Teorie automatů a formálních jazyků II

podle přednášek doc. Mojmíra Křetínského

Sazbu v LaTeXu připravil Dušan Dobeš

Obsah

1 Deterministická syntaktická analýza shora dolů

1.1 LL(k) gramatiky

LL(k) gramatiky a jejich analýza (from **L**eft to right **L**eftmost parse).

Definice 1.1

Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je CFG, $k \geq 1$ celé číslo.

Definujeme funkci $FIRST_k^G(\alpha) : (N \cup \Sigma)^+ \to \Sigma^{*k}$ takto:

$$FIRST_k^G(\alpha) = \{w \in \Sigma^* \mid (\alpha \Rightarrow^* w \wedge |w| \leq k) \vee (\alpha \Rightarrow^* w\beta \wedge |w| = k\}$$

Dále definujeme funkci $FOLLOW_k^G : N \to \Sigma^{*k}$ takto:

$$FOLLOW_k^G(A) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* uA\alpha, w \in FIRST_k^G(\alpha)\}$$

Označení: Nechť $w = a_1 \dots a_n$, $k \geq 1$ celé číslo. klademe

$$k : w = \begin{cases} a_1 \dots a_k & , k < n \\ w & , k \geq n \end{cases}$$

Definice 1.2

Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je CFG, $k \geq 1$ celé číslo. Řekneme, že G je LL(k) gramatika, právě když pro libovolné dvě nejlevější derivace

$$(1)\ S \Rightarrow^* wA\alpha \Rightarrow w\beta\alpha \Rightarrow^* wx (2)\ S \Rightarrow^* wA\alpha \Rightarrow w\gamma\alpha \Rightarrow^* wy$$

podmínka $k : x = k : y$ značí $\beta = \gamma$.

G je LL $\Leftrightarrow$ $\exists k$: G je LL(k)

L je LL(k) $\Leftrightarrow$ $\exists G \exists k$: G je LL(k) a L=L(G).

Definice 1.3

Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je CFG. Jestliže pro každé $A \in N$ platí, že všechna A-pravidla mají pravé strany začínající různými terminálními symboly, pak G nazveme *jednoduchou LL(1) gramatikou.*

Věta 1.4

Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je CFG. Pak G je LL(k), právě když platí: Jsou-li $A \to \beta$ a $A \to \gamma$ dvě různá pravidla v P, pak pro všechny nejlevější větné formy $wA\alpha$ platí:

$$FIRST_k(\beta\alpha) \cap FIRST_k(\gamma\alpha) = \emptyset.$$

Důkaz: Z definice LL(k) a FIRST.

Předpokládejme, že průnik je neprázdný, tedy existuje x, které tam patří.

Z definice FIRST:

$$S \Rightarrow^* wA\alpha \Rightarrow w\beta\alpha \Rightarrow^* wxy$$

$$S \Rightarrow wA\alpha \Rightarrow w\gamma\alpha \Rightarrow wxz$$

$k : xy = k : xz$, protože $x \in FIRST_k$.

Protože $\beta \neq \gamma$, G není LL(k).

Předpokládejme, že G není LL(k). Pak existují dvě různé derivace

$$S \Rightarrow^* wA\alpha \Rightarrow w\beta\alpha \Rightarrow^* wx$$

$$S \Rightarrow^* wA\alpha \Rightarrow w\gamma\alpha \Rightarrow^* wy$$

takové, že $k : x = k : y$, ale $\beta \neq \gamma$, to jest $A \to \beta$ a $A \to \gamma$ jsou různé a $FIRST_k(\beta\alpha)$ a $FIRST(\gamma\alpha)$ obsahují řetězec $k : x$ a tedy nejsou disjunktní. $\square$

Důsledek 1.5

Důsledky definice LL(k)

- Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je CFG bez ε pravidel. G je LL(k), právě když

  $$\forall A \in N,\ \forall p \in P, A \to \alpha_1, \ldots, A \to \alpha_n$$

  platí $FIRST_1(\alpha_i) \cap FIRST_1(\alpha_j) = \emptyset$ pro $1 \leq i \neq j \leq n$.

- Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je CFG. G je LL(1) gramatika, právě když $\forall A \in N, \forall p_1, p_2 \in P,\ A \to \beta,\ A \to \gamma$ platí: $FIRST_1(\beta FOLLOW(A)) \cap FIRST_1(\gamma FOLLOW(A)) = \emptyset$

Definice 1.6

Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je CFG. G je *silná LL(k) gramatika* (pro $k \geq 1$ celé), jestliže $\forall A \in N,\ \forall p_1, p_2 \in P,\ A \to \beta, A \to \gamma$ platí: $FIRST_k(\beta FOLLOW_k(A)) \cap FIRST_k(\gamma FOLLOW_k(A)) = \emptyset$

Poznámka 1.7

Každá silná LL(k) (SLL(k)) gramatika je LL(k) gramatikou.

Příklad 1.1

Uvedeme příklad gramatiky, která je LL(2) a není SLL(2).

$$\begin{array}{lcl} S & \to & aAaa \,|\, bAba \\ A & \to & b \,|\, \varepsilon \end{array}$$

$FOLLOW_2(S) = \{\varepsilon\}$, $FOLLOW_2(A) = \{aa, ba\}$

S $FIRST_2(aAaa.FOLLOW_2(S)) = \{ab, aa\}$,
$FIRST_2(bAba.FOLLOW_2(S)) = \{bb\}$,
Množiny jsou disjunktní.

A $FIRST_2(b.FOLLOW_2(A)) = \{ba, bb\}$,
$FIRST_2(\varepsilon.FOLLOW_2(A)) = \{aa, ba\}$,
Množiny nejsou disjunktní, proto není SLL(2).

Poznámka 1.8

Každá SLL(1) je LL(1) a naopak.

1.2 Syntaktická analýza LL(1) gramatik

Syntaktická analýza LL(1) gramatik jde provádět jednostavovým zásobníkovým automatem. Přechodová funkce M je zadána takto:

$dom(M) = (N \cup \Sigma \cup \xi) \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$
$im(M) = \{< \alpha, i > | A \rightarrow \alpha$ je i-té pravidlo v P $\} \cup \{$odstraň, přijmi, chyba$\}$

Je-li $G = (N, \Sigma, P, S)$, pak

1. Je-li $A \rightarrow \alpha$ i-té pravidlo, klademe $M(A, a) =< \alpha, i >$ pro všechna $a \in FIRST_1(\alpha)$. Je-li též $\varepsilon \in FIRST_1(\alpha)$, pak $M(A, b) =< \alpha, i >$ pro všechna $b \in FOLLOW_1(A)$.
2. $M(a, a) =$ odstraň.
3. $M(\$, \varepsilon) =$ přijmi.
4. $M(x, a) =$ chyba.

Syntaktická analýza:
(vstup, zásobník, výstup), $(ax,\ A\alpha,\ \pi i)$
počáteční kofigurace $(w,\ S\$,\ \varepsilon)$

$\vdash$:

1. $(ax, A\alpha, \pi) \vdash (ax, b\alpha, \pi i)$, jestliže $M(A, a) =< \beta, i >$
2. $(ax, a\alpha, \pi) \vdash (x, a, \pi)$
3. $(\varepsilon, \$, \pi) \ldots$ koncová konfigurace
4. $(x, \alpha, \pi) \vdash$ "chyba"

Věta 1.9
Každá LL(k) gramatika je jednoznačná.

Důkaz: Nechť gramatika G není jednoznačná. pak existuje $w \in L(G)$ tak, že existují dvě různé derivace věty w:

1. $S \Rightarrow^* wA\alpha \Rightarrow w\beta\alpha \Rightarrow^* wx = \tilde{w}$
2. $S \Rightarrow^* wA\alpha \Rightarrow w\gamma\alpha \Rightarrow^* wy = \tilde{w}$

kde $A \rightarrow \beta$ a $A \rightarrow \gamma$ jsou dvě různá pravidla, $FIRST_k(x) = FIRST_k(y)$, ale $\beta \neq \gamma$, tedy G není LL(K). $\square$

Věta 1.10
Je-li G levorekurzivní, pak není LL(k) pro žádné k.

Důkaz: Buď $A \in N$, A je levorekurzivní.

$$A \Rightarrow^* A\alpha \begin{cases} \alpha \Rightarrow^* \varepsilon \\ \alpha \not\Rightarrow^* \varepsilon \end{cases}$$

V prvním případě je $A \Rightarrow^+ A$ jednoznačné, tedy není LL(k). Ve druhém nechť $\alpha \Rightarrow^* v$, $v \in \Sigma^+$ a dále $A \Rightarrow^* u$.

1. $S \Rightarrow^* wA\alpha' \Rightarrow^* wA\alpha^k\alpha' \Rightarrow^* wuv^k\alpha'$
2. $S \Rightarrow^* vA\alpha' \Rightarrow^* wA\alpha^k\alpha' S \Rightarrow wA\alpha^{k+1}\alpha' S \Rightarrow^* wuv^{k+1}\alpha'$

$k:\ v^k = k : v^{k+1},\ uv^k = k : uv^{k+1}$ □

Příklad 1.2
Gramatika

$$\begin{array}{lcl} E & \rightarrow & E+T|T \\ T & \rightarrow & T*F|F \\ F & \rightarrow & i|(E) \end{array}$$

je levorekurzivní a proto není LL(1). Někdy je možné gramatiku upravit.

1.3 Analýza SLL(k) gramatik

Algoritmus 1.1
Vytvoření SLL(k) tabulky M pro SLL(k) gramatiku $G = (N, \Sigma, P, S)$.
$M:\ N \cup \$ \times \Sigma^{*k} \longrightarrow \{<\alpha, i>\ |\ i : A \rightarrow \alpha \in P\} \cup \{\text{chyba}\}$.

- Je-li $i : A \rightarrow \alpha \in P$ i-té pravidlo, pak $M(A, x) =<\alpha, i>$ pro všechna $x \in FIRST_k(\alpha)$ taková, že $|x| = k$.
- Je-li $i : A \rightarrow \alpha \in P$ i-té pravidlo, pak $M(A, x) =<\alpha, i>$ pro všechna $x \in FIRST_k(FIRST_k(\alpha).FOLLOW_k(A))$.

Algoritmus 1.2
Syntaktická analýza pro SLL(k) gramatiku. Algoritmus $\mathcal{A}$.
Vstup:
M - SLL(k) tabulka pro danou SLL(k) gramatiku G.
Výstup:
Je-li $w \in L(G)$, pak levý rozbor věty w (ozn. Π), jinak chybové hlášení.
Metoda:
Označme $w = k : x$, kde x je dosud nepřečtená část vstupního řetězce.

1. Počáteční konfigurace je $(w, S\$, \varepsilon)$
2. $(x, A\alpha, \Pi) \vdash (x, \beta\alpha, \Pi i)$, pro $M(A, w) =<\beta, i>$
3. $(ax', a\alpha, \Pi) \vdash (x', \alpha, \Pi)$

4. $(\varepsilon, \$, \Pi)$ je koncová konfigurace.
5. jinak $(x, X\alpha, \Pi) \vdash$ chyba.

Definice 1.11

Řekneme, že algoritmus syntaktické analýzy je *správný*, pro bezkontextovou gramatiku $G = (N, \Sigma, P, S)$, jestliže

- $L(G) = \{w | \mathcal{A}(w)$ je definováno a $\mathcal{A}(w) \neq$chyba$\}$.
- Je-li $\mathcal{A}(w) = \Pi$, pak Π je levý rozbor věty w.

Jestliže $\mathcal{A}$ používá tabulku M a $\mathcal{A}$ je správný pro w, pak i M je správná pro w.

Věta 1.12

Algoritmus vytvoření SLL(k) tabulky vytváří správnou tabulku pro $\mathcal{A}$.

Důkaz: Jestliže G je SLL(k), pak pro libovolný argument M je definována nejvýše jedna položka tvaru $< a, i >$.

$$S \Rightarrow^* w \Longleftrightarrow (w, S\$, \varepsilon) \vdash^* (\varepsilon, \$, \Pi)$$

Důkaz indukcí:

a) $(xy, S\$, \varepsilon) \vdash^* (y, \alpha\$, \Pi)$, pak $S \Rightarrow^* x\alpha$.

b) $S \Rightarrow^* x\alpha$, $k : y \in FIRST_k(\alpha)$, pak $(xy, S\$, \varepsilon) \vdash^* (y, \alpha\$, \Pi)$.

□

1.4 Metoda rekurzivního sestupu

Při metodě rekurzivního sestupu se využívají známé syntaktické diagramy. Vznikající program sestává ze vzájemně rekurzivních procedur, každému neterminálu odpovídá 'zhruba' jedna procedura.

