Konvergence integrálu

Konvergence integrálu

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p \ln^3 x} \,\mathrm{d}x$$

Řešení

Špatnými body jsou 1 a ∞

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p \ln^3 x} \,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{e} \frac{1}{x^p \ln^3 x} \,\mathrm{d}x + \int\limits_{e}^{\infty} \frac{1}{x^p \ln^3 x} \,\mathrm{d}x$$

u 1:
Srovnávací funkce:

$$\frac{1}{x^p \ln^3 x} \sim \frac{1}{(x-1)^\alpha}$$

$$\lim_{x\to 1_+} \frac{\frac{1}{x^p \ln^3 x}}{\frac{1}{(x-1)^\alpha}} = \lim_{x\to 1_+} \frac{1}{x^p \ln^3 x} \cdot \frac{(x-1)^\alpha}{1} = \lim_{x\to 1_+} \frac{1}{x^p} \cdot \lim_{x\to 1_+} \frac{(x-1)^\alpha}{\ln^3 x} = 1 \cdot \lim_{x\to 1_+} \frac{(x-1)^\alpha}{\ln^3 x} \overset{l'H}{=}$$

$$\overset{l'H}{=} \lim_{x\to 1_+} \frac{\alpha \cdot (x-1)^{\alpha-1}}{3 \cdot \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1_+} \frac{\alpha}{3} x \cdot \lim_{x\to 1_+} \frac{(x-1)^{\alpha-1}}{\ln^2 x}$$

Mocniny se snižují stejně, proto zvolíme $\alpha = 3$.
Srovnávací funkce tedy vypadá takto:

$$g(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$$

$$\lim_{x\to 1_+} \frac{\frac{1}{x^p \ln^3 x}}{\frac{1}{(x-1)^3}} = \lim_{x\to 1_+} \frac{1}{x^p \ln^3 x} \cdot \frac{(x-1)^3}{1} = \lim_{x\to 1_+} \frac{1}{x^p} \cdot \lim_{x\to 1_+} \frac{(x-1)^3}{\ln^3 x} = 1 \cdot \lim_{x\to 1_+} \frac{(x-1)^3}{\ln^3 x} \overset{l'H}{=}$$

$$\overset{l'H}{=} \lim_{x\to 1_+} \frac{3 \cdot (x-1)^2}{3 \cdot \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1_+} x \cdot \lim_{x\to 1_+} \frac{(x-1)^2}{\ln^2 x} = 1 \cdot \lim_{x\to 1_+} \frac{(x-1)^2}{\ln^2 x} \overset{l'H}{=}$$

$$\overset{l'H}{=} \lim_{x\to 1_+} \frac{2 \cdot (x-1)}{2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1_+} \frac{(x-1)}{\ln x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 1_+} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1$$

Naše funkce a srovnávací funkce se tedy chovají stejně:

$$\int_1^e \frac{1}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x \quad \mathrm{D} \quad \Rightarrow \int_1^e \frac{1}{x^p \ln^3 x}\,\mathrm{d}x \quad \mathrm{D}$$

u ∞:
Srovnávací funkce:

$$\frac{1}{x^p \ln^3 x} \sim \frac{1}{x^\alpha}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^p \ln^3 x}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p \ln^3 x} \cdot \frac{x^\alpha}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha-p}}{\ln^3 x}$$

- $\alpha - p = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\ln^3 x} = 0$
- $\alpha - p < 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^{\alpha-p} \cdot \ln^3 x} = 0$
- $\alpha - p > 0 \quad \Rightarrow \quad l'H \ \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\alpha-p)\, x^{\alpha-p-1}}{3 \cdot \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\alpha-p)\, x^{\alpha-p}}{3\cdot \ln^2 x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(\alpha-p)^2\, x^{\alpha-p}}{6 \cdot \ln x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(\alpha-p)^3\, x^{\alpha-p}}{6} = \infty$$

	limita	srovnávací funkce	integrál
K	$\alpha - p \le 0$	$\alpha > 1$	$1 < \alpha \le p \quad \Rightarrow \quad p > 1$
D	$\alpha - p > 0$	$\alpha \le 1$	$p < \alpha \le 1 \quad \Rightarrow \quad p < 1$

$$p = 1? \quad \Rightarrow \quad \int_e^\infty \frac{1}{x \cdot \ln^3 x}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-2}}{2}\right]_1^\infty = \frac{1}{2}$$

Použili jsme substituci:

$$\begin{aligned} \ln x &= t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= dt \end{aligned}$$

Integrál tedy konverguje také pro $p = 1$.

Platí tedy, že:

$$\int\limits_e^{\infty} \frac{1}{x^p \ln^3 x}\,\mathrm{d}x \qquad \begin{cases} \text{K} & \Leftrightarrow p \geq 1 \\ \text{D} & \Leftrightarrow p < 1 \end{cases}$$

Výsledný integrál:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^p \ln^3 x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{e} \frac{1}{x^p \ln^3 x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_e^{\infty} \frac{1}{x^p \ln^3 x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} +\infty + \text{číslo} = +\infty & \forall p \geq 1 \\ +\infty + \infty \quad\; = +\infty & \forall p < 1 \end{cases}$$

Integrál:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^p \ln^3 x}\,\mathrm{d}x$$

tedy diverguje $\forall p \in \mathbb{R}$.