ je

$$\int_0^1 x^{-1}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_0^1 = +\infty,$$

tj. pro $\alpha = -1$ daný integrál nekonverguje.

Pro $\alpha > -1$ je $\alpha + 1 > 0$ a

$$\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1} < +\infty,$$

tj. daný integrál konverguje.

Je-li $\alpha < -1$, pak $\alpha + 1 < 0$ a

$$\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}\left(1 - \lim_{x\to0+} x^{\alpha+1}\right) = +\infty,$$

tj. daný integrál nekonverguje.

Nakonec tedy vidíme, že uvažovaný integrál konverguje, právě když $\alpha > -1$.

(d) Ukažme, že daný integrál konverguje. Nejprve si všimneme, že pro $x \in \langle 0, \pi/2\rangle$ je $\sin x \geq (2/\pi)x$ (ověřte; nakreslete si graf funkcí $y = \sin x$ a $y = (2/\pi)x$; použijete konkávnost sinu). Pro $x \in (0, \pi/2\rangle$ je tedy

$$\ln(\sin x) \geq \ln(\tfrac{2}{\pi}x), \qquad \text{tj.} \qquad 0 \leq -\ln(\sin x) \leq -\ln(\tfrac{2}{\pi}x);$$

odtud

$$0 \leq -\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx \leq -\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\frac{2}{\pi}x)}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Dále je

$$\lim_{x\to 0+} x^{1/4}\ln(\tfrac{2}{\pi}x) = 0$$

(viz příklad 3.3.21 b) z M I). Existuje tedy $\delta > 0$, $\delta < \pi/2$, tak, že pro $x \in (0, \delta)$ je

$$-x^{1/4}\ln(\tfrac{2}{\pi}x) \leq 1.$$

Pro $x \in (0, \delta)$ je tedy

$$0 \leq -\frac{\ln(\frac{2}{\pi}x)}{\sqrt{x}} = -x^{1/4}\ln(\tfrac{2}{\pi}x)x^{-3/4} \leq x^{-3/4}$$

a odtud

$$0 \leq -\int_0^{\delta} \frac{\ln(\frac{2}{\pi}x)}{\sqrt{x}}\,dx \leq \int_0^{\delta} x^{-3/4}\,dx < +\infty$$

(viz předchozí příklad, kde jsme zjistili, že $\int_0^1 x^\alpha\,dx < +\infty$, právě když $\alpha > -1$). Jelikož $\int_\delta^{\pi/2} \ln(\frac{2}{\pi}x)/\sqrt{x}\,dx$ konverguje (integrál funkce spojité na uzavřeném omezeném intervalu), vidíme již, že daný integrál skutečně konverguje. Vyšetřete konvergenci tohoto integrálu pomocí limitního kritéria!

(e) Ukažme, že hodnota daného integrálu je rovna $+\infty$, tj. tento integrál nekonverguje. Jelikož integrovaná funkce je nezáporná a spojitá, daný integrál existuje. Je přitom

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$$

(rozmyslete si! – použije se zde pouze definice Newtonova integrálu). Speciálně je

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$$

(zde uvažujeme n celé, tj. jedná se o limitu posloupnosti, kdežto v předchozím jsme uvažovali $b \in \mathbb{R}$ a jednalo se o limitu funkce v proměnné b). Je přitom

$$\int_0^{n\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx,$$

takže podle předchozího

$$(*) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Pro $x \in \langle (k-1)\pi, k\pi \rangle$ je $1/x \geq 1/(k\pi)$ a tedy

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin^2 x}{x} \geq \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2k}$$

(viz třeba poznámku 2.1.17). Odtud a z $(*)$ již vidíme, že

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = +\infty.$$

Dále (viz poznámku 2.4.17) dokážeme divergenci daného integrálu podstatně jednodušeji. Budeme k tomu ovšem potřebovat tzv. Dirichletovo kritérium, které dokážeme za chvíli.

Než dokážeme Abelovo a Dirichletovo kritérium pro konvergenci integrálů, ukažme nejprve tzv. integrální věty o střední hodnotě. Omezíme se zde na případ funkcí spojitých na uzavřeném omezeném intervalu.

2.4.11 Věta (první věta o střední hodnotě integrálního počtu). *Nechť f, g jsou funkce spojité na uzavřeném omezeném intervalu $\langle a, b \rangle$, $g(x) \geq 0$ na $\langle a, b \rangle$. Potom existuje $\xi \in \langle a, b \rangle$ tak, že*

$$(2.34) \qquad \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

DŮKAZ. Nechť m je nejmenší, M největší hodnota, které f nabývá na $\langle a, b \rangle$ (podle věty 3.4.2 z MI, f těchto hodnot na $\langle a, b \rangle$ nabývá). Je tedy $m \leq f(x) \leq M$ na $\langle a, b \rangle$ a vzhledem k nezápornosti g je

