Mocninné řady

Rozviňte funkci v mocninnou řadu a určete interval, na kterém rovnost platí

$$\mathrm{f}(x) = \ln\left(1 + x - 2x^2\right)$$

Řešení

$$\mathrm{f}(x) = \ln\left(1 + x - 2x^2\right)$$

Funkci nejprve zderivujeme

$$\mathrm{f}'(x) \quad = \quad \frac{1}{1+x-2x^2}(1-4x) = \frac{1-4x}{1+x-2x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{2x+1}$$

Vypočteme čitatele parciálních zlomků

$$1 - 4x = A(2x+1) + B(1-x)$$

$$\begin{aligned} x^1 &: \quad -4 = 2A - B \Longrightarrow -4 = 2 - 2B - B \Longrightarrow B = 2 \\ x^0 &: \quad 1 = A + B \Longrightarrow A = 1 - B \Longrightarrow A = -1 \end{aligned}$$

Dosadíme vypočtené hodnoty A a B do rovnice a převedeme na 2 mocninné řady, které pak spojíme do jedné

$$\begin{aligned} \frac{1-4x}{1+x-2x^2} &= \frac{-1}{1-x} + \frac{2}{2x+1} = -\left(1-x\right)^{-1} + 2\left(2x+1\right)^{-1} = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}\left(-x\right)^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}\left(2x\right)^n = \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(2x\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(-x\right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\left[2^n x^n 2 - \left(-1\right)^n x^n\right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^n[2^{n+1} - (-1)^n] \end{aligned}$$

Využili jsme přitom toho, že

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)\dots(-n)}{n!} = \frac{\left(-1\right)^n n!}{n!} = \left(-1\right)^n$$

Nyní zintegrujeme mocninnou řadu

$$\mathrm{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\left[2^{n+1} - \left(-1\right)^n\right] + \mathrm{f}(0) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\left[2^{n+1} - \left(-1\right)^n\right]$$

Vypočteme poloměr konvergence řady

$$\begin{aligned} r_1 &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n \frac{1}{n+1} \left[2^{n+1} - (-1)^n\right]}{(-1)^{n+1} \frac{1}{n+2} \left[2^{n+2} - (-1)^{n+1}\right]} \right| = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| (-1) \frac{\left(2^{n+1} - (-1)^n\right)(n+2)}{\left(2^{n+2} - (-1)^{n+1}\right)(n+1)} \right| = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} - (-1)^n}{2^{n+2} - (-1)^{n+1}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\left(1 - \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)}{2^{n+1}\left(2 - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\left| \frac{x^{n+2}}{x^{n+1}} \right| = |x| < \frac{1}{2} = r$$

$\forall x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ AK

Nyní vyšetříme konvergenci v krajních bodech intervalu :

Vyšetřujeme pro $x = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} \left[2^{n+1} - (-1)^n\right]$$

Řadu rozdělíme na dvě řady, které budeme od sebe odčítat

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} \left[2^{n+1} - (-1)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} 2^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$$

První řada střídá znaménka, a tak použijeme Leibnizovo konvergenční kritérium

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} 2^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$$

Zjistíme, zda $a_n \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Nyní dokážeme, že a_n je nerostoucí

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} &\geq \frac{1}{n+2} \\ n+2 &\geq n+1 \\ 2 &\geq 1 \end{aligned}$$

Podle Leibnizova kritéria první řada konverguje

Druhou řadu vypočítáme pomocí podílového kritéria

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}}{n+2}}{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}(n+1)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(2+\frac{4}{n}\right)} = \frac{1}{2}$$

Podle podílového kritéria druhá řada konverguje

Jelikož rozdíl dvou konečných čísel je konečný, tak výsledná řada konverguje

V krajním bodě $x = -\frac{1}{2}$ není zadaná funkce spojitá, a tak není třeba konvergenci řady v tomto bodě vyšetřovat

Rovnost

$$\mathrm{f}(x) = \ln\left(1 + x - 2x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \left[2^{n+1} - (-1)^n\right]$$

tedy platí na intervalu $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$