# Mocninné řady

Rozviňte funkci v mocninnou řadu a určete interval, na kterém rovnost platí

$$\mathrm{f}(x) = \ln\left(\frac{1}{4} + x^2\right)$$

## Řešení

$$\mathrm{f}(x) = \ln\left(\frac{1}{4} + x^2\right)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}'(x) &= \frac{2x}{\frac{1}{4} + x^2} = \frac{8x}{1 + 4x^2} \\
&= 8x(1 + 4x^2)^{-1} \\
&= 8x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} \left(4x^2\right)^n \\
&= 2^3 x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n} x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n+3} x^{2n+1}
\end{aligned}$$

Využili jsme přitom toho, že

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{n!} = \frac{(-1)^n\, n!}{n!} = (-1)^n$$

Derivaci mocninné řady zintegrujeme

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n+3} x^{2n+1} \\
\mathrm{f}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n+3} \frac{x^{2n+2}}{2n+2} + \mathrm{f}(0) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n+3} \frac{x^{2n+2}}{2n+2} + \ln\left(\frac{1}{4} + 0\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n+3} \frac{x^{2n+2}}{2n+2} - 2\ln 2
\end{aligned}$$

Vypočítáme poloměr konvergence

$$\begin{aligned}
r_1 &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n \frac{2^{2n+3}}{2n+2}}{(-1)^{n+1} \frac{2^{2n+5}}{2n+4}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+4}{8n+8} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^{2n+4}}{x^{2n+2}}\right| = |x|^2 &< r_1 = \frac{1}{4} \\ |x| &< \frac{1}{2} = r\end{aligned}$$

Víme tedy, že pro $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ řada absolutně konverguje a rovnost

$$\mathrm{f}(x) = \ln\left(\frac{1}{4} + x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n+3}}{2n+2} x^{2n+2} - 2\ln 2$$

zde platí.

Vyšetříme ještě krajní body intervalu

$x = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n+3}}{2n+2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - 2\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n+3}}{2^{2n+2}(2n+2)} - 2\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1} - 2\ln 2$$

Řada střídá znaménka, proto použijeme Leibnizovo kritérium

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} &\geq \frac{1}{n+2} \\ n+2 &\geq n+1 \\ 2 &\geq 1 \quad \forall n\end{aligned}$$

Obě podmínky Leibnizova kritéria jsou splněny, proto řada v bodě $x = \frac{1}{2}$ konverguje.

$x = -\frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n+3}}{2n+2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - 2\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1} - 2\ln 2$$

Řada je stejná jako v bodě $x = \frac{1}{2}$, bude tedy v bodě $x = -\frac{1}{2}$ konvergovat.

Rovnost

$$\mathrm{f}(x) = \ln\left(\frac{1}{4} + x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n+3}}{2n+2} x^{2n+2} - 2\ln 2$$

tedy platí pro $x \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$