Diferenciální rovnice 2. řádu

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

$$y'' - 3y' + 2y = 2\,\mathrm{e}^x \cos x$$

Řešení

Využijeme toho, že $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ řeší homogenní rovnici

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{\lambda x} \\ y' &= \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda x} - 3\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x} + 2\mathrm{e}^{\lambda x} &= 0 \\ \lambda^2 - 3\lambda + 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 2 \end{aligned}$$

Najdeme reálná řešení diferenciální rovnice pomocí vztahu

$$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \mathrm{e}^x$$

$$y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x} = \mathrm{e}^{2x}$$

Řešení homogenní rovnice je tedy

$$y_H = c_1\,\mathrm{e}^x + c_2\,\mathrm{e}^{2x} \qquad c_{1,2} \in \mathbb{R}$$

Řešíme nehomogenní rovnici metodou odhadu (metodou speciální pravé strany)

$$2\,\mathrm{e}^x\,\cos x = \mathrm{e}^{\alpha x}(\,P_1\,(x)\,\cos\beta x + P_2\,(x)\,\sin\beta x\,)$$

$$\alpha = 1 \qquad \beta = 1 \qquad \lambda = \alpha + \beta i \qquad \lambda = 1 + i$$

$$P_1(x) = 2 \qquad P_2(x) = 0 \qquad \mathrm{st}\,P_1(x) = 0 \qquad \mathrm{st}\,P_2(x) = 0$$

$$\mathrm{st}\,Q_1(x),\ \mathrm{st}\,Q_2(x) \le \max\{\,\mathrm{st}\,P_1(x);\ \mathrm{st}\,P_2(x)\,\}$$

$$\mathrm{st}\,Q_1(x) = \mathrm{st}\,Q_2(x) = 0 \;\Rightarrow\; Q_1(x) = A\,,\ Q_2(x) = B$$

$$\lambda \ne \lambda_1 \ne \lambda_2 \;\Rightarrow\; k = 0$$

$$
\begin{aligned}
y_P &= x^k e^{\alpha x}\,(\,Q_1(x)\,\cos\beta x + Q_2(x)\,\sin\beta x\,)\\
y_P &= e^x\,(\,A\,\cos x + B\,\sin x\,)\\
y'_P &= e^x\,(\,A\,\cos x + B\,\sin x\,)\,+\,e^x\,(\,-A\,\sin x + B\,\cos x\,)\\
y''_P &= e^x\,(\,A\,\cos x + B\,\sin x\,)\,+\,e^x\,(\,-A\,\sin x + B\,\cos x\,)\,+\,e^x\,(\,-A\,\sin x + B\,\cos x\,)+\\
+ &\quad e^x\,(\,-A\,\cos x - B\,\sin x\,)\\
y''_P &= e^x\,(\,A\,\cos x + B\,\sin x\,)\,+\,e^x\,(\,-A\,\sin x + B\,\cos x\,)\,+\,e^x\,(\,-A\,\sin x + B\,\cos x\,)-\\
- &\quad e^x\,(\,A\,\cos x + B\,\sin x\,)\\
y''_P &= 2e^x\,(\,-A\,\sin x + B\,\cos x\,)
\end{aligned}
$$

Dosazením do zadání získáme rovnici

$$
\begin{aligned}
2e^x\,(\,-A\,\sin x + B\,\cos x\,)\,-\,3e^x\,(\,A\,\cos x + B\,\sin x - A\,\sin x + B\,\cos x\,)+\\
+2e^x\,(\,A\,\cos x + B\,\sin x\,) = 2\,e^x\cos x
\end{aligned}
$$

$$
A\sin x - B\cos x - A\cos x - B\sin x = 2\cos x
$$

Řešíme soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
\sin x:\quad A - B &= 0\\
\cos x:\ -A - B &= 2
\end{aligned}
$$

$$
A = -1\,,\ B = -1
$$

Dosazením konstant získáváme partikulární řešení

$$
y_P = e^x\,(\,-\cos x - \sin x\,)
$$

Řešení diferenciální rovnice je tedy

$$
y(x) = c_1\,e^x + c_2\,e^{2x}\ +\ e^x\,(\,-\cos x - \sin x\,) \qquad c_{1,2}\in\mathbb{R}
$$