Konvergence integrálu

$$\int_0^1 \frac{\ln 2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Řešení

Špatnými body jsou 0 a 1

$$\int_0^1 \frac{\ln 2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{\ln 2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln 2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

u 0:

$$-\frac{\ln 2x}{1-x^2} \sim \frac{1}{x^\alpha}$$

Srovnávací funkce je tedy $\mathrm{g}(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{\ln 2x}{1-x^2}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\ln 2x}{\frac{1}{x^\alpha}} \cdot \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1}{1-x^2}}_{\to 1} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-x^{-1}}{-\alpha\, x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{x^\alpha}^{\to 0}}{\underbrace{\alpha}_{>0}} = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

Naše funkce konverguje pouze v případě konvergence funkce srovnávací, tedy pro $\alpha < 1$:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x \quad \mathrm{K} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln 2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \mathrm{K}$$

u 1:

$$\frac{\ln 2x}{1-x^2} \sim \frac{1}{1-x}$$

Srovnávací funkce je tedy $\mathrm{g}(x) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{\ln 2x}{1-x^2}}{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln 2x}{1+x} = \ln\sqrt{2}$$

Naše funkce a srovnávací funkce se tedy chovají stejně, $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha < 1$ a diverguje $\Leftrightarrow \alpha \geq 1$:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x \quad \mathrm{D} \quad \Rightarrow \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln 2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \mathrm{D}$$

Závěrem získáváme

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln 2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^{\frac{1}{2}} -\frac{\ln 2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln 2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\text{č} + \infty = +\infty \Rightarrow \mathrm{D}$$

Zadaný integrál tedy diverguje.