

# Obsah

<b>1</b>	<b>Simulace</b>	<b>4</b>
1.1	Úvod do předmětu . . . . .	4
1.1.1	Slovo autora . . . . .	4
1.1.2	Co jsou simulace . . . . .	4
1.2	Ilustrační příklad . . . . .	6
1.2.1	Řešení orientované na události . . . . .	6
1.2.2	Řešení orientované na procesy . . . . .	10
1.3	Kompartmentová analýza . . . . .	13
1.3.1	Nastínění problému . . . . .	13
1.3.2	Diferenciální rovnice . . . . .	13
1.3.3	Metoda Runge–Kutta . . . . .	14
1.3.4	Metoda prediktor–korektor . . . . .	15
1.3.5	Diferenciální rovnice 2. řádu . . . . .	15
1.3.6	Řešení kompartmentové analýzy . . . . .	15
1.4	Simulační kalendáře . . . . .	16
1.4.1	Základní typy kalendářů . . . . .	16
1.4.2	Kalendář jako abstraktní datový typ . . . . .	18
1.4.3	Simulační jádro . . . . .	19
1.4.4	Kalendář jako binární strom . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Základy teorie pravděpodobnosti</b>	<b>20</b>
2.1	Pravděpodobnost . . . . .	21
2.1.1	Definice pravděpodobnosti . . . . .	21
2.1.2	Vlastnosti pravděpodobnosti . . . . .	21
2.1.3	Podmíněná pravděpodobnost . . . . .	22
2.1.4	Jevové pole . . . . .	23
2.1.5	Geometrická pravděpodobnost . . . . .	23
2.2	Náhodné veličiny . . . . .	24
2.2.1	Distribuční funkce . . . . .	25
2.2.2	Charakteristické veličiny . . . . .	26
2.2.3	Sčítání náhodných veličin . . . . .	28
2.2.4	Charakteristická funkce . . . . .	28
2.3	Laplaceova transformace . . . . .	29
2.4	Typy rozdělení pravděpodobnosti . . . . .	29
2.4.1	Exponenciální rozdělení . . . . .	29
2.4.2	Normální rozdělení . . . . .	30
2.4.3	Binomické rozdělení . . . . .	31
2.4.4	Geometrické rozdělení . . . . .	31
2.4.5	Poissonovo rozdělení . . . . .	33
2.4.6	Erlangovo rozdělení . . . . .	34

<b>3</b>	<b>Náhodná čísla</b>	<b>34</b>
3.1	Generování náhody . . . . .	35
3.2	Generování náhodných číslic . . . . .	35
3.2.1	Neprogramové generování . . . . .	35
3.2.2	Metoda kvadratického středu . . . . .	36
3.2.3	Kongruenční metody . . . . .	36
3.2.4	Metoda Monte Carlo . . . . .	37
3.2.5	Smíšené generátory . . . . .	37
3.2.6	Některé používané generátory . . . . .	37
3.2.7	Kongruence, prvočíselné rozklady . . . . .	37
3.3	Testování hypotéz . . . . .	41
3.3.1	Základní pojmy . . . . .	41
3.3.2	Test dobré shody . . . . .	42
3.3.3	Kolmogorovův–Smirnovův test . . . . .	43
3.3.4	Frekvenční test . . . . .	43
3.3.5	Test náhodnosti výskytu číslic . . . . .	43
3.3.6	Poker test . . . . .	44
3.3.7	Test výskytu úplných sad číslic . . . . .	44
3.3.8	Test minima a maxima . . . . .	45
3.4	Generování náhodných veličin . . . . .	45
3.4.1	Metoda inverzní transformace . . . . .	45
3.4.2	Zamítací metoda . . . . .	46
3.4.3	Interpolační metoda . . . . .	46
3.4.4	Normální rozdělení . . . . .	46
3.4.5	Geometrické rozdělení . . . . .	47
3.4.6	Binomické rozdělení . . . . .	47
3.4.7	Poissonovo rozdělení . . . . .	48
3.4.8	Obecné metody generování . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Markovovské procesy</b>	<b>49</b>
4.1	Markovovské řetězce . . . . .	49
4.2	Diskrétní markovovské řetězce . . . . .	51
4.2.1	Definice pojmů . . . . .	51
4.2.2	Chapman–Kolmogorovovy rovnice . . . . .	53
4.3	Markovovy procesy . . . . .	53
4.3.1	Pravděpodobnosti přechodu . . . . .	54
4.3.2	Chapman–Kolmogorovovy rovnice. . . . .	55
4.4	Procesy vzniků a zániků . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Systémy hromadné obsluhy</b>	<b>57</b>
5.1	Úvod do problematiky . . . . .	57
5.1.1	Základní pojmy . . . . .	58
5.1.2	Řádové srovnávání funkcí . . . . .	58
5.1.3	Kendalova klasifikace . . . . .	59
5.1.4	Charakteristické veličiny . . . . .	59

5.1.5	Obvyklý postup při analýze . . . . .	60
5.2	Systém $M/M/1$ . . . . .	61
5.2.1	Přechodový diagram . . . . .	61
5.2.2	Řešení systému . . . . .	61
5.2.3	$z$ -transformace . . . . .	62
5.2.4	Ostatní charakteristické veličiny . . . . .	63
5.2.5	Shrnutí . . . . .	66
5.3	Busy period . . . . .	66
5.4	Jiné frontové režimy . . . . .	67
5.4.1	Inverzní frontový režim . . . . .	67
5.4.2	Obecný frontový režim . . . . .	68
5.5	Teorie obnovy . . . . .	68
5.5.1	Hromadná obsluha s předností . . . . .	68
5.5.2	Základní pojmy teorie obnovy . . . . .	69
5.5.3	Systém s předností . . . . .	70
5.6	Systém s rezignací . . . . .	72
5.6.1	Motivace . . . . .	72
5.6.2	Popis systému s rezignací . . . . .	72
5.6.3	Řešení systému s rezignací . . . . .	73
5.6.4	Ostatní parametry systému s rezignací . . . . .	73
5.7	Systém $M/M/n$ . . . . .	74
5.7.1	Popis systému $M/M/n$ . . . . .	74
5.7.2	Řešení systému $M/M/n$ . . . . .	75
5.7.3	Ostatní parametry systému $M/M/n$ . . . . .	77
5.8	Systém $M/M/\infty$ . . . . .	79
5.9	Systém se ztrátami . . . . .	80
5.9.1	Popis systému se ztrátami . . . . .	80
5.9.2	Řešení systému se ztrátami . . . . .	80
5.9.3	Parametry systému se ztrátami . . . . .	81
5.10	Systémy bez čekání . . . . .	83
5.10.1	Řešení systému bez čekání . . . . .	83
5.10.2	Limitní přechod . . . . .	84
5.11	Systém $M/E_r/1$ . . . . .	84
5.11.1	Metoda fází . . . . .	84
5.11.2	Systém $M/E_1/1$ . . . . .	86
5.11.3	Systém $M/E_2/1$ . . . . .	86
5.12	Systém $E_r/M/1$ . . . . .	87
5.12.1	Popis systému $E_r/M/1$ . . . . .	87
5.12.2	Řešení systému $E_r/M/1$ . . . . .	88
5.13	Systém $M/G/1$ . . . . .	89
5.13.1	Laplaceova transformace . . . . .	89
5.13.2	Výpočty momentů náhodných veličin . . . . .	91
5.13.3	Popis systému $M/G/1$ . . . . .	92
5.13.4	Řešení systému $M/G/1$ . . . . .	93
5.13.5	Vyjádření jednodušších systémů z $M/G/1$ . . . . .	95

