Diferenciální rovnice 1. řádu

Bernouliho diferenciální rovnice 1. řádu

$$(x+2)y' - y = xy^3 \qquad\qquad y(0) = \frac{1}{2}$$

Řešení

$$\begin{aligned}
(x+2)y' - y &= xy^3 \quad / : y^3, \quad y \not\equiv 0 \\
& \qquad\qquad\qquad y \equiv 0 \Rightarrow y' \equiv 0 \\
& \qquad\qquad\qquad (x+2)\cdot 0 - 0 = x \cdot 0 \\
& \qquad\qquad\qquad y \equiv 0 \text{ je řešení} \\
(x+2)y'y^{-3} - y^{-2} &= x
\end{aligned}$$

Použijeme substituci

$$\begin{aligned}
y^{-2} &= z, \quad z > 0 \quad (y \neq 0) \\
-2y^{-3}y' &= z' \\
y^{-3}y' &= -\frac{1}{2}z'
\end{aligned}$$

a získáme:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(x+2)z' - z &= x \quad / \cdot (-2) \\
(x+2)z' + 2z &= -2x \quad / : (x+2), \quad x+2 \neq 0 \\
& \qquad x+2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
& \qquad \text{bod } \left(-2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
z' + \frac{2z}{x+2} &= -\frac{2x}{x+2}
\end{aligned}$$

Vyřešíme homogenní rovnici

$$\begin{aligned}
z' + \frac{2z}{x+2} &= 0 \quad / : z, \quad z \neq 0 \\
\frac{z'}{z} + 2\frac{1}{x+2} &= 0 \\
\int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + 2\int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x &= 0 \\
\ln|z| + 2\ln|x+2| &= c, \quad c \in \mathbb{R} \\
\ln z + 2\ln|x+2| &= \ln c, \quad c > 0 \quad (c = \mathrm{e}^c, \quad z > 0) \\
\ln z(x+2)^2 &= \ln c, \quad c > 0 \\
z(x+2)^2 &= c, \quad c > 0 \\
z &= \frac{c}{(x+2)^2}, \quad c > 0 \\
z_H &= c\,(x+2)^{-2}, \quad c > 0
\end{aligned}$$

Najdeme partikulární řešení metodou variace konstant

$$\begin{aligned} z &= c\,(x+2)^{-2} \\ z' &= c'\,(x+2)^{-2} - 2c\,(x+2)^{-3} \end{aligned}$$

Dosadíme do $z' + \frac{2z}{x+2} = -\frac{2x}{x+2}$

$$\begin{aligned} c'\,(x+2)^{-2} - 2c\,(x+2)^{-3} + \frac{2c\,(x+2)^{-2}}{x+2} &= -\frac{2x}{x+2} \qquad / \cdot (x+2)^2 \\ c' &= -2x(x+2) \\ c' &= -2x^2 - 4x \\ c &= -2\frac{x^3}{3} - 2x^2 + k, \quad k \in \mathbb{R},\ \text{volím } k = 0 \end{aligned}$$

Získáváme partikulární řešení

$$z_P = \frac{-2\frac{x^3}{3} - 2x^2}{(x+2)^2}$$

Řešení diferenciální rovnice je

$$\begin{aligned} z &= z_H + z_P \\ z &= c\,(x+2)^{-2} + \frac{-2\frac{x^3}{3} - 2x^2}{(x+2)^2}, \quad c > 0 \\ z &= \frac{c - 2\frac{x^3}{3} - 2x^2}{(x+2)^2}, \quad c > 0 \end{aligned}$$

Vrátíme substituci a získáme tak řešení diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} y^{-2} &= \frac{c - 2\frac{x^3}{3} - 2x^2}{(x+2)^2}, \quad c > 0 \\ y &= \pm\sqrt{\frac{(x+2)^2}{c - 2\frac{x^3}{3} - 2x^2}}, \quad c > 0 \\ y &= \pm\sqrt{\frac{3(x+2)^2}{c - 2x^3 - 6x^2}}, \quad c > 0, \quad (c = 3c) \end{aligned}$$

Použijeme ještě počáteční podmínku

$$\begin{aligned} y(0) &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} &= +\sqrt{\frac{3(0+2)^2}{c - 2 \cdot 0^3 - 6 \cdot 0^2}}, \quad c > 0 \\ \frac{1}{4} &= \frac{12}{c}, \quad c > 0 \\ c &= 48 \end{aligned}$$

Řešení diferenciální rovnice s počáteční podmínkou je:

$$y = \sqrt{\frac{3(x+2)^2}{48 - 2x^3 - 6x^2}}$$