Konvergence integrálu

$$\int_0^\infty x^4 \cos \mathrm{e}^{3x} \,\mathrm{d}x \quad \text{(včetně AK)}$$

Řešení

Špatným bodem je ∞

$$\int_0^\infty x^4 \cos \mathrm{e}^{3x} \,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x^4 \frac{3\mathrm{e}^{3x}}{3\mathrm{e}^{3x}} \cos \mathrm{e}^{3x} \,\mathrm{d}x$$

K řešení použijeme Dirichletovo kritérium:

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{K} \Leftrightarrow \mathrm{F}(x) \text{ je omezená} \wedge \text{nerostoucí } \mathrm{g}(x) > 0 \wedge \lim_{x\to\infty} \mathrm{g}(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) &= 3\mathrm{e}^{3x} \cos \mathrm{e}^{3x} \\ \mathrm{g}(x) &= \frac{x^4}{3\mathrm{e}^{3x}} \end{aligned}$$

Nejprve vyšetříme, zda je funkce $\mathrm{g}(x)$ kladná.

$$\frac{x^4}{3\mathrm{e}^{3x}} > 0 \qquad \forall x \in (0, \infty)$$

Dále vyšetříme, zda je funkce $\mathrm{g}(x)$ nerostoucí, tj. $\mathrm{g}'(x) \leq 0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^4}{3\mathrm{e}^{3x}}\right)' = \frac{4x^3 3\mathrm{e}^{3x} - x^4 9\mathrm{e}^{3x}}{9\mathrm{e}^{6x}} = \frac{3\mathrm{e}^{3x}(4x^3 - 3x^4)}{9\mathrm{e}^{6x}} = \frac{\overbrace{x^3}^{>0}(4-3x)}{\underbrace{3\mathrm{e}^{3x}}_{>0}} &\leq 0 \\ 4 - 3x &\leq 0 \\ -3x &\leq -4 \\ x &\geq \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Pro $x \geq \frac{4}{3}$ je tedy funkce $\mathrm{g}(x)$ nerostoucí.

Poté ověříme, zda je $\mathrm{F}(x)$ omezená.

$$\left| \int_{\frac{4}{3}}^{K} 3\mathrm{e}^{3x} \cos \mathrm{e}^{3x} \,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{\mathrm{e}^4}^{\mathrm{e}^{3K}} \cos t \,\mathrm{d}t \right| = \left| [\sin t]_{\mathrm{e}^4}^{\mathrm{e}^{3K}} \right| = \left| \sin \mathrm{e}^{3K} - \sin \mathrm{e}^4 \right| \leq \underbrace{\left|\sin \mathrm{e}^{3K}\right|}_{\leq 1} + \underbrace{\left|-\sin \mathrm{e}^4\right|}_{\leq 1} \leq 2$$

Použili jsme substituci:

$$\mathrm{e}^{3x} = t \Rightarrow 3\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

Funkce $\mathrm{f}(x)$ má tedy omezenou primitivní funkci.

Jako poslední zbývá ověřit, zda jde limita $\mathrm{g}(x)$ v nekonečnu k nule.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{3\mathrm{e}^{3x}} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{4x^3}{9\mathrm{e}^{3x}} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{12x^2}{27\mathrm{e}^{3x}} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{24x}{81\mathrm{e}^{3x}} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{24}{243\mathrm{e}^{3x}} = 0$$

Všechny podmínky Dirichletova kritéria jsou splněna, proto:

$$\int\limits_{\frac{4}{3}}^{\infty} x^4\cos\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x \ \mathrm{K}$$

Funkce $x^4\cos\mathrm{e}^{3x}$ je na uzavřeném intervalu $\left\langle 0, \frac{4}{3}\right\rangle$ spojitá, tudíž integrál $\int\limits_0^{\frac{4}{3}} x^4\cos\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$ konverguje. V konečném součtu dostáváme:

$$\int\limits_0^{\frac{4}{3}} x^4\cos\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{4}{3}}^{\infty} x^4\cos\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \text{č} + \text{č} = \text{č} \Rightarrow \mathrm{K}$$

Zadaný integrál konverguje, tudíž zjistíme zda konverguje i absolutně.

$$\int\limits_0^{\infty}\left|x^4\cos\mathrm{e}^{3x}\right|\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{4}{3}}\left|x^4\cos\mathrm{e}^{3x}\right|\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{4}{3}}^{\infty}\left|x^4\cos\mathrm{e}^{3x}\right|\,\mathrm{d}x$$

