Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

SEMINÁRNÍ PRÁCE Z INTEGRÁLNÍHO POČTU

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

2001/2002 **CIFRIK**

LHDR SHRNUTÍ:

$y'' - 3y' + 2y = 0$	$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$	$1, 2$	$Ce^x + De^{2x}$
$y'' - a^2 y = 0$	$\lambda^2 - a^2 = 0$	$a, -a$	$Ce^{ax} + De^{-ax}$
$y'' - ay' = 0$	$\lambda^2 - a\lambda = 0$	$a, 0$	$Ce^{ax} + D$
$y'' - 2ay' + a^2 y = 0$	$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = 0$	a, a	$Ce^{ax} + Dxe^{ax}$
$y'' = 0$	$\lambda^2 = 0$	$0, 0$	$C + Dx$
$y'' - 2y' + 2y = 0$	$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$	$1+i, 1-i$	$Ce^x \cos x + De^x \sin x$
$y'' + a^2 y = 0$	$\lambda^2 + a^2 = 0$	$ai, -ai$	$C\cos ax + D\sin ax$

LNDR s k.k. SHRNUTÍ:

Pravé strany	Řešení
$e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x)$ $\quad \alpha \neq 0 \neq \beta$	• $\alpha \pm i\beta$ není char. kořen $e^{\alpha x}(R(x)\cos\beta x + S(x)\sin\beta x)$ • $\alpha \pm i\beta$ je char. kořen $e^{\alpha x}(R(x)\cos\beta x + S(x)\sin\beta x)x$
$P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x$ $\quad \beta \neq 0$	• $\pm i\beta$ není char. kořenem $R(x)\cos\beta x + S(x)\sin\beta x$ • $\pm i\beta$ je char. kořen $(R(x)\cos\beta x + S(x)\sin\beta x)x$
$P(x)e^{\alpha x}$ $\quad \alpha \neq 0$	• α není char. kořenem $R(x)e^{\alpha x}$ • α je jednoduchý char. kořen $R(x)e^{\alpha x}x$ • α je dvojnásobný char. kořen $R(x)e^{\alpha x}x^2$
$P(x)$ $\quad \alpha = 0 = \beta$	• 0 není char. kořenem $R(x)$ • 0 je jednoduchý char. kořen $R(x)x$ • 0 je dvojnásobný char. kořen $R(x)x^2$

Zadání:

1. Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' + y\cos x = \cos^3 x$.

Vypracování:

Řešíme homogenní rovnici (rovnici bez pravé strany)

$$y' + y\cos x = 0 \quad \Big| \cdot \frac{dx}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = -\cos x dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \cos x dx$$

$$\ln|y| = -\sin x + c$$

$$|y| = Ce^{-\sin x}$$

Tuto rovnici derivujeme:

$$y' = C'e^{-\sin x} + Ce^{-\sin x}(-\cos x) = C'e^{-\sin x} - C\cos x e^{-\sin x}.$$

Dosadíme do rovnice dané:

$$C'e^{-\sin x} - C\cos x e^{-\sin x} + Ce^{-\sin x}\cos x = \cos^3 x$$

$$C'e^{-\sin x} = \cos^3 x$$

$$C' = \cos^3 x e^{\sin x}$$

$$C = \int \cos^3 x e^{\sin x} dx =$$

$$\begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{bmatrix}$$

$$= \int (1-t^2) e^t dt =$$

$$\begin{bmatrix} u = 1-t^2 & v' = e^t \\ u' = -2t & v = e^t \end{bmatrix}$$

$$= (1-t^2)e^t - \int -2te^t dt = (1-t^2)e^t + 2\int te^t dt =$$

$$\begin{bmatrix} v = t & u' = e^t \\ v' = 1 & u = e^t \end{bmatrix}$$

$$= (1-t^2)e^t + 2\left(te^t - \int e^t dt\right) = (1-t^2)e^t + 2te^t - 2e^t =$$

$$= -e^t(t-1)^2 = \underline{-e^{\sin x}(\sin x - 1)^2 + D}$$

Dosazením funkce C do rovnice

$$y = Ce^{-\sin x}$$

dostaneme řešení dané rovnice:

$$y = \left(D - e^{\sin x}(\sin x - 1)^2\right)\cdot e^{-\sin x} = \underline{\underline{De^{-\sin x} - (\sin x - 1)^2}}$$

Zadání:

2. Určete obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' - \frac{3y}{x^2 - 5x + 4} = \sqrt{x-4}\,.$$

Vypracování:

Postupně vypočteme homogenní a poté nehomogenní rovnici.

