Mocninné řady

Rozviňte funkci v mocninnou řadu a určete interval, na kterém rovnost platí

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}\operatorname{arctg} 2x^2$$

Řešení

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}\operatorname{arctg} 2x^2$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}'(x) &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\frac{x}{1+(2x^2)^2} = \frac{1}{4}x - \frac{x}{4+16x^4} = \frac{x^5}{1+4x^4} = \\
&= x^5(1+4x^4)^{-1} = x^5\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}(4x^4)^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{4n+5}
\end{aligned}$$

Využili jsme přitom toho, že

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{n!} = \frac{(-1)^n\, n!}{n!} = (-1)^n$$

Derivaci funkce zintegrujeme

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{4n+5} \\
\mathrm{f}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n \frac{x^{4n+6}}{4n+6} + \mathrm{f}(0) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n}{4n+6}x^{4n+6}
\end{aligned}$$

Vypočítáme poloměr konvergence

$$r_1 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\frac{4^n}{4n+6}}{(-1)^{n+1}\frac{4^{n+1}}{4(n+1)+6}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n 4^n}{4n+6}\frac{4n+10}{(-1)^{n+1}4^n 4}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{4n+10}{4(4n+6)}\right| = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^{4(n+1)+6}}{x^{4n+6}}\right| = \left|\frac{x^{4n+10}}{x^{4n+6}}\right| = \left|x^4\right| < r_1 \quad \Rightarrow \quad |x| &< \sqrt[4]{r_1} \\
|x| &< \frac{1}{\sqrt[4]{4}} \\
|x| &< \frac{1}{\sqrt{2}} = r
\end{aligned}$$

Víme tedy, že pro $\forall x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ řada absolutně konverguje a rovnost

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}\operatorname{arctg} 2x^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n}{4n+6}x^{4n+6}$$

zde platí.

Vyšetříme ještě krajní body intervalu

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n}{4n+6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n+6} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n 4^{-n}}{2^3(4n+6)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{8(4n+6)}$$

Řada střídá znaménka, proto použijeme Leibnizovo kritérium

$$a_n = \frac{1}{8(4n+6)}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{8(4n+6)} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}\frac{1}{4n+6} &\geq \frac{1}{8}\frac{1}{4(n+1)+6} \\ 4n+10 &\geq 4n+6 \\ 10 &\geq 6 \quad \forall n \end{aligned}$$

Obě podmínky Leibnizova kritéria jsou splněny, proto řada v bodě $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ konverguje.

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n}{4n+6}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4n+6} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n}{4n+6}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2(2n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n}{4n+6}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n}{2^3(4n+6)}4^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{8(4n+6)} \end{aligned}$$

Řada střídá znaménka, proto použijeme Leibnizovo kritérium

$$a_n = \frac{1}{8(4n+6)}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{8(4n+6)} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}\frac{1}{4n+6} &\geq \frac{1}{8}\frac{1}{4(n+1)+6} \\ 4n+10 &\geq 4n+6 \\ 10 &\geq 6 \quad \forall n \end{aligned}$$

Obě podmínky Leibnizova kritéria jsou splněny, proto řada v bodě $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ konverguje.

Rovnost
$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}\operatorname{arctg} 2x^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{4^n}{4n+6}x^{4n+6}$$
tedy platí na intervalu $x \in \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$