Diferenciální rovnice 2. řádu

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

$$y'' + 2y' + 5y = \mathrm{e}^x \sin 2x \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

Řešení

Využijeme toho, že $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ řeší homogenní rovnici

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{\lambda x} \\ y' &= \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda x} + 2\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x} + 5\mathrm{e}^{\lambda x} &= 0 \\ \lambda^2 + 2\lambda + 5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = -1 \pm 2\mathrm{i}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 + 2\mathrm{i} \\ \lambda_2 &= -1 - 2\mathrm{i} \end{aligned}$$

Najdeme reálná řešení homogenní rovnice pomocí vztahu

$$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \mathrm{e}^{(\alpha + \beta\mathrm{i})x} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x \\ \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x \end{cases}$$

$$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \mathrm{e}^{(-1 + 2\mathrm{i})x} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} \cos 2x \\ \mathrm{e}^{-x} \sin 2x \end{cases}$$

Řešení homogenní rovnice je tedy

$$y_H = c_1\,\mathrm{e}^{-x} \cos 2x + c_2\,\mathrm{e}^{-x} \sin 2x, \quad c_{1,2} \in \mathbb{R}$$

Řešíme nehomogenní rovnici metodou pravé strany

$$\mathrm{e}^x \sin 2x = \mathrm{e}^{\alpha x} \left(\mathrm{P}_1(x) \cos \beta x + \mathrm{P}_2(x) \sin \beta x\right)$$

$$\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \lambda = \alpha + \beta\mathrm{i},\ \lambda = 1 + 2\mathrm{i}$$

$$\mathrm{P}_1(x) = 0,\ \mathrm{P}_2(x) = 1,\ \mathrm{st}\,\mathrm{P}_1(x) = 0,\ \mathrm{st}\,\mathrm{P}_2(x) = 0$$

$$\mathrm{st}\,\mathrm{Q}_1(x), \mathrm{st}\,\mathrm{Q}_2(x) \leq \max\left\{\mathrm{st}\,\mathrm{P}_1(x); \mathrm{st}\,\mathrm{P}_2(x)\right\}$$

$$\mathrm{st}\,\mathrm{Q}_1(x) = \mathrm{st}\,\mathrm{Q}_2(x) = 0 \Rightarrow \mathrm{Q}_1(x) = A,\ \mathrm{Q}_2(x) = B$$

$$k = \begin{cases} 0 & \lambda \neq \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ 1 & \lambda = \lambda_1 \vee \lambda = \lambda_2 \\ 2 & \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

$$k = 0$$

$$\begin{aligned} y_p &= x^k \mathrm{e}^{\alpha x} \left(\mathrm{Q}_1(x)\cos\beta x + \mathrm{Q}_2(x)\sin\beta x\right) \\ y_p &= \mathrm{e}^x \left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) \\ y_p' &= \mathrm{e}^x \left((B-2A)\sin 2x + (A+2B)\cos 2x\right) \\ y_p'' &= \mathrm{e}^x \left((4B-3A)\cos 2x + (-4A-3B)\sin 2x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 5y &= \mathrm{e}^x \sin 2x \\ \mathrm{e}^x \left((4B-3A)\cos 2x + (-4A-3B)\sin 2x\right) + & \\ +2\mathrm{e}^x \left((B-2A)\sin 2x + (A+2B)\cos 2x\right) + & \\ +5\mathrm{e}^x \left(A\cos 2x + B\sin 2x\right) &= \mathrm{e}^x \sin 2x \\ (-8A+4B)\sin 2x + (4A+8B)\cos 2x &= \mathrm{e}^x \sin 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x: \quad -8A + 4B &= 1 \\ \cos x: \quad 4A + 8B &= 0 \end{aligned}$$

$$A = -\frac{1}{10},\ B = \frac{1}{20}$$

Získáme tedy partikulární řešení rovnice

$$y_p = \frac{\mathrm{e}^x \sin 2x}{20} - \frac{\mathrm{e}^x \cos 2x}{10}$$

Obecné řešení rovnice je

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-x}\cos 2x + c_2 \mathrm{e}^{-x}\sin 2x + \frac{\mathrm{e}^x \sin 2x}{20} - \frac{\mathrm{e}^x \cos 2x}{10}, \quad c_{1,2} \in \mathbb{R}$$

Určíme c_1 a c_2 z počátečních podmínek $y(0) = 1$ a $y'(0) = 1$

$$\begin{aligned} y'(x) = {} & -c_2\mathrm{e}^{-x}\sin 2x + 2c_2\mathrm{e}^{-x}\cos 2x + \tfrac{1}{20}\left(\mathrm{e}^x \sin 2x + 2\mathrm{e}^x\cos 2x\right) - \\ & -\tfrac{1}{10}\left(\mathrm{e}^x\cos 2x - 2\mathrm{e}^x \sin 2x\right) - c_1\mathrm{e}^{-x}\cos 2x - 2c_1\mathrm{e}^{-x}\sin 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 \cdot 0 + \frac{0}{20} - \frac{1}{10} &= 1 \\ -c_1 + 2c_2 + \frac{2}{20} - \frac{1}{10} &= 1 \end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{11}{10},\ c_2 = \frac{21}{20}$$

Řešením diferenciální rovnice je tedy

$$y(x) = \frac{11}{10}\mathrm{e}^{-x}\cos 2x + \frac{21}{20}\mathrm{e}^{-x}\sin 2x + \frac{\mathrm{e}^x \sin 2x}{20} - \frac{\mathrm{e}^x \cos 2x}{10}$$