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

na $\langle a, b \rangle$. Odtud

$$m \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

tj. existuje $\mu \in \langle m, M \rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jelikož f je spojitá, existuje $\xi \in \langle a, b \rangle$ tak, že $\mu = f(\xi)$ (viz větu 3.4.6 z MI); pro toto ξ tedy platí (2.34). □

2.4.12 Věta (druhá věta o střední hodnotě integrálního počtu). *Nechť f, g jsou funkce spojité na uzavřeném omezeném intervalu $\langle a, b\rangle$, $f(x) \geq 0$ na $\langle a, b\rangle$ a předpokládejme, že f je na $\langle a, b\rangle$ nerostoucí. Potom existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.35}$$

DŮKAZ. Předpokládejme navíc, že f je na $\langle a, b\rangle$ spojitě derivovatelná (tj. $f'(x)$ na $\langle a, b\rangle$ existuje a je zde spojitá). Potom pro vyjádření integrálu součinu fg můžeme použít metodu per partes. Buď G primitivní funkce ke G taková, že $G(a) = 0$ (tj. $G(t) = \int_a^t g(x)\,\mathrm{d}x$ na $\langle a, b\rangle$). Potom je

$$(*)\quad \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x)G(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,\mathrm{d}x = f(g)G(b) + \int_a^b (-f'(x))G(x)\,\mathrm{d}x.$$

Buď m nejmenší, M největší hodnota, které G nabývá na $\langle a, b\rangle$ (G je na $\langle a, b\rangle$ spojitá). Jelikož $f(b) \geq 0$ (podle předpokladu je $f(x) \geq 0$ na $\langle a, b\rangle$), je

$$mf(b) \leq f(b)G(b) \leq Mf(b).$$

Jelikož f je podle předpokladu nerostoucí, je $f'(x) \leq 0$ (tj. $(-f'(x)) \geq 0$) a tedy na $\langle a, b\rangle$ platí $m(-f'(x)) \leq (-f'(x))G(x) \leq M(-f'(x))$. Odtud

$$m\int_a^b (-f'(x))\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b (-f'(x))G(x)\,\mathrm{d}x \leq M\int_a^b (-f'(x))G(x)\,\mathrm{d}x.$$

Z $(*)$ nyní vidíme, že

$$m\Big(f(b) + \int_a^b (-f'(x))\,\mathrm{d}x\Big) \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M\Big(f(b) + \int_a^b (-f'(x))\,\mathrm{d}x\Big).$$

Přitom je ale

$$f(b) + \int_a^b (-f'(x))\,\mathrm{d}x = f(b) + \left[-f(x)\right]_a^b = f(b) + (-f(b) + f(a)) = f(a),$$

takže

$$mf(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq Mf(a),$$

odkud vidíme, že existuje $\mu \in \langle a, b\rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \mu f(a).$$

Jelikož G je spojitá, existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že $\mu = G(\xi) = \int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x$, tj. platí (2.35).

Dokázali jsme tak tvrzení za dodatečného předpokladu spojité derivovatelnosti funkce f. Bez tohoto předpokladu je důkaz složitější a nebudeme jej zde uvádět – čtenář může tento důkaz nalézt např. v Jarníkově učebnici [5]. □

2.4.13 Poznámka. V učebnicích integrálního počtu se může čtenář setkat s druhou větou o střední hodnotě formulovanou trochu obecněji. Vynechává se předpoklad nezápornosti f a dále se předpokládá pouze, že f je monotónní (tj. f může být neklesající nebo nerostoucí). Potom formule v této větě nemá tvar (2.35), ale existuje $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že platí

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pro naše účely však vystačíme s výše uvedenou formulací.

Nyní můžeme dokázat následující tvrzení.

2.4.14 Věta. *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, f, g jsou funkce spojité na $\langle a, b)$, $g(x) > 0$ na $\langle a, b)$ a dále nechť g je na $\langle a, b)$ nerostoucí. Potom platí:*

(a) ***Abelovo kritérium.*** *Jestliže $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak také $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.*

(b) ***Dirichletovo kritérium.*** *Má-li f primitivní funkci, která je na intervalu $\langle a, b)$ omezená, $\lim_{x\to b-} g(x) = 0$, pak integrál $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.*

DŮKAZ. (a) Použijeme větu 2.4.4. Buď $\varepsilon > 0$. Jelikož integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, existuje $b^* \in (a, b)$ tak, že pro každé $c, d \in (b^*, b)$, $c < d$, je

$$\left|\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{g(a)}$$

(podle předpokladu je $g(a) > 0$). Podle druhé věty o střední hodnotě integrálního počtu existuje $\xi \in \langle c, d\rangle$ tak, že

$$\int_c^d f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(c)\int_c^\xi f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Je $0 < g(c) \leq g(a)$ (g je nerostoucí) a podle předchozího $\left|\int_c^\xi f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon/g(a)$. Odtud již vidíme, že

$$\left|\int_c^d f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| = g(c)\left|\int_c^\xi f(x)\,\mathrm{d}x\right| < g(a)\frac{\varepsilon}{g(a)} = \varepsilon$$

kdykoli $c, d \in (b^*, b)$, $c < d$. Podle věty 2.4.4 to znamená, že integrál $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