Homogenní rovnice:

$$y' = \frac{3y}{x^2 - 5x + 4}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x^2 - 5x + 4}$$

$$\ln|y_H| = \int \frac{3}{(x-4)(x-1)}dx =$$

$$\left[\begin{array}{c} \dfrac{3}{(x-4)(x-1)} = \dfrac{A}{x-4} + \dfrac{B}{x-1} \\ 3 = x(A+B) - (A+4B) \\ \hline 0 = A + B \\ 3 = -A - 4B \\ \hline A = 1 \quad B = -1 \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{1}{x-4}dx - \int \frac{1}{x-1}dx$$

$$\ln|y_H| = \ln\frac{x-4}{x-1} + \ln c_1$$

$$\underline{y_H = \frac{x-4}{x-1}c_1}$$

Nehomogenní rovnice:

$$y_N = \frac{x-4}{x-1}c_1(x)$$

$$c_1'(x)\frac{x-4}{x-1} = \sqrt{x-4}$$

$$c_1'(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x-4}}{x-4}$$

$$c_1(x) = \int \frac{(x-1)\sqrt{x-4}}{x-4}dx =$$

$$\left[\begin{array}{c} x - 4 = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{t(t^2+3)}{t^2}tdt = \int (2t^2 + 6)dt = \frac{2t^3}{3} + 6t =$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{x-4}\right)^3}{3} + 6\sqrt{x-4} + c_2$$

$$y_N = \frac{x-4}{x-1}\left(\frac{2\left(\sqrt{x-4}\right)^3}{3} + 6\sqrt{x-4} + c_2\right)$$

$$\underline{y_N = \frac{(x-4)\left(2(x+5)\sqrt{x-4} + 3c_2\right)}{3(x-1)}}$$

Řešení:

$$y = y_H + y_N = \frac{x-4}{x-1}c_1 + \frac{(x-4)\left(2(x+5)\sqrt{x-4} + 3c_2\right)}{3(x-1)} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{(x-4)\left(2(x+5)\sqrt{x-4} + C\right)}{3(x-1)}}}$$

Zadání:

3. Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' + \frac{x-3}{x^2-1}y = (x-1)\sin x$.

Vypracování:

Homogenní rovnice

$$y' + \frac{x-3}{x^2-1}y = 0$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x-3}{x^2-1}$$

$$\ln y = \int \frac{3-x}{x^2-1}dx =$$

$$\left[\begin{array}{c} \frac{3-x}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \\ \hline A+B=-1 \\ A-B=3 \\ \hline A=1 \quad B=-2 \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{1}{x-1}dx - 2\int \frac{1}{x+1}dx = \ln\frac{x-1}{(x+1)^2} + \ln C$$

$$y = \frac{x-1}{(x+1)^2}C$$

Výpočet C z nehomogenní rovnice

$$C'\frac{x-1}{(x+1)^2} = (x-1)\sin x$$

$$C' = (x+1)^2 \sin x$$

$$C = \int (x+1)^2 \sin x\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{ll} u = (x+1)^2 & v' = \sin x \\ u' = 2(x+1) & v = -\cos x \end{array}\right]$$

$$= -(x+1)^2\cos x + 2\int (x+1)\cos x dx =$$

$$\left[\begin{array}{ll} u = x+1 & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array}\right]$$

$$= -(x+1)^2\cos x + 2\left((x+1)\sin x - \int \sin x dx\right) =$$

$$= 2(x+1)\sin x - \left(x^2+2x-1\right)\cos x + D$$

Řešení:

$$\underline{\underline{y = \frac{x-1}{(x+1)^2}\left(2(x+1)\sin x - \left(x^2+2x-1\right)\cos x + D\right).}}$$

Zadání:

4. Určete obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}.$$

Vypracování:

- Charakteristická rovnice

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2\lambda + 1 &= 0 \\ \lambda_{12} &= 1 \end{aligned}.$$

- Homogenní rovnice

$$y_H = Ce^x + Dxe^x.$$

- Nehomogenní rovnice

$$\begin{aligned} C'e^x + D'xe^x &= 0 \\ C'e^x + D'e^x + D'xe^x &= \frac{e^x}{x^2+1} \\ \hline D'e^x &= \frac{e^x}{x^2+1} \\ D &= \int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x \\ C'e^x + \frac{e^x}{x^2+1}x &= 0 \\ C &= -\int \frac{x}{x^2+1}dx = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) \\ \hline y_N &= xe^x \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) \end{aligned}$$

- Řešení:

$$y = y_H + y_N = \underline{\underline{Ce^x + Dxe^x + xe^x \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)}}$$

Zadání:

5. Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + 4y = \dfrac{2}{\sin x \cos x}$.

Vypracování:

- Charakteristické kořeny $\lambda_{12} = \pm 2i$.
- Homogenní rovnice $y_H = A\cos 2x + B\sin 2x$.
- Nehomogenní rovnice

$$A'\cos 2x + B'\sin 2x = 0 \quad \Big| \cdot \sin 2x$$

$$-A'2\sin 2x + B'2\cos 2x = \frac{2}{\sin x \cos x} \quad \Big| \cdot \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$B'\left(\sin^2 2x + \cos^2 2x\right) = \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x}$$

$$B = \int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} dx = \ln\left|\sin 2x\right| + c_1$$

$$A'\cos 2x = -B'\sin 2x = -\frac{\cos 2x \sin 2x}{\sin x \cos x} = -2\cos 2x$$

$$A' = -2$$

$$A = -2x + c_2$$

$$y_N = -2x\cos 2x + \ln\left|\sin 2x\right| \cdot \sin 2x$$

- Řešení

$$y = y_H + y_N = \underline{\underline{A\cos 2x + B\sin 2x - 2x\cos 2x + \ln\left|\sin 2x\right| \cdot \sin 2x}}.$$ [1]

[1] konstanty c_1, c_2 jsou zahrnuty v konstantách A, B

Zadání:

6. Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 2y' = x^2 - x + 2$.

