Mocninné řady

Rozviňte funkci v mocninnou řadu se středem v $b = 2$ a určete interval, na kterém rovnost platí

$$\mathrm{f}(x) = \arctan\left[4(x-2)^2\right]$$

Řešení

$$\mathrm{f}(x) = \arctan\left[4(x-2)^2\right]$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}'(x) &= \frac{1}{1+[4(x-2)^2]^2}.\,4(2x-4) \\
&= \frac{8x-16}{1+16(x-2)^4} = \frac{8(x-2)}{1+16(x-2)^4} \\
&= 8(x-2)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}16^n(x-2)^{4n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{4n+3}(x-2)^{4n+1}
\end{aligned}$$

Využili jsme přitom toho, že

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{n!} = \frac{(-1)^n\, n!}{n!} = (-1)^n$$

Derivaci mocninné řady zintegrujeme

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{4n+3}(x-2)^{4n+1} \\
\mathrm{f}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{4n+3}\frac{(x-2)^{4n+2}}{4n+2} + \mathrm{f}(2) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{4n+3}\frac{(x-2)^{4n+2}}{4n+2} + \arctan 0 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{4n+3}\frac{(x-2)^{4n+2}}{4n+2}
\end{aligned}$$

Vypočítáme poloměr konvergence

$$\begin{aligned}
r_1 &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n 2^{4n+3}}{4n+2}}{\frac{(-1)^{n+1}2^{4n+7}}{4n+6}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4n+6}{(-1)(4n+2)2^4}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|(-1)\frac{4n\left(1+\frac{6}{4n}\right)}{4n\left(1+\frac{2}{4n}\right)16}\right| \\
&= \left|-\frac{1}{16}\right| = \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(x-2)^{4n+6}}{(x-2)^{4n+2}}\right| \leq r_1 &= \frac{1}{16} \\
\left|(x-2)^4\right| &\leq \frac{1}{16} \\
|x-2| &\leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Víme tedy, že pro $\forall x \in \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ řada absolutně konverguje a rovnost

$$\mathrm{f}(x) = \arctan\left[4(x-2)^2\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{4n+3}}{4n+2}(x-2)^{4n+2}$$

zde platí.

Vyšetříme ještě krajní body intervalu

$x = \frac{3}{2}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{4n+3} \frac{\left(\frac{3}{2}-2\right)^{4n+2}}{4n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{4n+3} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{4n+2}}{4n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{4n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

Řada střídá znaménka, proto použijeme Leibnizovo kritérium

$$a_n = \frac{1}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

Ověříme ještě, zda $a_n \geq a_{n+1}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n+1} &\geq \frac{1}{2n+3} \\
2n+3 &\geq 2n+1 \\
3 &\geq 1 \quad \forall n
\end{aligned}$$

Jsou splněny obě podmínky, řada tedy konverguje a rovnost pro $x = \frac{3}{2}$ platí.

$x = \frac{5}{2}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{4n+3} \frac{\left(\frac{5}{2}-2\right)^{4n+2}}{4n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{4n+3} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{4n+2}}{4n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{4n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

Řada je stejná jako pro $x = \frac{3}{2}$, tedy konverguje a rovnost pro $x = \frac{5}{2}$ platí.

Rovnost

$$\mathrm{f}(x) = \arctan\left[4(x-2)^2\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{4n+3}}{4n+2}(x-2)^{4n+2}$$

tedy platí pro $x \in \left\langle \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right\rangle$.