5.14 Závěrem . . . . .	96
------------------------	----

## Seznam obrázku

1 Ukládání účinné látky v organismu . . . . .	13
2 Zjednodušený systém pro kompartmentovou analýzu . . . . .	13
3 Buffonova úloha . . . . .	24
4 Odhad čísla $\pi$ pomocí Buffonovy úlohy . . . . .	24
5 Cestující hippie . . . . .	50
6 Přechodový graf procesu vzniků a zániků . . . . .	56
7 Přechodový graf systému $M/M/1$ . . . . .	61
8 Schéma systému s předností . . . . .	69
9 Pojem životnosti . . . . .	69
10 Schéma systému s rezignací . . . . .	72
11 Schéma systému $M/M/n$ . . . . .	75
12 Přechodový graf systému $M/M/n$ . . . . .	76
13 Přechodový graf systému se ztrátami . . . . .	80
14 Stavový diagram systému $M/E_r/1$ – metoda fází . . . . .	85
15 Schéma činnosti systému $M/G/1$ . . . . .	92
16 Přechodový graf systému $M/G/1$ . . . . .	94
17 Schéma systému $M/H_2/1$ . . . . .	96

## 1 Simulace

### 1.1 Úvod do předmětu

#### 1.1.1 Slovo autora

Simulace obsahují dvousemestrální přednášku doc. Sedláčka ze školního roku 1993/94 a části cvičení, ve kterých se v podstatě přednášelo.  $\text{\TeX}$ -oval a komentáři opatřil Dejva; čepráno z poznámek zčásti Dejvových, zčásti od Aleny Kratochvílové.

#### 1.1.2 Co jsou simulace

Simulace a počítačové modelování je jednou z velmi významných oblastí využití výpočetní techniky; vlastně původní motivace pro vývoj počítačů vycházela právě z oblasti modelování.

Simulační systémy nám v zásadě slouží k tomu, abychom s nimi prováděli *experimenty*; simulace je modelování na počítači.

V některých oblastech bychom se přitom bez simulačních experimentů neobešli, a to zejména z těchto důvodů:<sup>1</sup>

- simulační experiment je levnější než reálný pokus (drahý materiál..)
- pokus v reálu není možný (je nad technické možnosti)

<sup>1</sup>Příklady v závorce jsem plácal, jak mě napadly; určitě vymyslíte spoustu dalších.

- originál simulovaného systému neexistuje nebo je nedostupný (simulace pochodů v kosmickém prostoru)
- skutečné pokusy jsou neetické (jaderné zbraně)
- pomocí simulování mimořádných situací jsou trénováni zaměstnanci a jejich reakce na tyto situace (jaderné elektrárny, též např. letecké simulátory)

Při tvorbě simulačního systému zpravidla uplatníme tyto fáze:

- sledování původního (reálného) systému
- popis činnosti systému – vytvoření modelu, obrázků, rovnic
- formální popis systému
- návrh simulačního programu
- ladění a verifikace programu
- simulační experimenty
- aplikace výsledků.

Zjišťujeme přitom, že originál má svoji vnitřní strukturu, může se nacházet v určitých *stavech*, existují v něm rozlišitelné *situace*, a probíhají v něm jisté *děje*, které jej převádí z jedné situace do jiné. Přitom soubor všech situací systému je uzavřen vůči dějům (tedy je schopen reagovat na každou situaci).

*Simulace* je tedy výzkumová metoda, která spočívá v tom, že zkoumaný dynamický systém nahradíme simulátorem a provádíme na něm pokusy s cílem získat informaci o původním zkoumaném objektu.

Kromě příkladů, které jsme uváděli v odstavci o důvodech, pro které vůbec simulujeme, nás zajisté napadnou další:

**Křižovatka.** Na křižovatku přijíždějí auta z různých směrů, a také do různých směrů odjíždějí. Simulací proudů vozidel se snažíme najít optimální režim.

**Fotosyntéza.** Chemické procesy fotosyntézy závisí na přeskocích elektronů, což se opět dá simulovat.

**Buňky.** Známá hra „Život“ je vlastně také jistou simulací, abychom se přiblížili realitě, můžeme simulovat podmínky dělení buněk apod.

**Fronty.** Systémy hromadné obsluhy, ke kterým postupně v čase přicházejí požadavky, které pak linka obsluhuje. Budeme se jimi zabývat podrobněji.

## 1.2 Ilustrační příklad

Při tvorbě simulačního programu stojí programátor před úkolem zejména navrhnout:

- datové struktury, reprezentující stavy systému
- operátory, reprezentující změny stavů
- čas v modelu (tzv. simulární čas)
- synchronizace stavových změn.

Tyto úkoly si ilustrujeme na příkladu, který se obvykle uvádí v úvodu do simulací: představme si lokalitu, na které se těží písek, a stavbu, na kterou se písek vozí. K dispozici je určitý počet aut, každé z nich má určité parametry (v zásadě každé auto svoje vlastní) – únosnost, rychlost; úkolem je zjistit, za jakou dobu jsme schopni těmito auty odvozit jisté množství písku. Přitom u nakládky i vykládky může být současně jen jedno auto, a na cestě je jedno úzké místo, kde nelze předjíždět.

### 1.2.1 Řešení orientované na události

Uvedeme si nejprve řešení našeho příkladu, při kterém každé auto bude „mrtvý“ (pasivní) objekt, u kterého budou nastávat události; my je budeme sledovat a provádět určité akce.

```

type auto = record
    rychlost,nosnost,nakladka,vykladka: integer;
    stav: (nakladano,jededoC,jededoD,jededoB,
          frontavB,vykladano,jededoA,frontavA);
    vpredu,vzadu: ^auto;
    kdy_zmena: integer;
end;
fronta = record
    prvni, posledni: ^auto;
end;

procedure do_fronty(A: ^auto; var F: fronta);
begin
    if prazdna_fronta(F) then
        begin
            F.prvni:=A;
            F.posledni:=A;
        end
    else
        begin
            A^.vpredu:=F.posledni;
            F.posledni^.vzadu:=A;
            F.posledni:=A;
        end;
end;

```

```

procedure z_fronty(var F: fronta);
begin
  with F do
    if prvni=posledni then
      begin
        prvni:=nil;
        posledni:=nil;
      end
    else
      begin
        prvni:=prvni^.vzadu;
        prvni^.vpredou:=nil;
      end;
    { a ještě uřízati ukazatele u odebraného auta }
  end;
end;

```

Obecně lze při psaní simulačních programů doporučit následující schéma:

- deklarace
- inicializace
- simulace
- výsledky.

