Bernoulliho rovnice 1. řádu

Bernoulliho diferenciální rovnice 1. řádu

$$xy' + (x^2y + 1) \cdot y = 0,\ y(2) = -\frac{1}{2}$$

Řešení

Upravíme rovnici na Bernoulliho tvar $y' + p(x)y = f(x)y^{\alpha}$

$$\begin{aligned} xy' + (x^2y+1)\cdot y &= 0 \\ xy' + x^2y^2 + y &= 0 \\ xy' + y &= -x^2y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy' + y &= -x^2y^2 / : y^2 \neq 0 \\ & \quad\quad y = 0 \Rightarrow y' = 0 \\ & \quad\quad 0 = 0 \\ & \quad\quad y \equiv 0 \text{ je řešením} \\ \frac{xy'}{y^2} + \frac{1}{y} &= -x^2 / : x \neq 0 \\ & \quad\quad x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ & \quad\quad \text{bod}(0,0) \\ \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} &= -x \\ y'y^{-2} + \frac{1}{x}y^{-1} &= -x \end{aligned}$$

Použijeme substituci:

$$\begin{aligned} z &= y^{-1} \\ z' &= -1y^{-2}y' \\ -z' &= y^{-2}y' \end{aligned}$$

Získáme:

$$-z' + \frac{1}{x}z = -x$$

Nejprve vyřešíme homogení rovnici:

$$\begin{aligned}
z' - \frac{1}{x}z &= 0 \ / : z \neq 0 \\
\frac{z'}{z} - \frac{1}{x} &= 0 \\
\int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z - \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= 0 \\
\ln|z| - \ln|x| &= c,\ c\ \in \mathbb{R} \\
\ln\frac{|z|}{|x|} &= \ln c,\ c > 0\ (c = \ln \mathrm{e}^c) \\
\frac{|z|}{|x|} &= c \quad / \cdot |x|,\ c > 0 \\
|z| &= c|x|,\ c > 0 \\
z &= cx,\ c \neq 0
\end{aligned}$$

Nyní použijeme metodu variace konstant:

$$\begin{aligned}
z_H &= cx \\
z' &= c'x + c \\
-(c'x + c) + \frac{1}{x}cx &= -x \\
-c'x - c + c &= -x \\
-c'x &= -x / : x \neq 0 \\
c' &= 1 \\
c &= x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_P &= x^2 \\
z &= cx + x^2,\ c \neq 0
\end{aligned}$$

Nyní vrátíme substituci:

$$\begin{aligned}
y^{-1} &= cx + x^2,\ c \neq 0 \\
y &= \frac{1}{cx + x^2},\ c \neq 0
\end{aligned}$$

Dosadíme hodnoty ze zadání:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} &= \frac{1}{2 \cdot c + 2^2} \\
-1 &= \frac{2}{2 \cdot c + 4} \\
-1 &= \frac{1}{c + 2} \\
-c - 2 &= 1 \\
c &= -3
\end{aligned}$$

Řešení diferenciální rovnice s počáteční podmínkou je

$$y = \frac{1}{-3x + x^2} = \frac{1}{x(x-3)}$$

Singulární řešení $y \equiv 0$ nevyhovuje počáteční podmínce.