Tedy postupně:

- Z neterminálů sestrojíme syntaktické diagramy.
- Ze syntaktických diagramů sestrojíme rekurzivní procedury.

Poznámka 1.13

Gramatika je v BNF (**B**ackusova **N**ormální **F**orma), má-li na pravé straně alternativy tvaru $A \rightarrow aC|bD| \ldots$.

GBNF (zobecněná BNF) přidává do syntaxe zápisu gramatiky symboly $+$, $\{\ldots\}$ a $(\ldots)^*$ pro iterace apod.

Algoritmus 1.3

Vytvoření syntaktických diagramů z gramatiky v GBNF

Vstup:

Gramatika v GBNF

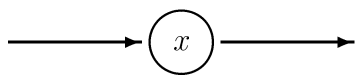
Výstup:

syntaktické diagramy

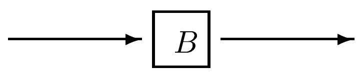
Metoda:

Pro každé $A \in N$, $A := \xi_1 | \dots | \xi_n$ vytvoř graf, jehož struktura je určena pravými stranami $\xi_1 | \dots | \xi_n$ dle následujících pěti pravidel.

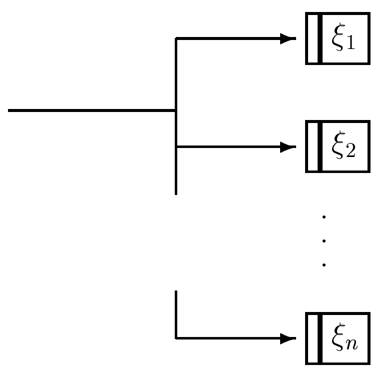
- Každé $x \in \Sigma$ v ξ_i je reprezentováno grafem



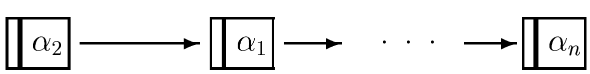
- Každé $B \in N$ v ξ_i je reprezentováno grafem



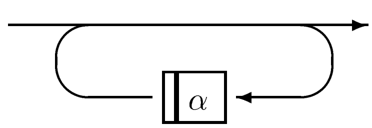
- $A ::= \xi_1 | \dots | \xi_n$ jsou zobrazena na graf



- $\xi = \alpha_1 \dots \alpha_n$ jsou zobrazena na graf



- $\xi = \{\alpha\}$ je zobrazeno na graf

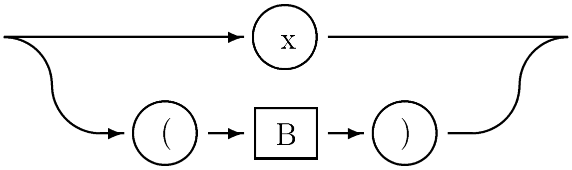


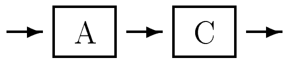
Příklad 1.3

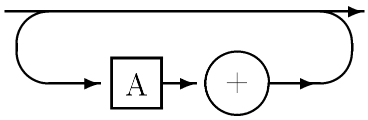
Gramatika v GBNF

$$
\begin{array}{lcl}
A & ::= & x|(B) \\
B & ::= & AC \\
C & ::= & \{+A\}
\end{array}
$$

se převede na



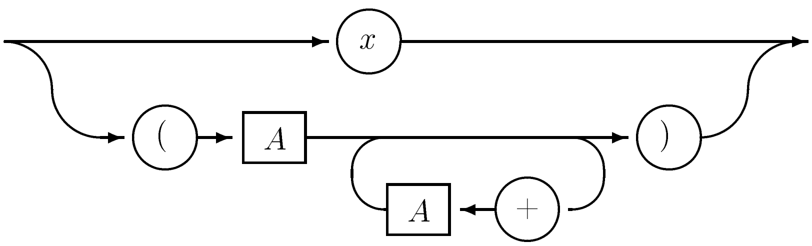




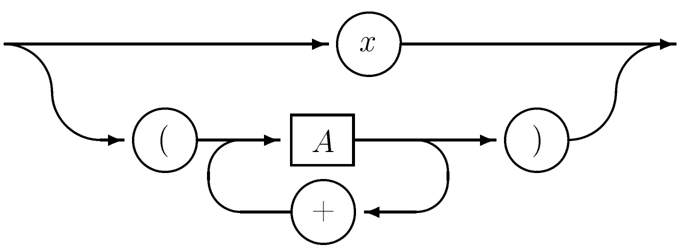
Systém grafů z výstupu algoritmu je vhodné redukovat na dostatečně malý počet rozumně velkých grafů pomocí substituce.

Příklad 1.4

Z předchozího příkladu tak dostaneme graf



A po zjednodušení

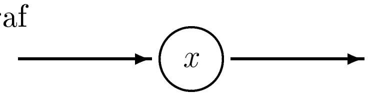


Algoritmus 1.4

Transformace syntaktických diagramů na program

Každý graf převeď pomocí následujících pěti kroků na procedury

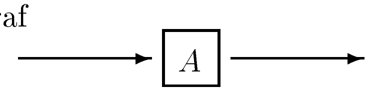
- Graf

  Převeď na

  if ch='x' then read(ch) else error

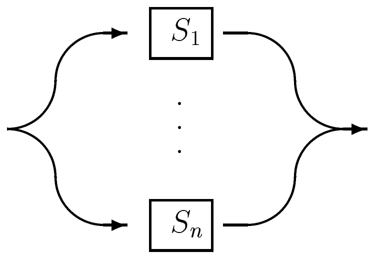
- Graf

  Převeď na

  call A

- Graf

  Převeď na

  case ch of

  L_1: T(S_1)

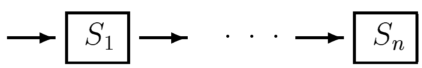
  $\vdots$

  L_n: T(S_n)

  endcase

  kde $L_i = FIRST(S_i)$, $T(S_i)$ je S_i po transformaci.

- Graf

  Převeď na

  begin

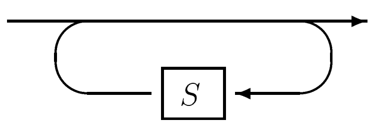
  $T(S_1)$;

  $\vdots$

  $T(S_n)$

  end

- Iterace

  Se převede na

  while *ch* in L do T(S),

  kde $L = FIRST(S)$

Příklad 1.5

program PARSER;

var ch:char

proc A;

begin

if *ch*=‘x’ **then**

```
            read(ch)
        elseif ch='(' then begin
            read(ch);
            A;
            while ch='+' do begin
                read(ch);
                A;
            endwhile;
            if ch=')' then
                read(ch)
            else
                error("očekávám ')'")
            endif
        endif
    end;
BEGIN
    read(ch);
    A;
END
```

1.5 Transformace gramatik na LL(1)

Transformovat gramatiku na LL(1) znamená odstranit kolize FIRST-FIRST a FIRST-FOLLOW. K odstranění kolize FIRST-FIRST může vést kombinace těchto kroků:

- Odstranění levé rekurze
- Substituce levého rohu

$$\begin{array}{lcl} A & \rightarrow & B\alpha \\ B & \rightarrow & \beta_1|\ldots|\beta_n \end{array} \Longrightarrow A \rightarrow \beta_1\alpha|\ldots|\beta_n\alpha$$

- Levá faktorizace (vytýkání)

$$A \rightarrow \alpha\alpha_1|\ldots|\alpha\alpha_n \Longrightarrow \begin{array}{lcl} A & \rightarrow & \alpha A' \\ A' & \rightarrow & \alpha_1|\ldots|\alpha_n \end{array}$$

Příklad 1.6

Při kolizi FIRST-FIRST: $A \rightarrow \alpha\beta,\ FIRST(\alpha) \cap FIRST(\beta) \neq \emptyset$ provedeme levou faktorizaci, je-li to možné. Nechť například $\Sigma = \{a, i\},\ N = \{S, S_L\}$

$$\begin{array}{lcl} S_L & \rightarrow & SiS_L \\ S & \rightarrow & a \end{array}$$

kolize: $FIRST(S) \cap FIRST(SiS_L) = \{a\}$.

Tuto gramatiku převedeme na

$$\begin{array}{lcl} S_L & \rightarrow & SS' \\ S' & \rightarrow & \varepsilon | iS_L \\ S & \rightarrow & a \end{array}$$

Výsledná Gramatika je LL(1).

Příklad 1.7

Nelze-li aplikovat levou faktorizaci, provedeme substituci levého rohu a po ní levou faktorizaci.

$$\begin{array}{lcl} A & \rightarrow & aB|CB \\ C & \rightarrow & aC|bB \\ B & \rightarrow & cB|D \end{array}$$

Tato gramatika není LL(1), protože $FIRST(aB) \cap FIRST(CB) = \{a\}$. Po substituci levého rohu dostaneme

$$\begin{array}{lcl} A & \rightarrow & aB|aCB|bBB \\ B & \rightarrow & cB|d \\ C & \rightarrow & aC|bB \end{array}$$

Gramatika po levé faktorizaci již bude LL(1):

$$\begin{array}{lcl} A & \rightarrow & aA'|bBB \\ A' & \rightarrow & B|CB \\ B & \rightarrow & CB|d \\ C & \rightarrow & aC|bB \end{array}$$

V případě kolize FIRST-FOLLOW ($A \rightarrow \alpha|\beta$, $\alpha \Rightarrow^* \varepsilon$, $FOLLOW(A) \cup FIRST(\beta) \neq \emptyset$) se používají tyto transformace:

- Pohlcení terminálu:

  $G = (N, \Sigma, P, S)$, $B \in N$, $a \in \Sigma$, $\alpha, \beta \in (N \cup \varepsilon)^*$

  $$\begin{array}{lcl} A & \rightarrow & \alpha B a \beta \\ B & \rightarrow & \alpha_1 | \dots | \alpha_n \end{array}$$

  transformujeme na gramatiku $G' = (N \cup \{[Ba]\}, \Sigma, P', S)$, $P' = \{A \rightarrow \alpha B a \beta\} \cup \{A \rightarrow \alpha[Ba]\beta\} \cup \{[Ba] \rightarrow \alpha_1 a | \dots | \alpha_n a\}$

- Extrakce pravého kontextu:

  $G = (N, \Sigma, P, S)$, $A, X, Y \in N$, $\alpha\beta \in (N \cup \Sigma)^*$, $a \in FIRST(YB)$. P:

  $$\begin{array}{lcl} X & \rightarrow & \alpha AYB \\ Y & \rightarrow & a\gamma_i \\ Y & \rightarrow & \delta_j \end{array}$$

  $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, k$, $a \in FIRST(\delta_j)$,
  $P' = P - \{X \rightarrow \alpha AY\beta\} \cup \{X \rightarrow \alpha Aa\gamma_1\beta | \dots | \alpha Aa\gamma_m\beta | \alpha A\delta_1\beta | \dots | \alpha A\delta_k\beta\}$,
  $L(G) = L(G')$.

Příklad 1.8

Gramatiku, která není LL(1)

$$\begin{array}{lcl} A & \rightarrow & BDC \\ B & \rightarrow & \varepsilon | aaC \\ C & \rightarrow & c | bC \\ D & \rightarrow & a \end{array}$$

Transformujeme na

$$\begin{array}{lcl} A & \rightarrow & BaC \\ B & \rightarrow & \varepsilon | aaC \\ C & \rightarrow & c | bC \end{array}$$

Další transformací je pohlcení terminálu, $[Ba] \in N$:

$$\begin{array}{lcl} A & \rightarrow & [Ba]C \\ [Ba] & \rightarrow & a | aaCa \\ C & \rightarrow & c | bC \end{array}$$

Levá faktorizace:

$$\begin{array}{lcl} A & \rightarrow & [Ba]C \\ [Ba] & \rightarrow & aE \\ E & \rightarrow & \varepsilon | aCa \\ C & \rightarrow & c | bC \end{array}$$

A nakonec substituce:

$$\begin{array}{lcl} A & \rightarrow & aEC \\ E & \rightarrow & \varepsilon | aCa \\ C & \rightarrow & c | bC \end{array}$$

Výsledná gramatika je LL(1).

1.6 Syntaktická analýza LL(k) gramatik

Definice 1.14

Nechť Σ je abeceda, $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, $k \geq 1$. Definujeme operátor $\oplus_k$ takto:

$$L_1 \oplus_k L_2 = \{w | \exists x \in L_1,\ \exists y \in L_2 :\ w = k : xy\}$$

Poznámka 1.15

$FIRST_k(\alpha\beta) = FIRST_k(\alpha) \oplus_k FIRST_k(\beta)$.

Definice 1.16

Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je bezkontextová gramatika. Pro každé $A \in N$ a $L \subseteq \Sigma^{*k}$ definujeme $T_{A,L}$ — LL(k) tabulka pro (A, L) — jako parciální funkci $T_{A,L} :\ \Sigma^{*k} \rightarrow \{A \rightarrow \alpha_1 | \ldots | \alpha_s\} \times P(\Sigma^{*k})$ takto:

1. $T_{A,L}(u) = `error'$, jestliže neexistuje $A \rightarrow \alpha \in P$: $FIRST_k(\alpha) \oplus_k L$ obsahující řetěz u.
2. $T_{A,L}(u) = (A \rightarrow \alpha, < Y_1, \ldots, Y_m >)$, jestliže $A \rightarrow \alpha$ je jediné pravidlo v P takové, že $u \in FIRST_k(\alpha) \oplus_k L$ a je-li $\alpha = x_0 B_1 x_1 \ldots B_m x_m$, pak $Y_i = FIRST_k(x_i B_{i+1} x_{i+1} \ldots B_m x_m) \oplus_k L$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$.

3. V ostatních případech není $T_{A,L}(u)$ definováno. (Může nastat jen u gramatik, které nejsou LL(k).)

Algoritmus 1.5

Konstrukce LL(k) tabulek pro LL(k) gramatiku

Vstup:

bezkontextová gramatika $G = (N, \Sigma, P, S)$, G je LL(k).

Výstup:

J — množina LL(k) tabulek.

Metoda:

- Inicializace – konstrukce tabulky T_0 LL(k) pro S a $\{\varepsilon\}$. $J := \{T_0\}$.
- Iterace – pro každou tabulku $LL(k) \in J$ s položkou $T(u) = (A \to x_0B_1x_1 \ldots B_mx_m, < Y_1, \ldots, Y_m >)$ **do** $J := J \cup \{T_{B_i}, Y_i\}$ pro všechna $i \in< 1, m >$. Opakuj, dokud se do J dá přidat nějaká LL(k) tabulka.

Algoritmus 1.6

Konstrukce rozkladové tabulky pro LL(k) gramatiku $G = (N, \Sigma, P, S)$

Vstup:

LL(k) gramatika $G = (N, \Sigma, P, S)$, množina LL(k) tabulek J.

Výstup:

rozkladová tabulka pro G: $(J \cup \Sigma \cup \{\$\}) \times \Sigma^{*k} \to ((T_i \cup \Sigma)^* \times \{1 \ldots |p|\}) \cup \{$ odstraň, přijmi, chyba $\}$.

Metoda:

- Je-li $i : A \to x_0B_1x_1 \ldots B_mx_m \in P$ a $T_{A,L} \in J$, pak pro všechna u taková, že $T_{A,L}(u) = (A \to x_0B_1x_1 \ldots B_mx_m, < Y_1, \ldots, Y_m >)$ klademe $M(T_{A,L}, u) = (x_0TB_1, Y_1 \ldots TB_m, Y_mx_m, i)$.
- $M(a, av) =$odstraň pro libovolné $v \in \Sigma^{*(k-1)}$.
- $M(\$, \varepsilon) =$přijmi.
- $M(x, a) =$chyba v ostatních případech.

2 Deterministická syntaktická analýza zdola nahoru

Definice 2.1

Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je bezkontextová gramatika s pravidly očíslovanými $1 \dots p$, $p = |P|$ a $S \Rightarrow_R^{i_1} \alpha_1 \Rightarrow_R^{i_2} \dots \Rightarrow_R^{i_n} \alpha_n = w$ je pravá derivace věty w.

Pak posloupnost čísel pravidel $i_n, \dots, i_2, i_1$ nazveme *pravý rozbor věty* w.

Poznámka 2.2

Přechod od α_{i+1} k α_i má být deterministický.

Možné typy nedeterminismů jsou

- čtení $\times$ redukce
$$\begin{array}{lcl} A & \rightarrow & \alpha.\beta \\ B & \rightarrow & \alpha. \end{array}$$
- redukce $\times$ redukce
$$\begin{array}{lcl} A & \rightarrow & \alpha\beta \\ B & \rightarrow & \beta \end{array}$$

Definice 2.3

Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je bezkontextová gramatika. *Přidruženou gramatikou* ke gramatice G nazveme gramatiku $G' = (N \cup \{S'\}, \Sigma, P \cup \{S' \rightarrow S\}, S')$, kde $S' \notin N \cup \Sigma$.

Definice 2.4

Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je bezkontextová gramatika, G' její přidružená gramatika, $k \geq 0$ celé. Řekneme, že G je LR(k) gramatikou, právě když následující tři podmínky:

1. $S' \Rightarrow_R^* \alpha A w \Rightarrow_R \alpha\beta w$
2. $S' \Rightarrow_R^* \gamma B x \Rightarrow_R \alpha\beta y$
3. $k : w = k : y$

značí, že $\alpha A y = \gamma B x$ (tedy $\alpha = \gamma$, $A = B$, $y = x$).

Poznámka 2.5

Definice postihuje oba typy nedeterminismu.

Definice 2.6

Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je bezkontextová gramatika. *položkou gramatiky* G nazveme každý výraz tvaru $A \rightarrow \alpha.\beta$ pro $A \rightarrow \alpha\beta \in P$. Jestliže $\beta = \varepsilon$, pak výraz $A \rightarrow \alpha.$ nazveme *úplná položka*.

Nechť dále $\omega \in (N \cup \Sigma)^*$. Řekneme, že $A \rightarrow \alpha.\beta$ je *platná položka* pro řetěz ω, právě když existuje pravá větná forma $\eta A u$ ($u \in \Sigma^*$) taková, že $\eta\alpha = \omega$. Řetěz ω nazveme v tomto případě *platná (perspektivní) předpona (viable prefix)*.

Množinu všech platných položek pro řetěz γ budeme značit $I(\gamma)$.

Poznámka 2.7

Směřujeme k tvrzení, že množina platných položek tvoří regulární jazyk.

Lemma 2.8

Jestliže $A \to \alpha.B\beta \in I(\gamma)$, pak též $B \to \upsilon \in I(\gamma)$ pro všechna pravidla $B \to \upsilon \in P$.

Důkaz: Protože $A \to \alpha.B\beta \in I(\gamma)$, existuje pravá větná forma δAw taková, že $\delta\alpha = \gamma$. $\delta\alpha B\beta w \Rightarrow^*_R \delta\alpha B\upsilon w$ je pravá větná forma a tedy $B \to .\upsilon$ je platná položka pro řetěz $\delta\alpha = \gamma$, to jest $B \to .\upsilon \in I(\gamma)$. (operace uzávěru) □

Lemma 2.9

Jestliže platná položka $B \to .\beta \in I(\gamma x)$, $x \in N \cup \Sigma$, pak existuje $c \to \alpha x.\delta \in I(\gamma x)$ taková, že $\delta \Rightarrow^*_R Bz$, $z \in \Sigma^*$.

Důkaz: $B \to .\beta \in I(\gamma x)$, tedy z definice existuje pravá větná forma ηBu, $\eta = \gamma x$. Pak existuje i pravá větná forma ρCv a pravidlo $C \to \alpha x\delta \in P$ takové, že $\rho\alpha x = \gamma x$, a tedy $C \to \alpha x.\delta$ je platná položka pro $\rho\alpha x = \gamma x$ □

Lemma 2.10

Jestliže $B \to \alpha.\beta \in I(\gamma x)$ a $\alpha \neq \varepsilon$, pak $\alpha = \alpha' x$ a $B \to \alpha'.x\beta \in I(\gamma)$.

Důkaz: Z předpokladu $B \to \alpha.\beta \in I(\gamma x)$ plyne existence pravé větné formy $\eta B\nu$ takové, že $\eta\alpha = \gamma x$. Protože $\alpha \neq \varepsilon$, $\alpha' x = \alpha$, tedy $\eta\alpha' = \gamma$. □

Důsledek 2.11

Jestliže $I(\gamma x) \neq \emptyset$, pak $I(\gamma) \neq \emptyset$.

Lemma 2.12

(operace následníka)

Jestliže $A \to \alpha.x\beta \in I(\gamma)$, pak $A \to \alpha x.\beta \in I(\gamma x)$

Důkaz: Jestliže $A \to \alpha.\beta$ je platná pro γ, existuje pravá větná forma ηAu, $\eta\alpha = \gamma$, pak $\eta\alpha x = \gamma x$, tedy $A \to \alpha x.\beta$ je platná pro $\gamma x \ \in I(\gamma x)$. □

Lemma 2.13

Pro libovolnou $\gamma \in (N \cup \Sigma)^*$ a $x \in (N \cup \Sigma)$ lze $I(\gamma x)$ určit na základě znalosti $I(\gamma)$ takto: $I(\gamma x)$ je nejmenší množina M taková, že

1. $\{Y \to \alpha x.\beta | Y \to \alpha.x\beta \in I(\gamma)\} \subseteq M$
2. jestliže $A \to \alpha.B\beta \in M$, pak i $B \to .\upsilon \in M$

Důkaz:

- $M \subseteq I(\gamma x)$ libovolná položka splňující 1.,2., (1. viz. lemma 2.12 , 2. viz. lemma 2.8).
- mějme libovolnou množinu M, splňující 1.,2. Zvolme libovolnou položku z $I(\gamma x)$ $B \to \alpha.\beta$ a ukažme, že patří do M.

  Pro $\alpha = \varepsilon$ viz. lemma 2.9, pro $\alpha \neq \varepsilon$ viz. lemma 2.10.

□

Věta 2.14

Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je libovolná bezkontextová gramatika. Na $(N \cup \Sigma)^*$ definujeme relaci $\sim$ takto: $\gamma_1 \sim \gamma_2$, právě když $I(\sigma_1) = I(\sigma_2)$. Pak $\sim$ je pravou kongruencí konečného indexu (Relací ekvivalence zprava invariantní konečným indexem).

Důkaz:

- Je zřejmé, že jde o ekvivalenci, je definována pomocí rovnosti.
- $\sim$ má konečný index, protože existuje jen konečně mnoho různých množin položek pro gramatiku G.
- $\gamma_1 \sim \gamma_2 \;\Rightarrow\; I(\gamma_1 x) = I(\gamma_2 x)$ plyne z předchozího lemmatu.

$\square$

Lemma 2.15

$I(\varepsilon)$ je nejmenší množina M taková, že

1. $\{S \to .\alpha | S \to \alpha\} \subseteq M$
2. jestliže $A \to .B\beta \in M$, pak i $B \to .\vartheta \in M$ pro každé $B \to \vartheta \in P$.

Důkaz: Viz. lemma 2.13. $\square$

Definice 2.16

Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je libovolná bezkontextová gramatika. Položkovým automatem pro G nazveme pětici $A = (Q, \Gamma, \delta, q_0, F)$, kde

- $Q = \{I(\gamma) | \gamma \in (N \cup \Sigma)^*\}$
- $\Gamma = N \cup \Sigma$
- $q_0 = I(\varepsilon)$
- $\delta :\; \delta(I(\gamma), x) = I(\gamma x)$
- $F :\; Q - \{\emptyset\}$

Příklad 2.1

$$\begin{array}{lcl} S & \to & aAb \\ A & \to & AcB \\ A & \to & B \\ B & \to & d \end{array}$$

	Položky	Následníci
$S_0 \equiv I(\varepsilon)$	$S \to .aAB$	$a : S_1$
$S_1 \equiv I(a)$	$S \to a.Ab$	
	$A \to .AcB$	$A : S_2$
	$A \to .B$	$B : S_3$
	$B \to .d$	$d : S_4$
$S_2 \equiv I(aA)$	$S \to aA.b$	$b : S_5$
	$A \to A.cB$	$c : S_6$
$S_3 \equiv I(aB)$	$A \to B.$	'redukuj'
S_4	$B \to d.$	'redukuj'
S_5	$S \to aAb.$	'redukuj'
S_6	$A \to Ac.B$	$B : S_7$
	$B \to .d$	$d : S_4$

2.1 Sestrojení LR(0) analyzátoru

Algoritmus 2.1
Výpočet úplné množiny LR(0) stavů

Operace uzávěru.
function UZ(S)
begin
UZ:=S
repeat
forall $A \to \alpha.B\beta \in S,\ B \to \omega \in P,\ B \to .\omega \notin UZ$
do $UZ := UZ \cup \{B \to .\omega\}$
until žádná další položka se do UZ nedá přidat.
return(UZ)
end

Operace následníka.
function Nasl(S,X)
Nasl(S,X):=UZ($\{A \to \alpha x.\beta | A \to \alpha.x\beta \in S\}$)

BEGIN
C:={UZ($S' \to .S$)};
repeat
forall $Z \in C,\ X \in N \cup \Sigma$: $\mathrm{Nasl}(Z, X) \neq \emptyset \wedge \mathrm{Nasl}(Z, X) \notin C$
do C:=$C \cup \{\mathrm{Nasl}(Z, X)\}$
until žádná další množina položek se do C nedá přidat
return(C)
END

Definice 2.17
Stav položkového automatu je *neadekvátní*, jestliže platí:

- tento stav obsahuje alespoň jednu úplnou položku $A \rightarrow \alpha.$ a alespoň jednu neúplnou položku $B \rightarrow \beta.\gamma$, kde $1 : \gamma \in \Sigma$
- Tento stav obsahuje alespoň dvě různé úplné položky.

Poznámka 2.18

Lze ukázat, že gramatika G je LR(0), právě když položkový automat pro G nemá žádné neadekvátní stavy.

2.2 Jednoduché LR(k) gramatiky

Definice 2.19

Bezkontextovou gramatiku $G = (N, \Sigma, P, S)$ nazveme *jednoduchou LR(k) gramatikou*, jestliže pro množinu L stavů položkového automatu gramatiky G a dvě různé položky $A \rightarrow \alpha.\beta$ a $B \rightarrow \gamma.\delta$ z q, $q \in L$ platí alespoň jedna z následujících podmínek:

1. $\beta \neq \varepsilon, \ \delta \neq \varepsilon$
2. $\beta = \varepsilon, \ \delta \neq \varepsilon$ a $1 : \delta \in \Sigma$, $FOLLOW_k(A) \cap FIRST_k(\delta.FOLLOW_k(B)) = \emptyset$
3. $\beta \neq \varepsilon, \ \delta = \varepsilon$ a $1 : \beta \in \Sigma$, $FOLLOW_k(B) \cap FIRST_k(\beta.FOLLOW_k(A)) = \emptyset$
4. $\beta = \varepsilon, \ \delta = \varepsilon$ a $FOLLOW_k(A) \cap FOLLOW_k(B) = \emptyset$

2.3 Analýza LR(k) gramatik

Definice 2.20

Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je bezkontextová gramatika, $k \geq 0$ celé. Libovolnou dvojici $< A \rightarrow \alpha.\beta, \ L >$, kde $A \rightarrow \alpha.\beta$ je položka gramatiky G v $L \subseteq \Sigma^{*k}$ nazveme *k-položkou gramatiky G*.

Řekneme, že k-položka $< A \rightarrow \alpha.\beta, \ L >$ je *platná* pro řetěz ω, $\omega \in (N \cup \Sigma)^*$, právě když existuje pravá větná forma $\eta A u$ taková, že $\eta\alpha = \omega$ a $k : u \in L$. Množinu všech k-položek platných pro řetěz γ označme $I_k(\gamma)$.

Definice 2.21

Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je bezkontextová gramatika, $k \geq 0$ celé, G' je přidružená gramatika. Nechť $\mathcal{K}'$ je množina všech položek pro gramatiku G' a definujme přechodovou funkci $\delta' : \ \mathcal{K}' \times (N \cup \Sigma) \rightarrow \mathcal{K}'$ takto:
pro každé $K \in \mathcal{K}'$, $x \in (N \cup \Sigma)$ je $\delta'(K, x)$ nejmenší množina M taková, že

1. $M \supseteq \{< Y \rightarrow \alpha x.\beta, \ L > \mid < Y \rightarrow \alpha.x\beta, \ L > \in K\}$
2. jestliže $< A \rightarrow \alpha.B\beta, \ L > \in M$, pak pro každé pravidlo $B \rightarrow \omega \in P$, $< B \rightarrow .\omega, \ FIRST_k(\beta.L) > \in M$.

Dále označme $K_0 \in \mathcal{K}'$ jako nejmenší množinu M takovou, že

1. $M \supseteq \{< S' \rightarrow .S, \ \perp >\}$

2. jestliže $< A \rightarrow .B\beta.L > \in M$, pak pro každé pravidlo $B \rightarrow \omega \in P$, $< B \rightarrow .\omega,\ FIRST_k(B.L) > \in M$.

Konečně označme $\mathcal{K}$ množinu všech prvků z $\mathcal{K}'$ dosažitelných z K_0 pomocí předchozí funkce δ'. nechť dále δ značí restrikci δ' na $\mathcal{K} \times (N \cup \Sigma)$. Konečný automat $\mathcal{A} = (\mathcal{K}, N \cup \Sigma, \delta, K_0, F)$, kde $F = \mathcal{K} - \{\emptyset\}$ nazveme *k-položkovým automatem pro G* (charakteristickým konečným LR(k) automatem).

Poznámka 2.22

Lze ukázat, že G je $LR(k)$, právě když platí

1. Jsou-li $< A \rightarrow \alpha., L_1 >, < B \rightarrow \beta., L_2 > \in K$, $(K \in \mathcal{K})$ takové, že $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, pak $A \rightarrow \alpha = B \rightarrow \beta$.
2. Jsou-li $< A \rightarrow \alpha., L_1 >, < B \rightarrow \beta_1.\beta_2, L_2 > \in K$, $(K \in \mathcal{K})$, kde $1 : \beta_2 \in \Sigma$, pak $L_1 \cap FIRST_k(\beta_2.L_2) = \emptyset$.

Definice 2.23

Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je bezkontextová gramatika, $k \geq 0$ celé. Definujme funkci EFF_k (**E**mpty-**F**ree **F**irst) takto:
$EFF_k(\omega) = \{t \in \Sigma^{*k} | t \in FIRST_k(\omega) \wedge \omega \Rightarrow^* \beta \Rightarrow tv$, kde $\beta \neq Atv\}$.

Algoritmus 2.2

Algoritmus konstrukce k-položkového automatu pro G

Vstup:

Přidružená gramatika G'

Výstup:

k-položkový automat pro G

Metoda:

function Uz(in Z)
begin
  repeat
    forall $< A \rightarrow \alpha.\beta, u >$, $B \rightarrow w \in P$, $v \in FIRST_k(\beta.u) :< B \rightarrow \omega, v > \notin Z$
      do $Z := Z \cup \{< B \rightarrow .\omega, v >\}$
  until (žádná nová k-položka se do Z nedá přidat)
  return(Z)
end

function Nasl(Z,X)
begin
  $J := \{< A \rightarrow \alpha x.\beta, u > | < A \rightarrow \alpha.x\beta, u > \in Z\}$
  return(Uz(J))
end

begin
$\mathcal{K} := \{\{< S' \to .S, \perp >\}\}$
$\mathcal{K} := \{ \mathrm{Uz}(\mathcal{K}) \}$
repeat
forall $Z \in \mathcal{K}, A \in N \cup \Sigma : Nasl(Z, A) \neq \emptyset$ and $Nasl(Z, A) \notin \mathcal{K}$
do $\mathcal{K} := \mathcal{K} \cup \{Nasl(Z, A)\}$
until žádný nový stav se do $\mathcal{K}$ nedá přidat
end

Definice 2.24
Nechť q je stav LR(k) automatu. klademe $jádro(q) = \{A \to \alpha.beta \mid < A \to \alpha.beta, L > \in q\}$.

Metoda konstrukce:

1. Zkonstruuj LR(k) automat $\mathcal{K} = \{K_0, K_1, \ldots, K_n\}$.
2. Pro každé jádro v LR(k) automatu najdi všechny stavy s tímtéž jádrem a nahraď je jejich sjednocením.
3. Nechť $Y' = \{Y_0, \ldots, Y_m\}$ je výsledná množina stavů po kroku 2. Analyzační akce čti/redukuj se převedou přímo z LR(1) automatu. Nevzniknou-li takto analyzační konflikty, pak G je LALR(k), jinak G není LALR(k).
4. Funkci $Nasl$ vytvoříme takto: Nechť stav Y vznikl sjednocením LR(1) stavů $K_{i_1}, \ldots, K_{i_r}$, $X \in N \cup \Sigma$, $Nasl(Y, X) = K$, kde K je sjednocením všech stavů, které mají stejné jádro jako $Nasl(K_{i_j}, X)$, $j \in < 1, r >$.

Poznámka 2.25
{ stavy LALR } = { stavy LR(0) }.

Definice 2.26
Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$. Označme Q množinu všech stavů LR(0) automatu A Q' množinu všech stavů LR(k) automatu. *Přesný pravý kontext* LR(0) položky $A \to \alpha.\beta$ ve stavu $q \in Q$ definujeme takto:
$ERC_k(q, < A \to \alpha.\beta >) = \{t \in \Sigma^{*k} \mid \exists q' \in Q' : q = \text{jádro}(q') \wedge < A \to \alpha.\beta, t > \in q'\}$
ERC znamená **E**xact **R**ight **C**ontext.

Definice 2.27
Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je bezkontextová gramatika , $k \geq 1$ celé, Q množina stavů LR(0) automatu pro gramatiku G. Řekneme, že G je LALR(k), jestliže $\forall q \in Q$, $\forall p \in P$ jsou následující množiny vzájemně po dvou disjunktní:

$$S_q = \{t \mid < A \to \alpha.\beta \in q, \beta \neq \varepsilon, t \in EFF_k(\beta.ERC_k(q, < A \to \alpha\beta >))\}$$

$$S_{q,p} = ERC_k(q, < p : A \to \alpha. >)$$

Poznámka 2.28

G je LALR(1), právě když pro $A \to \alpha.\beta$ a $B \to \gamma.\delta$

1. $\beta \neq \varepsilon \wedge \delta \neq \varepsilon$
2. $\beta \neq \varepsilon \wedge \delta = \varepsilon \wedge FIRST(\beta.LA(q, A)) \cap LA(q, B) = \emptyset$
3. $\beta = \varepsilon \wedge \delta \neq \varepsilon \wedge FIRST(\delta.LA(q, B)) \cap LA(q, A) = \emptyset$
4. $\beta \neq \varepsilon \wedge \delta = \varepsilon \wedge LA(q, A) \cap LA(q, B) = \emptyset$

Algoritmus 2.3

Určení pravých kontextů generovaných a pravých kontextů šířených pro $k = 1$.

Vstup:

Báze stavů LR(0) automatu pro G, označíme ji I.

Výstup:

- Pravé kontexty generované položkami ve stavu I pro jádro stavu $Nasl(I, X)$.
- Pravé kontexty šířené položkami ve stavu I pro jádro stavu $Nasl(I, X)$.

Metoda:

nechť $\# \notin N \cup \Sigma$. Pravý kontext $\perp$ je pro položku $S' \to .S$ generován.

forall položky $< B \to \gamma.\delta > \in I$ **do**
begin
$J := UZ(\{< B \to \gamma.\delta, \# >\})$
if $< A \to \alpha.X\beta, a > \in J \wedge a \neq \#$ **then**
a je generován pro položku $< A \to \alpha X.\beta > \in Nasl(I, X)$;
if $< A \to \alpha.X\beta, \# > \in J$ **then**
pravý kontext se dědí (šíří) z položky $< B \to \gamma.\delta > \in I$
na položku $< A \to \alpha X.\beta > \in Nasl(I, X)$
end

Algoritmus 2.4

Efektivní výpočet přesných pravých kontextů (LA) pro bázové položky stavů LALR(1) automatu.

Vstup:

$G = (N, \Sigma, P, S)$

Výstup:

ERC

Metoda:

1. Zkonstruuj bázi LR(0) automatu pro G.

2. Pomocí předchozího algoritmu urči pro každou bázi stavu I a pro každé $X \in N\Sigma$ pravé kontexty, které jsou pro $Nasl(I, X)$ generovány, resp. řízeny.

3. Zřiď tabulku tvaru: řádky budou označeny položkami bází, sloupce budou obsazeny pravými kontexty $ERC($ stav, položka $)$.

   3.1. inicializuj první sloupec takto: do tabulky zapiš jen generované pravé kontexty, ostatní := $\emptyset$.

   3.2. iterace: (Round-Robin)
   Pro každý stav I a každou položku $i \in I$ a symbol X, je-li jejich kontext šířen na položku $j \in Nasl(I, X)$, **do** change := false
   for $NewERC := ERC(Nasl(I, X), j) \cup ERC(I, i)$,
       if $NewERC \neq ERC(Nasl(I, X), j)$ **then**
           $ERC(Nasl(I, X), j) := NewERC$, change := true;
   until not change

Literatura

[1] Chytil, M.: Teorie automatů a formálních jazyků. SPN, Praha 1982

[2] Češka, M., Beneš, M., Hruška, T.: Překladače. Nakladatelství VUT, Brno 1993