Vypracování:

- Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$
$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 0 .$$

- Homogenní rovnice

$$y_H = Ae^{2x} + B .$$

- Nehomogenní rovnice

Protože 0 je jednoduchý charakteristický kořen, předpokládejme řešení[2]

$$y_N = \left(Cx^2 + Dx + E\right)x$$

derivujme

$$y_N' = 3Cx^2 + 2Dx + E$$
$$y_N'' = 6Cx + 2D$$

a dosaďme do zadání

$$6Cx + 2D - 2\left(3Cx^2 + 2Dx + E\right) = x^2 - x + 2$$

$$-6C = 1$$
$$6C - 4D = -1$$
$$2D - 2E = 2$$

$$C = -\frac{1}{6} \quad D = 0 \quad E = -1$$

tedy

$$y_N = -\frac{x^3}{6} - x .$$

- Řešení rovnice

$$y = y_H + y_N = \underline{\underline{Ae^{2x} + B - \frac{x^3}{6} - x}}$$

[2] viz. tabulka LNDR s k.k. SHRNUTÍ

Zadání:

7. Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' + y = x^2 e^x$.

Vypracování:

- Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ má dvojnásobný kořen $\lambda_{12} = -1$.
- Homogenní rovnice $y_H = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$.
- Nehomogenní rovnice:

Kořen $\alpha + i\beta$ pravé strany rovnice není charakteristický ($\alpha = 1,\ \beta = 0,\ P(x) = x^2$), tj. $k = 0$. Proto

$$y_N = (Cx^2 + Dx + E)e^x$$
$$y'_N = (2Cx + D)e^x + y_N$$
$$y''_N = 2Ce^x + (2Cx + D)e^x + y'_N$$

a po dosazení do zadání

$$2Ce^x + 4(2Cx + D)e^x + 4(Cx^2 + Dx + E)e^x = x^2 e^x .$$

dojdeme k soustavě rovnic

$$4C = 1$$
$$8C + 4D = 0$$
$$2C + 4D + 4E = 0$$

která má řešení

$$C = \frac{1}{4} \quad D = -\frac{1}{2} \quad E = \frac{3}{8}.$$

Nehomogenní rovnice má proto tvar $y_N = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}\right)e^x$.

- Řešení rovnice

$$y = y_H + y_N = \underline{\underline{Ae^{-x} + Bxe^{-x} + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}\right)e^x}}$$

Zadání:

8. Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - 2y' + 2y = 5x\cos x$.

Vypracování:

- Kořeny charakteristické rovnice $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ jsou $\lambda_{12} = 1 \pm i$.
- Homogenní rovnice má tedy tvar $y_H = Ae^x \cos x + Be^x \sin x$.
- Nehomogenní rovnice:

Kořen $\alpha + i\beta$ pravé strany rovnice není charakteristický ($\alpha = 0,\ \beta = 1,\ P(x) = 5x$), tj. $k = 0$. Proto

$$
\begin{aligned}
y_N &= (Cx + D)\cos x + (Ex + F)\sin x \\
y'_N &= -(Cx + D)\sin x + C\cos x + (Ex + F)\cos x + E\sin x \\
y''_N &= -(Cx + D)\cos x - (Ex + F)\sin x - 2C\sin x + 2E\cos x
\end{aligned}
$$

a po dosazení do zadání

$$
\begin{aligned}
&-(Cx + D)\cos x - (Ex + F)\sin x - 2C\sin x + 2E\cos x + 2(Cx + D)\sin x - \\
&-2C\cos x - 2(Ex + F)\cos x - 2E\sin x + 2(Cx + D)\cos x + 2(Ex + F)\sin x = 5x\cos x
\end{aligned}
$$

Porovnáním členů

$$
\begin{aligned}
\cos x:&\quad Cx - 2Ex - 2C + D + 2E - 2F = 5x \\
\sin x:&\quad 2Cx + Ex - 2C + 2D - 2E + F = 0
\end{aligned}
$$

dojdeme k soustavě rovnic

$$
\begin{aligned}
C - 2E &= 5 \\
-2C + D + 2E - 2F &= 0 \\
2C + E &= 0 \\
-2C + 2D - 2E + F &= 0
\end{aligned}
$$

která má řešení

$$C = 1 \quad D = \frac{2}{5} \quad E = -2 \quad F = -\frac{14}{5}.$$

Nehomogenní rovnice má proto tvar $y_N = \left(x + \frac{2}{5}\right)\cos x - \left(2x + \frac{14}{5}\right)\sin x$.

- Řešení rovnice

$$y = y_H + y_N = \underline{\underline{Ae^x \cos x + Be^x \sin x + \left(x + \frac{2}{5}\right)\cos x - \left(2x + \frac{14}{5}\right)\sin x}}.$$