Konvergence integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^5}}\,\mathrm{d}x$$

Řešení

Špatnými body jsou 0 a ∞

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^5}}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^5}}\,\mathrm{d}x + \int_2^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^5}}\,\mathrm{d}x$$

u 0:

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^5}} \sim \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$$

Srovnávací funkce je tedy $\mathrm{g}(x) = \int_0^2 \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^5}}}{\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{\frac{5}{3}}} \cdot x^{\frac{2}{3}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

Naše funkce a srovnávací funkce se tedy chovají stejně:

$$\int_0^2 \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}x \quad \mathrm{K} \quad \Rightarrow \quad \int_0^2 \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^5}}\,\mathrm{d}x \quad \mathrm{K}$$

u ∞:

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^5}} \sim \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$$

Srovnávací funkce je tedy $\mathrm{g}(x) = \int_2^\infty \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}\,\mathrm{d}x$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^5}}}{\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}} = \lim_{x\to \infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{\frac{5}{3}}} \cdot x^{\frac{5}{3}} = \lim_{x\to \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

Naše funkce a srovnávací funkce se tedy chovají stejně:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}\,\mathrm{d}x \quad \mathrm{K} \quad \Rightarrow \quad \int_2^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^5}}\,\mathrm{d}x \quad \mathrm{K}$$

Závěrem získáváme

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^5}}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^5}}\,\mathrm{d}x + \int_2^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^5}}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{K} + \mathrm{K} = \mathrm{K}$$

Zadaný integrál tedy konverguje.