Mocninné řady

Rozviňte funkci v mocninnou řadu a určete interval, na kterém rovnost platí

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{arctg}\ \frac{6x}{1-9x^2}$$

Řešení

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{arctg}\ \frac{6x}{1-9x^2}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}'(x) &= \frac{1}{1+\frac{36x^2}{(1-9x^2)^2}}\ \left(\frac{6}{(1-9x^2)} + \frac{108x^2}{(1-9x^2)^2}\right) \\
&= \frac{1}{1+\frac{36x^2}{(1-9x^2)^2}}\ \frac{6\ (1+9x^2)}{(1-9x^2)^2} \\
&= \frac{(1-9^2)^2}{1-18x^2+81x^4+36x^2}\ \frac{6\ (1+9x^2)}{(1-9x^2)^2} \\
&= \frac{6\ (1+9x^2)}{(1+9x^2)^2} \\
&= \frac{6}{(1+9x^2)} = 6\ \left(1+(3x)^2\right)^{-1} \\
&= 6\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}(3x)^{2n} = 6\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ 3^{2n}\ x^{2n}
\end{aligned}$$

Využili jsme přitom toho, že

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2)(-3)\ldots(-n)}{n!} = \frac{(-1)^n\ n!}{n!} = (-1)^n$$

Derivaci mocninné řady zintegrujeme

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}'(x) &= 6\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ 3^{2n}\ x^{2n} \\
\mathrm{f}(x) &= 6\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ 3^{2n}\ \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{f}(0) \\
&= 6\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\ 3^{2n}}{2n+1}\ x^{2n+1} + \mathrm{arctg}\ \frac{0}{1-0} \\
&= 6\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\ 3^{2n}}{2n+1}\ x^{2n+1}
\end{aligned}$$

Vypočítáme poloměr konvergence

$$\begin{aligned}
r_1 &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n\ 3^{2n}}{2n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}\ 3^{2n+2}}{2n+3}} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2n+3}{9\ (2n+1)} \right| = \left| \frac{n\ \left(2+\frac{3}{n}\right)}{9n\ \left(2+\frac{1}{n}\right)} \right| = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} \\
\left| \frac{x^{2n+3}}{x^{2n+1}} \right| &= \left| x^2 \right| < r_1 = \frac{1}{9} \\
& |x| < \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} = r
\end{aligned}$$

Víme tedy, že pro $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ řada absolutně konverguje a rovnost

$$\mathrm{f}(x) = \operatorname{arctg}\ \frac{6x}{1-9x^2} = 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ 3^{2n}}{2n+1}\ x^{2n+1}$$

zde platí.

Vyšetříme ještě krajní body intervalu

$x = \frac{1}{3}$:

$$6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ 3^{2n}}{2n+1}\ x^{2n+1} = 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ 3^{2n}}{2n+1}\ \frac{1}{3^{2n}\ 3} = 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3\ (2n+1)}$$

Řada střídá znaménka, proto použijeme Leibnizovo kritérium

$$a_n = \frac{1}{3\ (2n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3\ (2n+1)} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3\ (2n+1)} &\geq \frac{1}{3\ (2n+3)} \\
3\ (2n+3) &\geq 3\ (2n+1) \\
2n+3 &\geq 2n+1 \\
3 &\geq 1 \quad \forall n
\end{aligned}$$

Jsou splněny obě podmínky Leibnizova kritéria, a proto řada v bodě $x = \frac{1}{3}$ konverguje

$x = -\frac{1}{3}$:

$$6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ 3^{2n}}{2n+1}\ x^{2n+1} = -6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ 3^{2n}}{2n+1}\ \frac{1}{3^{2n}\ 3} = -6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3\ (2n+1)}$$

Řada je stejná jako pro $x = \frac{1}{3}$ tedy konverguje.

Rovnost

$$\mathrm{f}(x) = \operatorname{arctg}\ \frac{6x}{1-9x^2} = 6\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\ 3^{2n}}{2n+1}\ x^{2n+1}$$

tedy platí pro $x \in \left\langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle$