Mocninné řady

Rozviňte funkci v mocninnou řadu a určete interval, na kterém rovnost platí

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{4}\ \mathrm{arctg}\ 2x + \frac{1}{2}\ \frac{x}{1+4x^2}$$

Řešení

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{4}\ \mathrm{arctg}\ 2x + \frac{1}{2}\ \frac{x}{1+4x^2}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}'(x) &= \frac{1}{4}\ \frac{1}{1+4x^2}\ 2 + \frac{1}{2}\frac{(1+4x^2) - x\ (8x)}{(1+4x^2)^2} \\
&= \frac{1}{2\ (1+4x^2)} + \frac{1-4x^2}{2\ (1+4x^2)^2} \\
&= \frac{1+4x^2+1-4x^2}{2\ (1+4x^2)^2} = \frac{2}{2\ (1+4x^2)^2} \\
&= \frac{1}{(1+4x^2)^2} = (1+4x^2)^{-2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} (4x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\ (n+1)\ 4^n\ x^{2n}
\end{aligned}$$

Využili jsme přitom toho, že

$$\binom{-2}{n} = \frac{(-2)(-3)(-4)\ldots(n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n\ n!\ (n+1)}{1 \cdot n!} = (-1)^n\ (n+1)$$

Derivaci mocninné řady zintegrujeme

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\ (n+1)\ 4^n\ x^{2n} \\
\mathrm{f}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\ (n+1)\ 4^n\ \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{f}(0) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\ (n+1)\ 4^n\ \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{1}{4}\ \arctan 0 + \frac{1}{2}\ \frac{0}{1+4\ 0^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ (n+1)\ 4^n}{2n+1}\ x^{2n+1}
\end{aligned}$$

Vypočítáme poloměr konvergence

$$\begin{aligned}
r_1 &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n\ (n+1)\ 4^n}{2n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}\ (n+2)\ 4^{n+1}}{2n+3}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n\ \left(1+\frac{1}{n}\right)\ n\ \left(2+\frac{3}{n}\right)}{n\ \left(2+\frac{1}{n}\right)\ n\ \left(1+\frac{2}{n}\right)\ 4} = \frac{1}{4} \\
\left|\frac{x^{2n+3}}{x^{2n+1}}\right| &= \left|x^2\right| < r_1
\end{aligned}$$

$$|x| < \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = r$$

Víme tedy, že pro $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ řada absolutně konverguje a rovnost

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{4}\ \mathrm{arctg}\ 2x + \frac{1}{2}\ \frac{x}{1+4x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ (n+1)\ 4^n}{2n+1}\ x^{2n+1}$$

zde platí.

Vyšetříme ještě krajní body intervalu

$x = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ (n+1)\ 4^n}{2n+1}\ x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ (n+1)\ 4^n}{2n+1}\ \frac{1}{2^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ (n+1)}{2\ (2n+1)}$$

Řada střídá znaménka, proto použijeme Leibnizovo kritérium

$$a_n = \frac{(n+1)}{2\ (2n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{2\ (2n+1)} = \frac{n\ \left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\ \left(4+\frac{2}{n}\right)} = \frac{1}{4}$$

Není splněna první podmínka Leibnizova kritéria, a proto řada v bodě $x = \frac{1}{2}$ diverguje.

$x = -\frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ (n+1)\ 4^n}{2n+1}\ x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ (n+1)\ 4^n}{2n+1}\ \frac{1}{2^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\ (n+1)}{2\ (2n+1)}$$

Řada je stejná jako pro $x = \frac{1}{2}$, tedy diverguje.

Rovnost

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{4}\ \mathrm{arctg}\ 2x + \frac{1}{2}\ \frac{x}{1+4x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ (n+1)\ 4^n}{2n+1}\ x^{2n+1}$$

tedy platí pro $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.