Diferenciální rovnice 1. řádu

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

$$y' - \frac{4}{x+1}y = 2(x+1)^3\sqrt{y}$$

Řešení

$$\begin{aligned}
y' - \frac{4}{x+1}y &= 2(x+1)^3\sqrt{y} && x \neq -1, y \geq 0 \\
y' - \frac{4}{x+1}y &= 2(x+1)^3\sqrt{y} && / : \sqrt{y} \neq 0 \\
& && y = 0 \\
& && y' = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow y \equiv 0 \,\text{je řešení} \\
y'y^{-\frac{1}{2}} - \frac{4}{x+1}y^{\frac{1}{2}} &= 2(x+1)^3 && \text{Použijeme substituci} \\
& && \sqrt{y} = z, \quad y > 0 \Rightarrow z > 0 \\
& && \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' = z' \\
& && y^{-\frac{1}{2}}y' = 2z' \\
2z' - \frac{4}{x+1}z &= 2(x+1)^3 && / : 2 \\
z' - \frac{2}{x+1}z &= (x+1)^3
\end{aligned}$$

Vyřešíme homogenní rovnici

$$\begin{aligned}
z' - \frac{2}{x+1}z &= 0 && / : z \neq 0 \\
\frac{z'}{z} - \frac{2}{x+1} &= 0 \\
\int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z - 2\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x &= 0 \\
\ln z - 2\ln|x+1| &= c, && c \in \mathbb{R}\ (z > 0) \\
\ln z - 2\ln|x+1| &= \ln c, && c > 0 \quad (c = -c, c = \mathrm{e}^c) \\
\ln \frac{z}{(x+1)^2} &= \ln c, && c > 0 \\
\frac{z}{(x+1)^2} &= c, && c > 0 \\
z &= c\,(x+1)^2, && c > 0 \\
z_H &= c\,(x+1)^2, && c > 0
\end{aligned}$$

Najdeme partikulární řešení metodou variace konstant

$$\begin{aligned}
z &= c\,(x+1)^2 \\
z' &= c'\,(x+1)^2 + 2c\,(x+1)
\end{aligned}$$

Dosadíme do nehomogenní rovnice

$$
\begin{aligned}
z' - \frac{2}{x+1} z &= (x+1)^3 \\
c'(x+1)^2 + 2c(x+1) - \frac{2}{x+1} c(x+1)^2 &= (x+1)^3 \\
c'(x+1)^2 &= (x+1)^3 \quad / : (x+1)^2 \neq 0 \\
c' &= x+1 \\
c &= \int (x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + x + k, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \text{volíme } k = 0
\end{aligned}
$$

Získáme partikulární řešení

$$
z_P = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)(x+1)^2
$$

Získáváme řešení

$$
\begin{aligned}
z &= z_H + z_P \\
z &= c(x+1)^2 + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)(x+1)^2, \quad c > 0 \\
z &= (x+1)^2\left(c + \frac{x^2}{2} + x\right), \quad c > 0
\end{aligned}
$$

Řešení diferenciální rovnice je

$$
\begin{aligned}
y^{\frac{1}{2}} &= (x+1)^2\left(c + \frac{x^2}{2} + x\right), \quad c > 0 \\
y &= (x+1)^4\left(c + \frac{x^2}{2} + x\right)^2, \quad c > 0
\end{aligned}
$$

Singulárním řešením je

$$
y \equiv 0
$$