(b) Buď F nějaká primitivní funkce k f na $\langle a, b)$ a buď $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, takové, že $|F(x)| \leq k$ na $\langle a, b)$ (je zřejmé, že je-li jedna primitivní funkce k f omezená, pak jsou omezené všechny). Použijeme opět větu 2.4.4 a druhou větu o střední hodnotě integrálního počtu. Buď $\varepsilon > 0$. Jelikož $\lim_{x\to b-} g(x) = 0$, existuje $b^* \in (a, b)$ tak, že pro každé $x \in (b^*, b)$

je $g(x) < \varepsilon/(2k)$ (přitom je $g(a) > 0$ podle předpokladu). Buďte $c, d \in (b^*, b)$, $c < d$. Potom existuje $\xi \in \langle c, d\rangle$ tak, že

$$\int\limits_c^d f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(c)\int\limits_c^\xi f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Přitom je

$$\left|\int\limits_c^\xi f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|[F(x)]_c^\xi\right| = |F(\xi) - F(c)| \leq 2k.$$

Odtud již

$$\left|\int\limits_c^d f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| = g(c)\left|\int\limits_c^\xi f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2k}2k = \varepsilon$$

a z věty 2.4.4 vidíme, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. □

2.4.15 Poznámka. Kdybychom v tvrzení (a) předpokládali, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje absolutně, byl by důkaz konvergence $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ za daných předpokladů jednoduchý a nepotřebovali bychom větu o střední hodnotě pro integrál. Potom by totiž bylo $|f(x)g(x)| \leq |f(x)|g(a)$, takže $\int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leq g(a)\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$ a uvažovaný integrál konverguje dokonce absolutně. Ve větě 2.4.14 je ovšem podstatné, že se obecně jedná o neabsolutní konvergenci.

Dále poznamenejme, že analogicky bychom mohli uvažovat případ intervalu tvaru $(a, b\rangle$ ($a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$). Potom by bylo potřeba předpokládat, že g je na $(a, b\rangle$ neklesající a místo o $\lim_{x\to b-} g(x)$ bychom mluvili o limitě $\lim_{x\to a+} g(x)$. Tento případ je ostatně možné převést na případ předchozí pomocí substituce $x = -t$ (rozmyslete si).

2.4.16 Příklad. Ukažte, že integrál

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

konverguje, ale nekonverguje absolutně.

Řešení. Na základě příkladu 2.4.10 e) můžeme snadno ukázat, že daný integrál nekonverguje absolutně. Podle tohoto příkladu je $\int_0^{+\infty} \sin^2 x/x\,\mathrm{d}x = +\infty$. Jelikož (pro $x \in \mathbb{R}$) je $|\sin x| \geq \sin^2 x$, dostáváme okamžitě

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

Ukažme, že daný integrál konverguje. Jelikož je $\lim_{x\to 0+} \sin x/x = 1$, je funkce $\sin x/x$ např. na intervalu $(0, 1\rangle$ omezená, takže $\int_0^1 \sin x/x\,\mathrm{d}x$ konverguje (dokonce absolutně – viz důsledek 2.4.8). Stačí ukázat, že $\sin x/x$ je integrovatelná na $\langle 1, +\infty)$. Zde můžeme použít Dirichletovo kritérium. Funkce $\sin x$ má totiž na $\langle 1, +\infty)$ omezenou primitivní funkci $(-\cos x)$, funkce $1/x$ je na $\langle 1, +\infty)$ spojitá, kladná, klesající, a je $\lim_{x\to+\infty} 1/x = 0$. Podle Dirichletova kritéria tedy opravdu integrál $\int_1^{+\infty} \sin x/x \,\mathrm{d}x$ konverguje. Poznamenejme, že je známo, že

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Tuto rovnost však zde nemáme možnost dokázat.

2.4.17 Poznámka. V příkladu 2.4.10 e) jsme ukázali, že

$$(*)\qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty,$$

ale důkaz byl relativně složitý. Použijeme-li Dirichletovo kritérium, můžeme nyní tuto rovnost dokázat jednodušeji. Jelikož je $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, můžeme psát

$$(**)\qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}\,\mathrm{d}x;$$

poslední rovnost platí ovšem za předpokladu, že výraz napravo má smysl. Je přitom

$$(***)\qquad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x} = +\infty.$$

Nyní stačí ukázat, že $\int_0^{+\infty} (\cos 2x/2x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Konvergenci tohoto integrálu lze ale dokázat úplně stejně, jako jsme dokázali konvergenci integrálu $\int_0^{+\infty} (\sin x/x)\,\mathrm{d}x$ v příkladu 2.4.16 a nebudeme to zde opakovat ($\cos 2x$ má omezenou primitivní funkci). Hodnota tohoto integrálu je tedy konečná. Jelikož platí $(***)$, dostáváme z $(**)$ okamžitě $(*)$.