Toto schéma použijeme nyní v pokračování našeho příkladu s převážením písku.

```

procedure inicializace;

procedure inic_frontu(var F: fronta);
begin
  with F do
    begin
      prvni:=nil;
      posledni:=nil;
    end;
end;

procedure inic_auta(pocet_aut: integer);
var i: integer;
begin
  for i:=1 to pocet_aut do
    begin
      new(auta[i]);
      with auta[i]^ do

```

```

        begin
            readln(nosnost, rychlost, nakladka, vykladka);
            vpredu:=nil;
            vzadu:=nil;
            stav:=frontaA;
            kdy_zmena:=maxint;
        end;
    do_fronty(auta[i],A);
end;
end;

{ vlastní inicializace }
begin
    simul_cas:=0;
    inic_frontu(A);
    inic_frontu(B);
    inic_frontu(C);
    inic_auta;
end;

procedure zmena(a: integer);
var pom: integer;
begin
    with auta[a]^ do
        begin
            case stav of
                nakladano: begin
                    z_fronty(A);
                    if not prazdna_fronta(A) then
                        A.prvni^.kdy_zmena:=0;
                    kdy_zmena:=round(vzda1AC/(rychlost*krok));
                    stav:=jededoC;
                end;
                jededoC: ...
                { změny ostatních stavů }
            end;
        end;
end;

procedure simulace;
begin
    písek:=celá_hromada;
    naložených:=0;
    auta[1]^kdy_zmena:=0; { Start! }

```



```

while (pisek>0) or (nalozenych>0) do
  begin
    staci:=false;
    while not staci do
      begin
        staci:=true
        for i:=1 to pocet_aut do
          begin
            if auta[i]^kdy_zmena=0 then
              begin
                zmena(i);
                staci:=false;
              end;
            end;
          end;
        simul_cas:=simul_cas+1;
        for i:=1 to pocet_aut do
          with auta[i]^ do
            kdy_zmena:=kdy_zmena-1;
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;
end;

```

Takto jsme tedy uplatnili ten přístup, kdy v každém kroku zvětšíme simulární čas o jednotku a zkoumáme, která auta podléhají změně. Pokud je ale tento krok dostatečně jemný, většinou se „nic neděje“ – ve většině kroků k žádné změně nedojde. Proto může být vhodné provádět simulaci *asynchronně*, tedy posouvat hodiny simulárního času nepravidelně, a to tak, že si vždy zjistíme, kdy nastane nejbližší změna, a simulární čas necháme skokem uplynout až do tohoto okamžiku.<sup>2</sup> Proto program upravíme:

```

kdy_zmena:=simul_cas+vzdaLCD/rychlost; {apod.}
...

procedure simulace;
begin
  auta[1]^kdy_zmena:=simul_cas; { Start! }
  while ... do
    begin
      prvni_zmena:=auta[1]^kdy_zmena;
      prvni:=1;
      for i:=2 to pocet_aut do
        begin
          with auta[i]^ do
            begin

```

---

<sup>2</sup>Předchozí způsob se pak nazývá *synchronní*; může být vhodný zejména pokud chceme průběh simulačního experimentu zobrazovat v reálném čase – typicky např. již vzpomínané letecké simulátory.

```

        if prvni_zmena>kdy_zmena then
            begin
                prvni_zmena:=kdy_zmena;
                prvni:=i;
            end;
        end;
    end;
    simul_cas:=prvni_zmena; { skok simulárního času }
    zmena(prvni);
end;
end;

```

### 1.2.2 Řešení orientované na procesy

Nyní se na náš příklad podíváme jiným způsobem: budeme považovat auta za *procesy*, tedy za *aktivní* komponenty simulačního systému.

**Prototyp procesu.** Vezmeme nejprve obecné schéma takového procesu, které může vypadat například takto:

```

process jméno(parametry);
...
while true do
begin
    událost1;
    čekej;
    událost2;
    počkej(čas.interval);
    událost3;
    aktivuj(jiný proces);
    událost4;
end;

```

Tyto procesy se nechovají jako klasické podprogramy: řízení se předává obecně „někam doprostřed“, tedy ne nutně na začátek. Při implementaci se pak použije strojová instrukce **BALR reg1,reg2**, kde v registru 1 je adresa, odkud je volán jiný proces, a v registru 2 adresa, kam se skáče.

Proces přitom může provádět zejména tyto činnosti:

**čekej** – proces čeká, dokud ho někdo nevyzve k pokračování

**počkej** – proces se zastaví na určitou dobu simulárního času

**aktivuj** – proces „vzbudí“ jiný proces, který je ve stavu **čekej**

Jak tedy můžeme implementovat naše převážení písku pomocí procesů: každé auto bude představovat proces zhruba následujícího tvaru:

```
process auto(nosnost, rychlost, nakládka, vykládka: real);
var vpředu, vzadu: ^auto;

procedure nalož;
begin
  if hromada_písku>0 then
    begin
      hromada_písku:=hromada_písku-nosnost;
      naložených:=naložených+1;
      počkej(nakládka);
    end
  else čekej;
end;

procedure počkej_ve_frontě(která: fronta);
begin
  zařaď_se(která);
  if vpředu<>nil then čekej;
end;

procedure odejdi_z_fronty(která:fronta);
begin
  if vzadu<>nil then aktivuj(vzadu^);
  vyřaď_se(která);
end;

{ ujed' - čeká časový interval;
  vylož je podobné nalož }

procedure jízda_CD;
begin
  zařaď_se(fronta_CD);
  if vpředu<>nil then
    begin
      if vpředu^.plán>simulární_čas+round(vzdál_CD/rychlost) then
        počkej(vpřed^.plán-simulární_čas)
      else
        ujed'(vzdál_CD);
    end
  else
    ujed'(vzdál_CD);
  vyřaď(fronta_CD);
end;

{tělo procesu}
```

```

begin
  počkej(0);
  while true do
    begin
      počkej_ve_frontě(fronta_v_A);
      nalož;
      odejdi_z_fronty(fronta_v_A);
      ujeď(vzdálenost_AC)
      jízda_CD; { úzké místo}
      ujeď(vzdálenost_DB);
      počkej_ve_frontě(fronta_v_B);
      vylož;
      odejdi_z_fronty(fronta_v_B);
      ujeď(vzdálenost_BA);
    end;
  end;
end;

```

**Stavy procesů.** Procesy, jak známo, mohou nabývat několika zásadních stavů. Nejinak je tomu v simulačních systémech – uvedeme si tedy stavy procesů s jejich interpretací ze simulačních systémů:

**aktivní** – simulární čas dospěl do okamžiku, kdy se něco má provést, resp. se provádí

**suspendovaný** – plynutím času dospějeme k okamžiku, kdy má něco dělat (tedy např. při vyvolání počkej)

**pasivní** – není naplánováno, ve kterém okamžiku se stane aktivním (např. čekej)

**ukončený** – umělý stav, který nelze rozlišit od pasivního (ukončený proces se již nevzbudí, ale to „zvenku“ nepoznáme)