Jelikož je funkce $x^4\cos\mathrm{e}^{3x}$ na uzavřeném intervalu $\left\langle 0, \frac{4}{3}\right\rangle$ spojitá, integrál $\int\limits_0^{\frac{4}{3}} x^4\cos\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$ konverguje absolutně.
U druhého integrálu $\int\limits_{\frac{4}{3}}^{\infty}|x^4\cos\mathrm{e}^{3x}|\,\mathrm{d}x$ uvažujeme o divergenci, proto omezíme funkci $|x^4\cos\mathrm{e}^{3x}|$ zespod.

$$\left|x^4\cos\mathrm{e}^{3x}\right| = x^4\left|\cos\mathrm{e}^{3x}\right| \geq x^4\cos^2\mathrm{e}^{3x} = x^4\frac{1+\cos 2\mathrm{e}^{3x}}{2} = \frac{x^4}{2} + \frac{x^4\cos 2\mathrm{e}^{3x}}{2}$$

Náš vyšetřovaný integrál tedy rozdělíme na dva a každý vyšetříme zvlášť.

$$\int\limits_{\frac{4}{3}}^{\infty}\left|x^4\cos\mathrm{e}^{3x}\right|\,\mathrm{d}x \ \geq\ \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{4}{3}}^{\infty} x^4\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{4}{3}}^{\infty} x^4\cos 2\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$$

V prvním integrálu je špatným bodem ∞

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{4}{3}}^{\infty} x^4 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{4}{3}}^{\infty} \frac{1}{x^{-4}} \,\mathrm{d}x \qquad \alpha = -4 \leq 1 \Rightarrow \text{integrál D}$$

Druhý integrál rozšíříme o $\frac{6\mathrm{e}^{3x}}{6\mathrm{e}^{3x}}$, kvůli lepší budoucí substituci.

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{4}{3}}^{\infty} x^4 \frac{6\mathrm{e}^{3x}}{6\mathrm{e}^{3x}} \cos 2\mathrm{e}^{3x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\limits_{\frac{4}{3}}^{\infty} x^4 \frac{6\mathrm{e}^{3x}}{3\mathrm{e}^{3x}} \cos 2\mathrm{e}^{3x} \,\mathrm{d}x$$

K vyřešení použijeme Dirichletovo kritérium.

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}(x) &= 6\mathrm{e}^{3x} \cos 2\mathrm{e}^{3x} \\
\mathrm{g}(x) &= \frac{x^4}{3\mathrm{e}^{3x}} \qquad \text{Tuto funkci už máme vyšetřenou.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \int\limits_{\frac{4}{3}}^{K} 6\mathrm{e}^{3x} \cos 2\mathrm{e}^{3x} \,\mathrm{d}x \right| &= \left| \int\limits_{2\mathrm{e}^4}^{2\mathrm{e}^{3K}} \cos t \,\mathrm{d}t \right| = \left| [\sin t]_{2\mathrm{e}^4}^{2\mathrm{e}^{3K}} \right| \\
&= \left| \sin 2\mathrm{e}^{3K} - \sin 2\mathrm{e}^4 \right| \leq \left| \sin 2\mathrm{e}^{3K} \right| + \left| - \sin 2\mathrm{e}^4 \right| \leq 2
\end{aligned}$$

Použili jsme substituci:

$$2\mathrm{e}^{3x} = t \Rightarrow 6\mathrm{e}^{3x} \,\mathrm{d}x = \,\mathrm{d}t$$

Všechny podmínky Dirichletova kritéria jsou splněny, proto:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{4}{3}}^{\infty} x^4 \cos 2\mathrm{e}^{3x} \,\mathrm{d}x \text{ K}$$

Závěrem získáváme:

$$\int\limits_{\frac{4}{3}}^{\infty} \left| x^4 \cos \mathrm{e}^{3x} \right| \,\mathrm{d}x \;\geq\; \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{4}{3}}^{\infty} x^4 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{4}{3}}^{\infty} x^4 \cos 2\mathrm{e}^{3x} \,\mathrm{d}x = \infty + \text{č} = \infty$$

Tedy

$$\int\limits_{\frac{4}{3}}^{\infty} \left| x^4 \cos \mathrm{e}^{3x} \right| \,\mathrm{d}x \text{ D}$$

Náš původní integrál tedy konverguje neabsolutně.