Mocninné řady

Rozviňte funkci v mocninnou řadu a určete interval, na kterém rovnost platí

$$\mathrm{f}(x) = x\ln\left(3x+\sqrt{1+9x^2}\right) - \frac{1}{3}\sqrt{1+9x^2}$$

Řešení

$$\mathrm{f}(x) = x\ln\left(3x+\sqrt{1+9x^2}\right) - \frac{1}{3}\sqrt{1+9x^2}$$

Nejdříve funkci zderivujeme

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}'(x) &= \ln\left(3x+\sqrt{1+9x^2}\right) + x\frac{1}{3x+\sqrt{1+9x^2}}\left(3+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+9x^2}}18x\right) - \frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{1+9x^2}}18x \\
&= \ln\left(3x+\sqrt{1+9x^2}\right) + \frac{x}{3x+\sqrt{1+9x^2}}\frac{6\left(3x+\sqrt{1+9x^2}\right)}{2\sqrt{1+9x^2}} - \frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}} \\
&= \ln\left(3x+\sqrt{1+9x^2}\right) + \frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}} - \frac{3x}{\sqrt{1+9x^2}} \\
&= \ln\left(3x+\sqrt{1+9x^2}\right)
\end{aligned}$$

Zderivujeme podruhé

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}''(x) &= \frac{1}{3x+\sqrt{1+9x^2}}\left(3+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+9x^2}}18x\right) \\
&= \frac{1}{3x+\sqrt{1+9x^2}}\frac{6(3x+\sqrt{1+9x^2})}{2\sqrt{1+9x^2}} \\
&= \frac{3}{\sqrt{1+9x^2}}
\end{aligned}$$

Nyní převedeme $\mathrm{f}''(x)$ na řadu

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}''(x) &= 3\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}3^{2n}x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}3^{2n+1}x^{2n}
\end{aligned}$$

Využili jsme přitom toho, že

$$\begin{aligned}
\binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)^n\frac{(2n-1)!!}{n!} \\
&= (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}
\end{aligned}$$

Dále řadu dvakrát integrujeme

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}3^{2n+1}x^{2n} \\
\mathrm{f}'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}3^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{f}'(0) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}3^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ln\left(3\cdot 0 + \sqrt{1+0}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}3^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
\mathrm{f}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}3^{2n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} + \mathrm{f}(0) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}3^{2n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} + 0\cdot\ln\left(3\cdot 0 + \sqrt{1+0}\right) - \frac{1}{3}\sqrt{1+0} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}3^{2n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Vypočítáme poloměr konvergence

$$\begin{aligned}
r_1 &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\frac{(2n-1)!!3^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)(2n+2)}}{(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!!3^{2n+3}}{(2n+2)!!(2n+3)(2n+4)}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!3^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)(2n+2)}\frac{(2n+2)!!(2n+3)(2n+4)}{(2n+1)!!3^{2n+3}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)(2n+4)}{9(2n+1)^2} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+14n+12}{9(4n^2+4n+1)} = \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^{2n+2}}{x^{2n}}\right| = \left|x^2\right| &< r_1 \\
|x| &< \frac{1}{3} = r
\end{aligned}$$

Vyšetříme krajní body intervalu

Zaprvé krajní bod $x = \frac{1}{3}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}3^{2n+1}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{1}{3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{1}{3}$$

Řada střídá znaménka, proto použijeme Leibnizovo kritérium

Nejdříve zjistíme zda platí: $a_n \geq a_{n+1}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} &\geq \frac{1}{3}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\frac{1}{(2n+3)(2n+4)} \\
\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} &\geq \frac{2n+1}{(2n+2)(2n+3)(2n+4)} \\
(2n+3)(2n+4) &\geq (2n+1)^2 \\
4n^2+14n+12 &\geq 4n^2+4n+1 \\
10n &\geq -11 \\
n &\geq -\frac{11}{10}
\end{aligned}$$

A nyní zda platí: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)!!}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \\
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \\
0 &\leq \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \leq 0
\end{aligned}$$

Z toho vyplývá že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 0$ a obě podmínky Leibnizova kritéria jsou tím splněny, proto řada v bodě $x = \frac{1}{3}$ konverguje.

Dále zjistíme zda konverguje i pro $x = -\frac{1}{3}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}3^{2n+1}\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{1}{3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{1}{3}$$

Výsledek je tedy stejný jako pro bod $x = \frac{1}{3}$, a proto můžeme říci, že konverguje i pro $x = -\frac{1}{3}$.

Rovnost:

$$\mathrm{f}(x) = x\ln\left(3x + \sqrt{1+9x^2}\right) - \frac{1}{3}\sqrt{1+9x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}3^{2n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{1}{3}$$

tedy platí na intervalu $x \in \langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\rangle$