Konvergence integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax^2}{1+(3x)^{2n}}\,\mathrm{d}x, \quad (n \geq 0, a \neq 0)$$

Řešení

Špatným bodem je $+\infty$.

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax^2}{1+(3x)^{2n}}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{2ax\cdot\cos ax^2}{2ax\cdot(1+(3x)^{2n})}\,\mathrm{d}x$$

K řešení použijeme Dirichletovo pravidlo:

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{K} \Leftrightarrow \mathrm{F}(x)\,\text{je omezená} \wedge \text{nerostoucí}\,\mathrm{g}(x) \geq 0 \wedge \lim_{x\to\infty} \mathrm{g}(x) = 0$$

$$\mathrm{f}(x) = 2ax\cdot\cos ax^2$$

$$\mathrm{g}(x) = \frac{1}{2ax\cdot(1+(3x)^{2n})}$$

Nejprve vyšetříme, zda $\mathrm{F}(x)$ je omezená.

$$\left|\int_0^K 2ax\cdot\cos ax^2\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^{aK^2}\cos t\,\mathrm{d}t\right| = \left|\sin aK^2 - \underbrace{\sin 0}_{=0}\right| = \left|\sin aK^2\right| \leq 1$$

Použili jsme přitom substituci

$$\begin{aligned} t &= ax^2 \\ \mathrm{d}t &= 2ax \end{aligned}$$

Funkce $\mathrm{f}(x)$ má tedy omezenou primitivní funkci.

Dále ověříme, zda je funkce $\mathrm{g}(x)$ nezáporná.

$$\frac{1}{2a\,\underbrace{x\cdot(1+(3x)^{2n})}_{>0}} \geq 0 \qquad \forall a > 0$$

Bude-li $a < 0$, před integrál vytkneme (-1) a $\mathrm{g}_2(x)$ potom bude opět nezáporná.

$$\mathrm{g}_2(x) = \frac{-1}{\underbrace{2a}_{<0}\,\underbrace{x\cdot(1+(3x)^{2n})}_{>0}} \geq 0$$

Funkce $\mathrm{g}(x)$ musí být nerostoucí, čili $\mathrm{g}'(x) \leq 0$

$$\left(\frac{1}{2ax\cdot(1+(3x)^{2n})}\right)' = -\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x^2}\frac{1}{1+(3x)^{2n}} + \frac{1}{x}\frac{6n\cdot(3x)^{2n-1}}{(1+(3x)^{2n})^2}\right) =$$

$$= -\frac{\overbrace{(3x)^{2n}}^{>0}\cdot\overbrace{(2n+1)}^{>0}}{2a\underbrace{x^2}_{>0}\cdot\underbrace{(1+(3x)^{2n})^2}_{>0}} \leq 0 \quad \text{a tedy neklesající} \Leftrightarrow a > 0$$

Bude-li $a < 0$, vyšetřujeme funkci $\mathrm{g}_2(x)$, pro kterou platí, že $\mathrm{g}_2{}'(x) \leq 0$.

Jako poslední zbývá ověřit, zda jde $\mathrm{g}(x)$ v nekonečnu limitně k nule.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2ax \cdot (1 + (3x)^{2n})} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{1}{2a}}_{\in\mathbb{R}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x \cdot (3x)^{2n}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{(3x)^{2n}} + 1}}_{\to 1} = 0$$

Pro $a < 0$ a funkci $\mathrm{g}_2(x)$ také platí $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{g}_2(x) = 0$.

Všechny podmínky Dirichletova kritéria jsou splněny, proto

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax^2}{1 + (3x)^{2n}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{K} \qquad \forall a \neq 0$$