Konvergence integrálu

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Absolutní konvergenci nezjišťujte.

Řešení

Špatným bodem je jen $+\infty$
Dirichletovo kritérium:

$$\mathrm{f}(x) = \sin x$$

$$\mathrm{g}(x) = \frac{1}{x^2}$$

Omezenost $\mathrm{F}(x)$:

$$\left| \int_{\pi}^{k} \sin x\,\mathrm{d}x \right| = \left| [-\cos x]_{\pi}^{k} \right| = |-\cos k + \cos \pi| \leq |-\cos k| + |\cos \pi| = |-\cos k| + 1 \leq 2$$

Nyní zjistíme, zda se $\mathrm{g}(x)$ limitně blíží k nule

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

a zda je nerostoucí

$$\mathrm{g}(x) \geq \mathrm{g}(x+1)$$

$$\frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{(x+1)^2} \quad / \cdot x^2\,(x+1)$$

$$x^2 + 2x + 1 \geq x^2$$

$$2x + 1 \geq 0$$

$$x \geq -\frac{1}{2}$$

Tato podmínka také splněna a zadaný integrál tedy konverguje.