Mocninné řady

Rozviňte funkci v mocninnou řadu se středem v $b = -1$ a určete interval, na kterém rovnost platí

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2+x}$$

Řešení

$$\mathrm{f}(x) = (2+x)^{-1}$$

Výraz rozdělíme na

$$\mathrm{f}(x) = (1 + (x+1))^{-1}$$

$$\mathrm{f}(x) = (1 + (x+1))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} (x+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n$$

Využili jsme přitom toho, že

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{n!} = \frac{(-1)^n\, n!}{n!} = (-1)^n$$

Vypočítáme poloměr konvergence

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{-1} \right| = 1$$

Víme tedy, že pro $x \in (-2, 0)$ řada absolutně konverguje a rovnost

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n$$

zde platí.

Vyšetříme ještě krajní body intervalu

$x = -2$: funkce $\frac{1}{2+x}$ zde není definována

$x = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (0+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1)^n$$

Řada střídá znaménka, proto použijeme Leibnizovo kritérium

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1 \neq 0$$

První podmínka Leibnizova kritéria není splněna, proto řada v bodě $x = 0$ diverguje.

Rovnost

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n$$

tedy platí na intervalu $x \in (-2, 0)$