Diferenciální rovnice 2. řádu

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

$$y'' - 5y' + 4y = (x^2+1)\mathrm{e}^x; \qquad y(0) = 5,\ y'(0) = \frac{43}{27}$$

Řešení

Využijeme toho, že $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ řeší homogenní rovnici

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{\lambda x} \\ y' &= \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda x} - 5\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x} + 4\mathrm{e}^{\lambda x} &= 0 \\ \lambda^2 - 5\lambda + 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$y_h = c_1\mathrm{e}^{4x} + c_2\mathrm{e}^{x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Najdeme partikulární řešení diferenciální rovnice pomocí vztahu:

$$\begin{aligned} y &= c_1(x)\mathrm{e}^{4x} + c_2(x)\mathrm{e}^{x} \\ y' &= c_1'\mathrm{e}^{4x} + c_1 4\mathrm{e}^{4x} + c_2'\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{x} \end{aligned}$$

Volíme: $\quad c_1'\mathrm{e}^{4x} + c_2'\mathrm{e}^{x} = 0$

$$\begin{aligned} y'' &= (c_1 4\mathrm{e}^{4x})' + (c_2\mathrm{e}^{x})' \\ y'' &= c_1' 4\mathrm{e}^{4x} + c_1 16\mathrm{e}^{4x} + c_2'\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{x} \end{aligned}$$

Dosadíme do zadání:

$$\begin{aligned} c_1' 4\mathrm{e}^{4x} + c_1 16\mathrm{e}^{4x} + c_2'\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{x} - 5(c_1 4\mathrm{e}^{4x} + c_2\mathrm{e}^{x}) + 4(c_1\mathrm{e}^{4x} + c_2\mathrm{e}^{x}) &= (x^2+1)\mathrm{e}^{x} \\ c_1' 4\mathrm{e}^{4x} + c_2'\mathrm{e}^{x} &= (x^2+1)\mathrm{e}^{x} \end{aligned}$$

Získáváme soustavu dvou rovnic:

$$\begin{aligned}4c_1'\mathrm{e}^{4x}+c_2'\mathrm{e}^{x} &= (x^2+1)\mathrm{e}^{x}\\ c_1'\mathrm{e}^{4x}+c_2'\mathrm{e}^{x} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4c_1'\mathrm{e}^{3x}+c_2' &= x^2+1\\ c_1'\mathrm{e}^{3x}+c_2' &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3c_1'\mathrm{e}^{3x} &= x^2+1\\ c_1' &= \frac{x^2+1}{3\mathrm{e}^{3x}}\\ c_1 &= \int\frac{x^2+1}{3\mathrm{e}^{3x}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{9}(x^2+1)\mathrm{e}^{-3x}-\int\left(-\frac{2}{9}xe^{-3x}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Použili jsme metodu per partes

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3} & u' &= \frac{2}{3}x\\ v' &= \mathrm{e}^{-3x} & v &= -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}\end{aligned}$$

$$c_1=-\frac{1}{27}(3x^2+2x+3)\mathrm{e}^{-3x}+\int\left(\frac{2}{27}\mathrm{e}^{-3x}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{27}(3x^2+2x+3)\mathrm{e}^{-3x}-\frac{2}{81}\mathrm{e}^{-3x}$$

Použili jsme metodu per partes

$$\begin{aligned}u &= \frac{2}{9}x & u' &= -\frac{2}{9}\\ v' &= \mathrm{e}^{-3x} & v &= -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}\end{aligned}$$

Vypočítáme ještě c_2

$$\begin{aligned}c_2' &= -\int\frac{x^2+1}{3}\,\mathrm{d}x\\ c_2 &= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\end{aligned}$$

Získáme partikulární řešení ve tvaru:

$$\begin{aligned}y_p &= c_1\mathrm{e}^{4x}+c_2\mathrm{e}^{x}\\ &= -\frac{9x^2+6x+11}{81}\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{e}^{4x}-\left(\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{3}x\right)\mathrm{e}^{x}\\ &= -\frac{9x^2+6x+11}{81}\mathrm{e}^{x}-\frac{x^3+3x}{9}\mathrm{e}^{x}\\ &= \frac{-9x^2-6x-11-9x^3-27x}{81}\mathrm{e}^{x}\\ &= \frac{-9x^3-9x^2-33x-11}{81}\mathrm{e}^{x}\end{aligned}$$

Obecné řešení diferenciální rovnice je potom:

$$
\begin{aligned}
y &= c_1 \mathrm{e}^{4x} + c_2 \mathrm{e}^{x} - \left(\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{11}{27}x \right) \mathrm{e}^{x} - \frac{11}{81}\mathrm{e}^{x} \\
y &= c_1 \mathrm{e}^{4x} + c_2 \mathrm{e}^{x} - \left(\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{11}{27}x \right) \mathrm{e}^{x}
\end{aligned}
$$

Použijeme počáteční podmínky, $y(0) = 5 \; y'(0) = \frac{43}{27}$

$$
\begin{aligned}
5 &= c_1 \mathrm{e}^{4 \cdot 0} + c_2 \mathrm{e}^{0} - \left(\frac{1}{9}0^3 + \frac{1}{9}0^2 + \frac{11}{27}0 \right) \mathrm{e}^{0} \\
5 &= c_1 + c_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y' &= c_1 4\mathrm{e}^{4x} + c_2 \mathrm{e}^{x} - \left(\frac{3x^2}{9} + \frac{2x}{9} + \frac{11}{27} \right) \mathrm{e}^{x} - \left(\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{11}{27}x \right) \mathrm{e}^{x} \\
\frac{43}{27} &= 4c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 - \frac{11}{27} \cdot 1 - 0 \qquad / \cdot 27 \\
43 &= 4 \cdot 27 c_1 + 27 c_2 - 11
\end{aligned}
$$

Řesíme soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
54 &= 4 \cdot 27 c_1 + 27 c_2 \\
5 &= c_1 + c_2 \qquad / \cdot (-27)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-81 &= 81 c_1 \\
c_1 &= -1 \\
c_2 &= 6
\end{aligned}
$$

Řešením diferenciální rovnice s počátečními podmínkami je:

$$
y = -\mathrm{e}^{4x} + 6\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{9} \left(x^3 + x^2 + \frac{11}{3}x \right) \mathrm{e}^{x}
$$