Uvedeme si nyní příklad přeskoků elektronů: možné stavy jsou pak obsazený, neobsazený, přeskakuje. Procesy představují cesty, při přeskoku jsou aktivní.

```

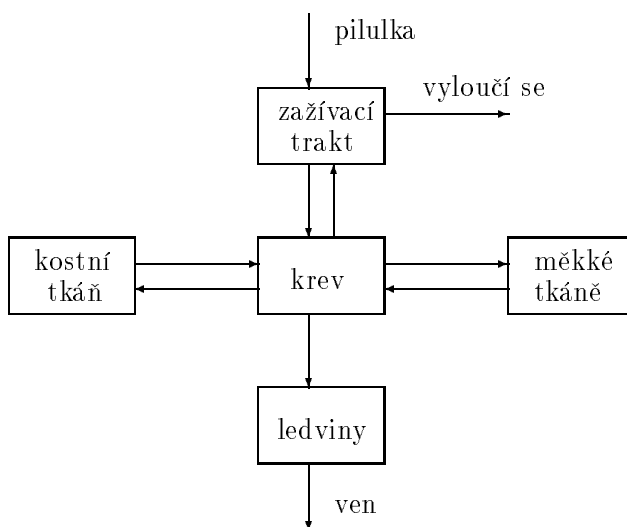
begin { cesta }
  while true do
    begin
      čekej;
      odkud^.stav:=přeskakuje;
      kam ^.stav:=přeskakuje;
      zruš_plány(odkud^.první_od,test_kam);
      zruš_plány(kam ^.první_do,test_odkud);
      nové_plány(odkud^.první_do,test_odkud);
      nové_plány(kam ^.první_od,test_kam);
      odkud^.stav:=volný;
      kam ^.stav:=obsazený;
    end;
  end;
end;

```

## 1.3 Kompartmentová analýza

### 1.3.1 Nastínění problému

Kompartmentová analýza se objevuje např. v lékařství, kdy řešíme problém tohoto typu (viz obrázek 1): sledujeme ukládání vápníku v organismu, pokusná osoba polyká pilulky, z nich se vápník vstřebává do krve, z krve pak přechází do kostí a do měkkých tkání (a zpět), a konečně z krve se také přes ledviny vylučuje z organismu ven.



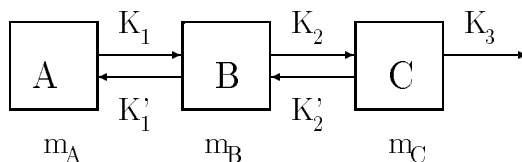
Obrázek 1: Ukládání účinné látky v organismu

Systém poněkud zjednodušíme (viz schéma na obr. 2), uvážíme pouze tři části  $A, B, C$ . Tyto části, kterými látka prochází, nazveme *kompartmenty*. Zajímá nás množství látky, které projde; budeme předpokládat, že látky jsou rozprostřeny rovnoměrně a že konstanta  $k$ , která popisuje přelévání látky mezi kompartmenty, nezávisí na množství látky v kompartmentech.

### 1.3.2 Diferenciální rovnice

Popisem systému dostaneme následující systém diferenciálních rovnic:

$$\frac{dm_A}{dt} = K'_1 \cdot m_B - K_1 \cdot m_A$$



Obrázek 2: Zjednodušený systém pro kompartmentovou analýzu

$$\begin{aligned}\frac{dm_B}{dt} &= K_1 \cdot m_A + K_2' \cdot m_C - (K_1' \cdot m_B + K_2 \cdot m_B) \\ \frac{dm_C}{dt} &= K_2 \cdot m_B - (K_2' \cdot m_C + K_3 \cdot m_C)\end{aligned}$$

kde hodnoty  $m_A, m_B, m_C$  představují množství sledované látky v jednotlivých kompartmentech  $A, B, C$ , a konstanty  $K_1, K_2, K_3, K_1', K_2'$  vyjadřují „přelévání“ látky mezi kompartmenty.

Doplníme nyní počáteční podmínky (jsou to výchozí hodnoty  $m_A, m_B, m_C$ ), a pokud je počet kompartmentů roven  $n$ , máme systém diferenciálních rovnic

$$\frac{dm_i}{dt} = \sum_{j=1}^n k_{ji} \cdot m_j - \sum_{j=1}^n k_{ij} \cdot m_i$$

který musíme vyřešit.

Takto popsaný systém nyní necháme běžet od času  $t = 0$ , v určitých okamžicích budeme přidávat do systému látku<sup>3</sup>, systém se nechá běžet (i po skončení užívání látky), nakonec se zastaví a zjišťuje se koncentrace látky v jednotlivých kompartmentech, popř. se sleduje průběžně.

**Řešení diferenciálních rovnic.** Diferenciální rovnice můžeme řešit jednoduchou aproximací, a to podle následujícího schématu:

Máme diferenciální rovnici  $y' = f(x, y)$  a počáteční podmínku  $y(0) = a$ . Zvolíme číslo  $h$  (krok aproximace) a budeme počítat

$$y(x+h) = y(x) + h \cdot \underbrace{f(x, y)}_{=y'}$$

Jinak zapsáno,

$$y_{n+1} = y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \cdot f(x_n, y_n)$$

kde  $y_0 = a$ . Průběh funkce tak aproximujeme lomenou čarou, která se nazývá Eulerův polygon. Takto dostaneme tabulku hodnot, která je pochopitelně zatížena určitou chybou (je to přibližné řešení).

### 1.3.3 Metoda Runge–Kutta

Uvedeme si metodu Runge–Kutta 4. řádu (tím máme na mysli, že každý bod se počítá ze čtyř, a to z předchozího spočteného a tří dalších, o určitý krok posunutých). Základem je vztah

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

kde  $k_i$  jsou

$$\begin{aligned}k_1 &= h \cdot f(x_n, y_n) \\ k_2 &= h \cdot f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= h \cdot f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &= h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3)\end{aligned}$$

Tato metoda je velmi vhodná pro řešení kompartmentové analýzy, dá se to takto simulovat: po určitých časových okamžicích budeme sledovat, pokud přitom přijde účinná látka, změníme to apod.

<sup>3</sup>To jako když doktor řekne, „budete to brát ráno, v poledne a večer“.

### 1.3.4 Metoda prediktor–korektor

Metody prediktor–korektor spočívají v myšlence, stanovit určitým způsobem hodnoty a pak je zpřesňovat.

**Milnova metoda.** Několik prvních hodnot spočteme např. metodou Runge–Kutta. Dále pokračujeme následovně (zde  $y_n^{(j)}$  značí  $j$ -tou aproximaci hodnoty  $y_n$ ; zápisem  $y_n$  rozumíme již konečnou hodnotu): prediktor bude

$$y_{n+1}^{(0)} = y_{n-3} + \frac{4}{3}h \cdot (2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2}) \quad (1)$$

$$(y_{n+1}^{(0)})' = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}) \quad (2)$$

a korektor:

$$(y_{n+1}^{(j+1)})' = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(j)}) \quad (3)$$

$$y_{n+1}^{(j+1)} = y_{n-1} + \frac{1}{3}h \cdot \left[ (y_{n+1}^{(j)})' + 4y'_n + y'_{n-1} \right] \quad (4)$$

Vztahy 3 a 4 se přitom nechají pracovat současně (střídají se, v iteraci se počítají obě rovnice), a to tak dlouho, až je

$$\left| (y_{n+1}^{(j)})' - (y_{n+1}^{(j+1)})' \right| < \varepsilon$$

**Jiná metoda.** Nahrzením vztahů 1,4 dostaneme jinou metodu typu prediktor–korektor:

$$y_{n+1}^{(0)} = y_{n-2} + \frac{3}{2}h(y'_n + y'_{n-1}) \quad (5)$$

$$y_{n+1}^{(j+1)} = y_n + \frac{1}{2}h(y_{n+1}^{(j)} + y'_n) \quad (6)$$

### 1.3.5 Diferenciální rovnice 2. řádu

Máme rovnici  $y'' = f(x, y, y')$  a počáteční podmínky  $y(0) = y_0$  a  $y'(0) = y'_0$ . Položme nyní  $y' = z$  a  $z' = f(x, y, z)$ , což jsou dvě diferenciální rovnice prvního řádu s počátečními podmínkami  $z(x_0) = y'_0$  a  $y(x_0) = y_0$ . Dále již můžeme použít výše uvedených metod.

### 1.3.6 Řešení kompartmentové analýzy

Shrneme nyní poznatky o diferenciálních rovnicích a využijeme je k napsání programu, který řeší kompartmentovou analýzu (procedury vlastního řešení diferenciálních rovnic jsme zde neuváděli – stačí vhodně použít uvedených metod):

```
begin
  čas:=t0;   { simulární čas }
  for k:=1 to vstupy do   { vstupy = počet pilulek }
    begin
      with vp[k] do   { k-tý kompartment }
```

```

begin
  while čas<n do
    begin
      čas:=čas+krok;
      Diferential; { řešení dif. rovnic }
    end;
    m[j]:=m[j]+i;
  end;
end;
{ a dále bez léčení a bez namáčení }
repeat
  čas:=čas+krok;
  Diferential;
until čas>=konec;
end.

```

## 1.4 Simulační kalendáře

V předchozím řešení našeho ilustračního příkladu jsme mohli použít příkaz jako `new(auto)`; nebo `new(cesta)`; (případně i s dalšími parametry), kde ovšem `auto` a `cesta` nejsou datové struktury, nýbrž procesy. Tyto procesy si udržují svůj *plán*, tedy stav, čas plánu (změny).

Odtrhneme nyní plán od auta (dále je budeme spojovat pointerem), a plány se pokusíme nějakým způsobem zorganizovat. Množinu plánů pak nazveme *kalendář*.

### 1.4.1 Základní typy kalendářů

Nejjednodušší příklady kalendářů:

**Bezkalendář.** Kalendář v programu není, plány organizujeme jiným způsobem – jako v našich prvních příkladech.

**Pole.** Kalendář implementujeme jako pole, vyhledáváme v něm událost s minimálním plánem. (Pole je použitelné jen pro konstatní počet procesů.)

**Seznam.** Vytvoříme linerárně zřetězený seznam se zarážkou, kalendář je vlastně ukazatel na seznam plánů aut.

Rozebereme nyní podrobněji kalendář definovaný jako lineární seznam:

*inicializace* bude  $\infty/\text{nil}$ , tedy existující plán neexistujícího auta

*organizace* kalendáře bude respektovat vzestupné setřídění podle času.

Auta pak budeme deklarovat následovně:

```

type auto = record
  nosnost, rychlost, nakládá, vykládá: real;
  můj_plán: plán_ptr;

```



```

        vpředu,vzadu:auto_ptr;
    end;
    plán_auta = record
        moje_auto:auto_ptr;
        stav: stav_auta;
        čas_plánu: typ_sim_času;
        další: plán_ptr;
    end;
    typ_sim_kalendáře = ^plán_auta;

```

Pokud máme procedury pro kalendář napsány, zbytek systému se s použitím kalendářů programuje snáze:

```

procedure zmena(a: auto_ptr);
begin
    with a^ do
    begin
        case můj_plán^.stav of
            nakládáno:
                begin
                    můj_plán^.stav:=jede_do_C;
                    z_fronty(fronta_v_A);
                    if not prázdná_fronta(fronta_v_A) then
                        aktivuj(fronta_v_A,první);
                    počkej(vzdálenost_AC/rychlost);
                end;
            jede_do_B:
                begin
                    můj_plán^.stav:=fronta_v_B;
                    do_fronty(a,fronta_v_B);
                    if vpředu<>nil then čekej;
                end;
            ...
        end;
    end;
end;

```

V seznamu budou přitom pouze jezdící auta (ne auta čekající ve frontě). Čekání (procedura čekej) přitom funguje tak, že prvek se ze seznamu odstraní.

```

procedure čekej;
var aktivní: typ_sim_kalendáře;
begin
    aktivní:=kalendář;
    kalendář:=kalendář^.další;
    with aktivní^ do
    begin

```

```

    čas_plánu:=maxint;
    další:=nil;
end;
end;

procedure aktivuj(f:fronta; a:auta_ptr);
begin
    with a^.můj_plán do
        begin
            čas_plánu:=simulární_čas;
            další:=kalendář^.další;
        end;
        kalendář^.další:=a^.můj_plán;
end;

procedure počkej(doba: typ_sim_času);
var pom,uk: typ_sim_kalendáře;
begin
    pom:=kalendář;
    with pom^ do
        begin
            čas_plánu:=čas_plánu+doba;
            if čas_plánu>další^.čas_plánu then
                begin
                    kalendář:=další;
                    uk:=kalendář;
                    while uk^.další^.čas_plánu<čas_plánu do
                        uk:=uk^.další;
                    další:=uk^.další;
                    uk^.další:=pom;
                end;
            end;
        end;
end;

{ suspenduj(proces,čas) - zařazení na místo podle času (prvek není v hlavě)
  pasivuj(proces)      - vypustit prvek ze seznamu }

```

Kalendáře přitom mohou být vytvořeny jako jednoúčelové (pro daný program), nebo univerzální (může být použit téměř libovolným programem).

#### 1.4.2 Kalendář jako abstraktní datový typ

Pokud odhlédneme od konkrétní implementace a budeme pokládat kalendář za abstraktní datový typ, vidíme, že musí umět následující základní operace:

1. zjistí, zda je událost (proces) naplánována

2. výběr události (procesu) s minimální hodnotou času plánu
3. naplánování momentálně nenaplánované události (procesu) – vytvoření jejího plánu podle zadané hodnoty simulárního času
4. zrušení plánu momentálně naplánované události (procesu).

Nad simulačním kalendářem se přitom provádějí tyto operace (mají souvislost se stavy procesů a jejich změnami):

0. aktivní → aktivní
1. aktivní → suspendovaný
2. aktivní → pasivní
3. suspendovaný → aktivní
4. pasivní → aktivní
5. suspendovaný → pasivní
6. pasivní → suspendovaný
7. suspendovaný → suspendovaný
8. ukončení procesu.

### 1.4.3 Simulační jádro

Pokud program využívá více procesů (obecně, v operačním systému), má jednu z těchto vlastností (aby vůbec mohl fungovat):

1. je reentrantní – nekopíruje se při opětovném spuštění (ale data musí být oddělena)
2. kopíruje se.

Záleží přitom na hardware – zda umožňuje reentrantnost.

Pokud se takovýmto způsobem má chovat část simulačního systému (hovoříme již o simulačním jádru), implementujeme prototyp procesu (s parametry); vzniká otázka, jak realizovat kalendář.

### 1.4.4 Kalendář jako binární strom

Jako velmi vhodná se jeví implementace kalendáře jako binárního stromu, kde

**kalendář** obsahuje ukazatel na kořen a na „nejlevější“ prvek,

**uzel** obsahuje ukazatele na levý a pravý podstrom, ukazatel „nahoru“ a čas.

Např. proceduru **čekej** pak mapíšeme takto:

```

procedure čekej;
var aktivní, pom: plán_ptr;
begin
  with kalendář do
  begin
    aktivní:=první;
    with aktivní^ do
    begin
      if kořen=první then    { odstraňujeme kořen }
      begin
        kořen:=pravý;
        pom:=pravý;
        while pom^.levý<>nil do pom:=pom^.levý;
        první:=pom;
        kořen^.nahoru:=nil;
      end
    else
      if pravý<>nil then    { odstraňujeme vnitřní uzel }
      begin
        pom:=pravý;
        while pom^.levý<>nil do pom:=pom^.levý;
        první:=pom;
        nahoru^.levý:=pravý;
        pravý:=nahoru;
      end
    else
      begin
        první:=nahoru;
        nahoru^.levý:=nil;
      end;
    end;
    { teď aktivnímu uřezat ukazatele a změnit čas na maxint }
  end;
end;

```

Dále např. procedura počkej: vezme proces, „vytrhne“ jeho uzel a zařadí jako list se změněným časem.

## 2 Základy teorie pravděpodobnosti

V této části nastíníme základní pojmy týkající se pravděpodobnosti a její nejdůležitější vlastnosti. Budeme je potřebovat dále – zejména v systémech hromadné obsluhy. Zájemce o podrobnější studium odkazují na literaturu, popř. na Makub, Michálek: Pravděpodobnost, jestli to ovšem Makub na $\text{\TeX}$ -uje.

## 2.1 Pravděpodobnost

### 2.1.1 Definice pravděpodobnosti

Na úvod si oživíme klasické pojetí pravděpodobnosti jako relativní četnosti opakovaných pokusů: opakujeme určitý pokus, a to  $n$ -krát, a zkoumáme, kolikrát nastal určitý jev  $A$ . Toto číslo označíme  $m_n(A)$  a nazveme *četností* jevu  $A$ .

Tzv. *relativní četnost* jevu pak dostaneme jako  $f_n(A) = \frac{m_n(A)}{n}$ ; je přitom  $f_n(A) \in \langle 0, 1 \rangle$ , a to pro každý jev  $A$ . V limitním přechodu  $n \rightarrow \infty$  pak relativní četnost nazveme *pravděpodobností* jevu  $A$ .<sup>4</sup> Přitom relativní četnost (a pravděpodobnost) nemožného jevu je rovna 0, relativní četnost jevu jistého je 1.

Máme tedy určitý *prostor elementárních jevů*  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ , jejich pravděpodobnosti, které jsou dány zobrazením  $p : \Omega \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ , tedy  $0 \leq p(\omega_i) \leq 1$ . Dále platí  $\sum_{i=1}^n p(\omega_i) = 1$ . Opačným postupem tedy získáme axiomatickou definici pravděpodobnosti:

#### Definice 2.1

Nechť  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  je konečný prostor elementárních jevů. Nechť dále  $p$  je zobrazení, které každému  $\omega_i \in \Omega$  přiřadí  $p(\omega_i)$  tak, že platí  $0 \leq p(\omega_i) \leq 1$  a  $\sum_{i=1}^n p(\omega_i) = 1$ . Potom číslo  $p(\omega_i)$  nazveme *pravděpodobností* elementárního jevu  $\omega_i$ .

Dostáváme tak *konečný pravděpodobnostní prostor*  $(\Omega, p)$ .

Každou podmnožinu  $A \subseteq \Omega$  pak nazveme *náhodným jevem*; elementární jevy  $\omega_i \in A$  se nazývají jevy *příznivé* jevu  $A$ . Přitom  $\Omega$  je tzv. jev *jistý*, zatímco  $\emptyset$  je jev *nemožný*.

Přirozeným způsobem definujeme:

- sjednocení a průnik jevů (nastoupí alespoň jeden, resp. všechny jevy)
- doplňkový jev  $\bar{A} = \Omega - A$
- ekvivalentní jevy  $A = B$
- disjunktní jevy  $A \cap B = \emptyset$ .

□

### 2.1.2 Vlastnosti pravděpodobnosti

#### Věta 2.2

Mějme konečný pravděpodobnostní prostor  $(\Omega, p)$ . Pak platí:

1.  $p(\Omega) = 1$
2.  $p(A) \geq 0, \forall A \subseteq \Omega$
3. je-li  $A \cap B = \emptyset$ , pak  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
4. je-li  $A \subseteq B$ , pak  $p(A) \leq p(B)$  a  $p(B - A) = p(B) - p(A)$

<sup>4</sup>Slovní vyjádření klasické definice: Pravděpodobnost se rovná počet případů příznivých lomeno počet případů možných.

5.  $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

6.  $p(\emptyset) = 0$

7.  $0 \leq p(A) \leq 1$

8.  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

9. jsou-li  $A_1, \dots, A_n$  náhodné jevy ( $n \geq 2$ ), potom

$$p\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n p(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n p(A_i \cap A_j) + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n p(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^n p(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

(princip inkluze a exkluze)

10. pro každý náhodný jev  $A$  platí

$$p\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n p(A_i)$$

*Dukaz:* je jednoduchý, a proto jej ponecháváme svědomitému čtenáři jako cvičení.  $\square$ 

### 2.1.3 Podmíněná pravděpodobnost

#### Definice 2.3

Nechť  $A, B$  jsou jevy. *Podmíněnou pravděpodobností* nastoupení jevu  $A$  za podmínky, že nastal jev  $B$ , nazveme číslo

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Platí-li  $p(A|B) = p(A)$ , říkáme, že jevy  $A, B$  jsou *nezávislé*.

#### Věta 2.4

Nechť  $A, B$  jsou nezávislé jevy. Pak  $p(A \cap B) = p(A)p(B)$ .

