Mocninné řady

Rozviňte funkci v mocninnou řadu a určete interval, na kterém rovnost platí

$$\mathrm{f}(x) = \operatorname{argsinh}\left(2\left(x+1\right)\right) \quad \text{(střed v } b=-1\text{)}$$

Řešení

$$\mathrm{f}(x) = \operatorname{argsinh}\left(2\left(x+1\right)\right) \quad \text{(střed v } b=-1\text{)}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+4\left(x+1\right)^2}}\left(2\left(x+1\right)\right)' = \\
&= \frac{2}{\sqrt{1+4\left(x+1\right)^2}} = \\
&= 2(1+4\left(x+1\right)^2)^{-\frac{1}{2}} = \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(4\left(x+1\right)^2\right)^n = \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}4^n\left(x+1\right)^{2n} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!2^{2n+1}}{(2n)!!}\left(x+1\right)^{2n}
\end{aligned}$$

Využili jsme přitom toho, že

$$\begin{aligned}
\binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} = \\
&= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\dots\left(-n+\frac{1}{2}\right)}{n!} = \\
&= (-1)^n\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\overbrace{\left(n-\frac{1}{2}\right)}^{\frac{2n-1}{2}}}{n!} = \\
&= (-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1\cdot3\cdot5\dots(2n-1)}{n!} = \\
&= (-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\dots(2n-1)}{2^n n!} = \\
&= (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}
\end{aligned}$$

Derivaci mocninné řady zintegrujeme

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!2^{2n+1}}{(2n)!!}(x+1)^{2n} \\
\mathrm{f}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!2^{2n+1}}{(2n)!!}\cdot\frac{(x+1)^{2n+1}}{(2n+1)}+\mathrm{f}(-1)= \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!2^{2n+1}}{(2n)!!}\cdot\frac{(x+1)^{2n+1}}{(2n+1)}+\operatorname{argsinh}(2(-1+1))= \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!2^{2n+1}}{(2n)!!}\cdot\frac{(x+1)^{2n+1}}{(2n+1)}+\overbrace{\operatorname{argsinh}0}^{=0}
\end{aligned}$$

Vypočítáme r_1 (pro určení poloměru konvergence)

$$\begin{aligned}
r_1 &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n(2n-1)!!2^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!!}}{\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!!2^{2n+3}}{(2n+3)(2n+2)!!}}\right|= \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(2n-1)!!2^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!!}\cdot\frac{(2n+3)(2n+2)!!}{(-1)^{n+1}(2n+1)!!2^{2n+3}}\right|= \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2(2n+3)(2n+2)}{(-8)(2n+1)^2}\right|= \\
&= \left|-\frac{2}{8}\right|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)^2}\right|= \\
&= \left|-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Zjistíme poloměr konvergence

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(x+1)^{2n+3}}{(x+1)^{2n+1}}\right| = \left|(x+1)^2\right| &< r_1=\frac{1}{4} \\
|x+1| &< \sqrt{r_1}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}=r \\
x &\in \left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Víme tedy, že pro $x\in\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ řada absolutně konverguje a rovnost

$$\mathrm{f}(x)=\operatorname{argsinh}(2(x+1))=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!2^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}(x+1)^{2n+1}$$

zde platí.

Vyšetříme krajní body intervalu

$x = -\frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}\left(-\frac{3}{2}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!2^{2n+1}}{(2n)!!} \cdot \frac{\left(-\frac{3}{2}+1\right)^{2n+1}}{(2n+1)} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!2^{2n+1}}{(2n)!!} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!2^{2n+1}}{(2n)!!} \cdot \frac{(-1)^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!2^{2n+1}}{(2n)!!} \cdot \frac{(-1)^{2n}(-1)}{2^{2n+1}(2n+1)} = \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(2n+1)}
\end{aligned}$$

Řada střídá znaménka, proto použijeme Leibnizovo kritérium

$$a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\,(2n)!!}$$

$a_n \stackrel{?}{\to} 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\,(2n)!!} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}
\end{aligned}$$

Vyřešíme jednotlivé limity

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \stackrel{?}{=} 0$$

Například pro $n = 5$:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{35}{128} \cdot \frac{63}{256}$$

Násobíme pořád jen čísly menšími než jedna, takže pro čím dál vyšší n výsledné číslo jen zmenšujeme, tím pádem jde limita k nule. Protože obě dílčí limity jdou k nule, jde k nule i součin těchto limit a podmínka $a_n \to 0$ platí.

$a_n \overset{?}{\geq} a_n + 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\,(2n)!!} &\geq \frac{(2n+1)!!}{(2n+3)\,(2n+2)!!} \\
\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\,(2n)!!} &\geq \frac{(2n+1)\,(2n-1)!!}{(2n+3)\,(2n+2)\,(2n)!!} \quad / : (2n-1)!! \quad / \cdot (2n)!! \\
\frac{1}{(2n+1)} &\geq \frac{(2n+1)}{(2n+3)\,(2n+2)} \quad / \cdot (2n+1) \quad / \cdot (2n+3) \cdot (2n+2) \\
(2n+3)\,(2n+2) &\geq (2n+1)^2 \\
4n^2 + 10n + 6 &\geq 4n^2 + 4n + 1 \\
n &\geq -\frac{5}{6}
\end{aligned}$$

Obě podmínky Leibnizova kritéria jsou splněny, proto řada v bodě $x = -\frac{3}{2}$ konverguje.

$x = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}\left(-\frac{1}{2}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!! 2^{2n+1}}{(2n)!!} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}+1\right)^{2n+1}}{(2n+1)} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!! 2^{2n+1}}{(2n)!!} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!! 2^{2n+1}}{(2n)!!} \cdot \frac{1^{2n+1}}{2^{2n+1}\,(2n+1)} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\,(2n)!!}
\end{aligned}$$

Řada se chová stejně jako v bodě $\mathrm{f}\left(-\frac{3}{2}\right)$, bude tedy v bodě $x = -\frac{1}{2}$ konvergovat.
Rovnost

$$\mathrm{f}(x) = \operatorname{argsinh}\left(2\,(x+1)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!! 2^{2n+1}}{(2n)!!\,(2n+1)} (x+1)^{2n+1}$$

tedy platí pro $x \in \left\langle -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$.