Diferenciální rovnice 1. řádu

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

$$y' + xy = x^3y^3$$

Řešení

$$\begin{aligned}
y' + xy &= x^3y^3 \quad / : y^3, \quad && y^3 \neq 0 \\
& && y^3 = 0 \\
& && y = 0 \\
& && y' = 0 \Rightarrow 0 = 0 \\
& && y \equiv 0 \text{ je řešení} \\
\frac{y'}{y^3} + \frac{x}{y^2} &= x^3
\end{aligned}$$

Zvolíme substituci

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{y^2}, \qquad z > 0 \\
z' &= \frac{-2y'}{y^3} \\
-\frac{z'}{2} + xz &= x^3 \quad / \cdot (-2) \\
z' - 2xz &= -2x^3
\end{aligned}$$

Vyřešíme homogenní rovnici

$$\begin{aligned}
z' - 2xz = 0, \quad / : z, \qquad z > 0 \\
\frac{z'}{z} - 2x = 0 \\
\int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int 2x\,\mathrm{d}x \\
\ln|z| = \frac{2x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
\ln|z| = x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
\ln|z| = \ln \mathrm{e}^{x^2} + \ln \mathrm{e}^c, \quad c \in \mathbb{R} \\
\ln|z| = \ln c\mathrm{e}^{x^2} \quad \ln \mathrm{e}^c = \ln c, \quad c > 0 \\
z_H = c\mathrm{e}^{x^2}, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Najdeme partikulární řešení metodou variace konstant

$$\begin{aligned}
z' &= c'\mathrm{e}^{x^2} + 2xc\mathrm{e}^{x^2} \\
c'\mathrm{e}^{x^2} - 2xc\mathrm{e}^{x^2} + 2xc\mathrm{e}^{x^2} &= -2x^3 \\
c'\mathrm{e}^{x^2} &= -2x^3 \\
c'\mathrm{e}^{x^2} - 2x^3 &= 0 \\
c' &= \frac{-2x^3}{\mathrm{e}^{x^2}} \\
c &= -2\int \frac{x^3}{\mathrm{e}^{x^2}}\,\mathrm{d}x \\
c &= -\int \frac{x^2 \cdot 2x}{\mathrm{e}^{x^2}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Použijeme substituci

$$\begin{aligned}
x^2 &= t \\
2x\,dx &= dt
\end{aligned}$$

Získáváme tak $-\int \frac{2t}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$ a řešíme metodou per partes

$$\begin{aligned}
u &= t & u' &= 1 \\
v' &= \mathrm{e}^{-t} & v &= -\mathrm{e}^{-t}
\end{aligned}$$

$$\int \frac{2t}{\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = t\mathrm{e}^{-t} - \int \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = t\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t} + K = \mathrm{e}^{-t}(t+1) = \mathrm{e}^{-x^2}(x^2+1), \text{ volíme } K = 0$$

Získáváme partikulární řešení

$$\begin{aligned}
z_P &= c\mathrm{e}^{x^2} \\
z_P &= \mathrm{e}^{-x^2}(x^2+1)\mathrm{e}^{x^2} \\
z_P &= x^2 + 1
\end{aligned}$$

Řešení diferenciální rovnice je

$$\begin{aligned}
z &= z_H + z_P \\
z &= c\mathrm{e}^{x^2} + x^2 + 1, \quad c \in \mathbb{R} \\
y^{-2} &= c\mathrm{e}^{x^2} + x^2 + 1, \quad c \in \mathbb{R} \\
y &= \pm\frac{1}{\sqrt{c\mathrm{e}^{x^2} + x^2 + 1}}, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$