#### Věta 2.5 VĚTA O CELKOVÉ PRAVDĚPODOBNOTI.

Nechť  $(\Omega, p)$  je konečný pravděpodobnostní prostor,  $A_1, \dots, A_n$  jevy tvořící rozklad  $\Omega$ , tedy jsou po dvou disjunktní a  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ ; navíc žádný jev není nemožný, tedy  $p(A_i) > 0$ .Pak pro libovolný jev  $B \subseteq \Omega$  platí:

$$p(B) = \sum_{i=1}^n p(A_i)p(B|A_i).$$

### 2.1.4 Jevové pole

Dosud jsme uvažovali *konečný* prostor  $\Omega$ . Jestliže však rozšíříme pravděpodobnostní prostor na nekonečný, s dosud zavedenými definicemi již nevystačíme. Pravděpodobnost proto zavedeme následujícím způsobem:<sup>5</sup>

#### Definice 2.6

Nechť  $\mathcal{A}$  je neprázdný systém podmnožin množiny  $\Omega$ , pro který platí:

1. je-li  $A \in \mathcal{A}$ , pak  $\bar{A} = \Omega - A \in \mathcal{A}$
2. je-li dána posloupnost podmnožin  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ , pak také

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

Pak systém  $\mathcal{A}$  se nazývá (*množinová*)  $\sigma$ -*algebra*. Její prvky se nazývají *náhodné jevy*;  $(\Omega, \mathcal{A})$  pak nazýváme *jevové pole*.

Nechť nyní  $(\Omega, \mathcal{A})$  je jevové pole. *Pravděpodobností* nazveme libovolnou množinovou funkci  $P$ , definovanou na  $\sigma$ -algebře  $\mathcal{A}$ , a vyhovující následujícím axiomům:

1.  $P(\Omega) = 1$
2.  $P(A) \geq 0$  pro každý jev  $A \in \mathcal{A}$
3. pro každou posloupnost jevů  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ , které jsou po dvou neslučitelné (po dvou disjunkt-ní), platí:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Číslo  $P(A)$  pak nazýváme pravděpodobností jevu  $A$ ; trojici  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je pravděpodobnostní prostor s pravděpodobností  $P$ .

### 2.1.5 Geometrická pravděpodobnost

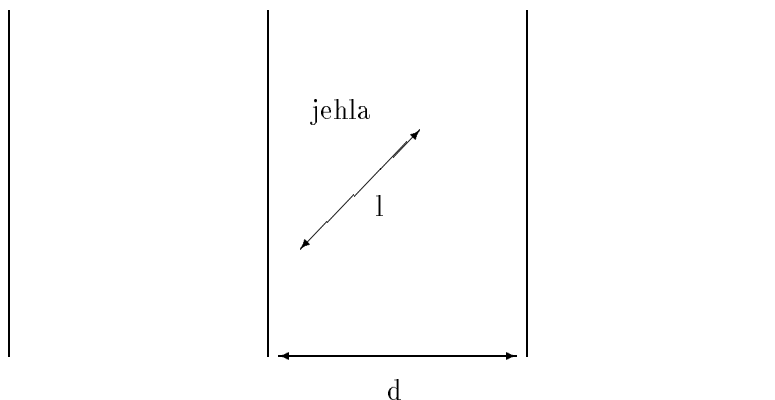
Ukážeme si ještě jednu možnost interpretace pravděpodobnosti, a sice pomocí obyčejné geometrie.

Házeme například kamínkem na ploše, která je vydlážděná na způsob šachovnice. Plocha je omezená, kamínek je tak malý, že vždy jednoznačně určíme (pokud padl na vydlážděnou plochu, která představuje náš základní prostor), zda padl na bílou nebo černou dlažbu. Pravděpodobnost, že kamínek spadne na bílou dlaždici, pak zcela přirozeně spočítáme použitím míry, tedy  $P(B) = \frac{m(B)}{m(D)}$ , kde  $B$  je plocha bílých dlaždic a  $D$  je celková plocha dlažby.

Stejně snadno např. můžeme určit pravděpodobnost, se kterou se při zásahu terče trefíme „do černého“. (Zde je základním prostorem plocha terče, náš jev představuje černá plocha, a míra je vlastně obsah kruhu.)

Připomeneme zde již jen známou *Buffonovu úlohu*, kdy pomocí házení jehly na papír, opatřený sítí rovnoběžek (obrázek 3), určíme číslo  $\pi$ . Rovnoběžky jsou od sebe vzdáleny o stejnou vzdálenost  $d$ ; pozici jehly popíšeme  $x$ -ovou souřadnicí jejího středu a úhlem, tedy  $(x, \varphi)$ . Délku jehly si označíme  $l$ . Kdy jehla protíná rovnoběžku:

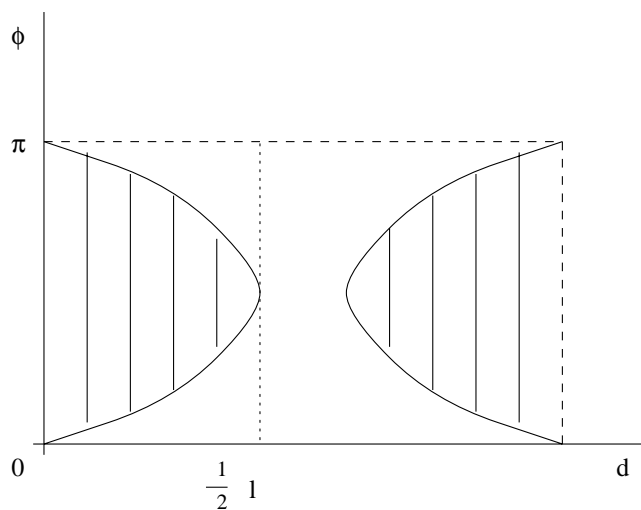
<sup>5</sup>Zavádíme tak vlastně Lebesqueovu míru.



Obrázek 3: Buffonova úloha

1.  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}l \sin \varphi$
2.  $d - \frac{1}{2}l \sin \varphi \leq x \leq d$

Pozici jehly tedy vyjádříme v souřadném systému  $(x, \varphi)$  (obrázek 4). Základním prostorem bude celý

Obrázek 4: Odhad čísla  $\pi$  pomocí Buffonovy úlohy

obdélník, který má plochu  $\pi d$ ; příznivý jev – jehla protne jednu z rovnoběžek – je vyjádřen plochami dvou sinusoid, z nichž každá má plochu  $l$ . Celkem tedy  $p = \frac{2l}{\pi d}$ , a odtud  $\hat{\pi} = \frac{2l}{\hat{p}d}$ , kde  $\hat{p}$  je odhad pravděpodobnosti a  $\hat{\pi}$  odhad  $\pi$ .

