Konvergence integrálu

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^3+x^q}\,\mathrm{d}x$$

Řešení

Špatnými body jsou 0 a ∞

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^3+x^q}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^3+x^q}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{1}{x^3+x^q}\,\mathrm{d}x$$

u 0:

$q > 3$:

$$\frac{1}{x^3+x^q} \sim \frac{1}{x^3}$$

Srovnávací funkce je tedy $\mathrm{g}(x) = \int_0^1 \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^3+x^q}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3+x^q} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^{q-3}} = 1$$

Naše funkce a srovnávací funkce se tedy chovají stejně:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x \quad \mathrm{D} \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{1}{x^3+x^q}\,\mathrm{d}x \quad \mathrm{D}$$

$q = 3$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3+x^q}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^3+x^3}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x \quad \mathrm{D} \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 \frac{1}{x^3+x^q}\,\mathrm{d}x \quad \mathrm{D}$$

$0 < q < 3$:

$$\frac{1}{x^3+x^q} \sim \frac{1}{x^q}$$

Srovnávací funkce je tedy $\mathrm{g}(x) = \int_0^1 \frac{1}{x^q}\,\mathrm{d}x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^3+x^q}}{\frac{1}{x^q}} = \lim_{x\Rightarrow\to 0} \frac{x^q}{x^q(x^{3-q}+1)} = 1$$

Pro $q \in (0,1)$ integrál $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^3+x^q}\,\mathrm{d}x$ K

Pro $q \in \langle 1,3)$ integrál $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^3+x^q}\,\mathrm{d}x$ D

$q < 0$:

$$\frac{1}{x^3+x^q} = \frac{1}{x^3+\frac{1}{x^{-q}}} = \frac{1}{\frac{x^{-q+3}+1}{x^{-q}}} = \frac{\overbrace{x^{-q}}^{>0}}{1+\underbrace{x^{3-q}}_{>0}}$$

funkce je spojitá $\Rightarrow$ integrál konverguje

Tedy:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^3+x^q}\,\mathrm{d}x \quad \begin{cases} \text{K} & \text{pro} \quad q \in (-\infty, 1) \\ \text{D} & \text{pro} \quad q \in \langle 1, \infty) \end{cases}$$

u ∞:

$q > 3$:

$$\frac{1}{x^q(x^{3-q}+1)} \sim \frac{1}{x^q}$$

Srovnávací funkce je tedy $\mathrm{g}(x) = \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^q}\,\mathrm{d}x$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^q(x^{3-q}+1)}}{\frac{1}{x^q}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{3-q}+1} = 1$$

Naše funkce a srovnávací funkce se tedy chovají stejně:

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^q}\,\mathrm{d}x \quad \text{K} \quad \Rightarrow \quad \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^3+x^q}\,\mathrm{d}x \quad \text{K}$$

$q = 3$:

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^3+x^q}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^3+x^3}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^\infty \frac{1}{2x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x \quad \text{K} \quad \Rightarrow \quad \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^3+x^q}\,\mathrm{d}x \quad \text{K}$$

$q < 3$:

$$\frac{1}{x^3(1+x^{q-3})} \sim \frac{1}{x^3}$$

Srovnávací funkce je tedy $\mathrm{g}(x) = \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^3(1+x^{q-3})}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^{q-3}} = 1$$

Naše funkce a srovnávací funkce se tedy chovají stejně:

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x \quad \mathrm{K} \quad \Rightarrow \quad \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^3+x^q}\,\mathrm{d}x \quad \mathrm{K}$$

Tedy:

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^3+x^q}\,\mathrm{d}x \quad \mathrm{K} \quad \forall q$$

Závěrem získáváme

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^3+x^q}\,\mathrm{d}x \qquad \begin{cases} \mathrm{K} & \text{pro} \quad q \in (-\infty, 1) \\ \mathrm{D} & \text{pro} \quad q \in \langle 1, \infty) \end{cases}$$