## 2.2 Náhodné veličiny

Nyní nebudeme sledovat pouze pravděpodobnost jevů, ale také jiné veličiny, jejichž hodnota je náhodná (typicky např. při zvolení libovolného člověka jeho výška, váha, počet vlasů<sup>6</sup> jsou veličiny

<sup>6</sup>No jen si to představte: zastavíte chlapíka na Čáře a zeptáte se ho: „Promiňte, kolik máte vlasů na hlavě...?“



podléhající jistým způsobem náhodě). Zformulujeme tedy tyto úvahy precizněji:

### Definice 2.7

Mějme prostor elementárních jevů  $\Omega$ . Přiřadíme nyní každému elementárnímu jevu nějakou číselnou hodnotu z množiny  $M$  – tzv. *obor hodnot* náhodné veličiny  $X$ .

Číselné ohodnocení elementárních jevů nazveme *náhodnou veličinou*; nadefinujeme nyní pro každé  $x \in M$  množinu

$$[X = x] \stackrel{\text{df}}{=} \{\omega : X(\omega) = x\} \subseteq \Omega$$

Náhodným jevem pak rozumíme nabytí veličiny  $X$  určité hodnoty  $x$ ; jeho pravděpodobnost  $p(x) = p[X = x]$ .

Funkci  $p$  pak navýváme *pravděpodobnostní funkcí* zobrazení  $X$ , dvojice  $(M, p)$  *rozdělení pravděpodobnosti* náhodné veličiny  $X$ .  $\square$

**Poznámka.** Náhodná veličina je popsána právě funkcí hustoty pravděpodobnosti  $f(x)$ , nebo distribuční funkcí  $F(x)$ .

Pravděpodobnostní funkci můžeme přitom zadat tabulkou, nebo předpisem. Jestliže náhodná veličina je dána výsledkem nějakého náhodného pokusu, pak střední (očekávaná) hodnota náhodné veličiny  $X$  je dána vztahem

$$E[X] = E X \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{i=1}^n x_i p(x_i) \quad (7)$$

### 2.2.1 Distribuční funkce

#### Definice 2.8

Pro každou náhodnou veličinu  $X$  definujeme *distribuční funkci*  $F(X)$  jako pravděpodobnost, že náhodná veličina  $X$  nepřekročí hodnotu  $x$ , tedy

$$F(x) = P(X \leq x)$$

#### Věta 2.9

Pro každou distribuční funkci  $F(x)$  platí:

1.  $F(X)$  je neklesající
2.  $F(X)$  je zprava spojitá
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$   
 $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
4.  $\forall x \in R : 0 \leq F(x) \leq 1$
5.  $\forall x_1, x_2 \in R, x_1 < x_2$  platí  
 $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$
6.  $P(X = x) = F(x) - \lim_{y \rightarrow x^-} F(y), \forall x \in R$

$\square$

Distribuční funkce tedy může obsahovat body nespojitosti (skoky); v případě, že náhodná veličina nabývá pouze diskrétních hodnot, je skok ve všech těchto hodnotách, mezi nimi je distribuční funkce konstantní.

### 2.2.2 Charakteristické veličiny

Náhodnou veličinu a její pravděpodobnost charakterizují vedle pravděpodobnostní funkce (funkce rozdělení hustoty pravděpodobnosti) také další veličiny: již jsme se v úvodu kapitoly – vztah 7 – zmínili o střední hodnotě. Nyní si zavedeme další veličiny, nejprve pro náhodné veličiny diskrétní.

**Označení.** V případě diskrétní náhodné proměnné budeme značit jednotlivé hodnoty, jichž tato proměnná nabývá,  $x_1, \dots, x_n$ ; odpovídající pravděpodobnosti pak stručněji  $p_1, \dots, p_n$  namísto přesnějšího  $p(x_1), \dots, p(x_n)$ .

#### Poznámka 2.10

Pro každou (diskrétní) náhodnou veličinu platí

$$\sum_k p_k = 1$$

#### Definice 2.11

Nechť  $X$  je diskrétní náhodná proměnná. Pak zavádíme

- střední hodnotu, první (počáteční) moment náhodné veličiny  $X$ <sup>7</sup>

$$\sum_k p_k x_k = E[X] = \bar{X}$$

- $n$ -tý (počáteční) moment<sup>8</sup>

$$\sum_k p_k x_k^n = E[X^n] = \bar{X}^n$$

- rozptyl jako druhý centrální moment, tj.

$$\begin{aligned} D[X] = \sigma^2 &= \sum_k p_k (x_k - E[X])^2 \\ &= \sum_k p_k x_k^2 - 2 \cdot E[X] \sum_k p_k x_k + E[X]^2 \cdot \underbrace{\sum_k p_k}_1 \\ &= \bar{X}^2 - 2 \cdot \bar{X}^2 + \bar{X}^2 = \bar{X}^2 - \bar{X}^2 \end{aligned}$$

#### Věta 2.12

Pro každou konstantu  $c \in R$  a pro náhodné proměnné  $X, Y$  platí:

1.  $E(c) = c$
2.  $E(c \cdot X) = c \cdot E(X)$
3.  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

<sup>7</sup>Místo  $E[X]$  budeme často psát  $E(X)$ .

<sup>8</sup>Poznámka pro zájemce: Obecný moment se definuje jako  $m_n(a) = \sum_k p_k (x_k - a)^n$ ; pro  $a = 0$  hovoříme o počátečním momentu, pro  $a = E[X]$  o centrálním momentu.

4.  $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$
5.  $D(c \cdot X) = c^2 \cdot D(X)$
6.  $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

**Definice 2.13**

Pro případ spojité náhodné proměnné zavádíme následovně:

- hustota pravděpodobnosti (frekvenční funkce)  $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ , resp.
- distribuční funkce  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$

**Věta 2.14**

Pro spojitou náhodnou proměnnou  $X$ , její hustotu pravděpodobnosti  $f(x)$  a distribuční funkci  $F(x)$  platí:

1.  $\forall x \in R : f(x) \geq 0$
2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$
3.  $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$

**Definice 2.15**

Pro spojitou náhodnou veličinu zavádíme střední hodnotu následovně:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

Analogicky pak zavádíme další charakteristické veličiny, zejména:

- $n$ -tý (počáteční) moment:

$$\overline{X^n} = E[X^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx$$

- rozptyl

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(x - E[X])^2$$

**Věta 2.16**

Pro střední hodnotu spojité náhodné proměnné platí: je-li pro  $x < 0$   $F(x) \equiv 0$  a platí-li  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - F(x)) = 0$ , lze spočítat střední hodnotu jako

$$E[X] = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx$$

*Dukaz:* Spočtěme integrál na pravé straně metodou per partes:

$$\int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx \left[ \begin{array}{l} u' = 1 \quad v = 1 - F(x) \\ u = x \quad v' = -f(x) \end{array} \right] = \underbrace{[x(1 - F(x))]_0^{\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_0^{\infty} x f(x) dx}_{=E[X]}$$

a jsme hotovi. □

### 2.2.3 Sčítání náhodných veličin

Uvažujme nyní dvě náhodné nezávislé veličiny  $X_1, X_2$  a náhodnou veličinu  $Y = X_1 + X_2$ . Přitom veličina  $X_1$  má hustotu pravděpodobnosti  $f_1(x)$  a distribuční funkci  $F_1(x)$ , veličina  $X_2$  podobně  $f_2(x), F_2(x)$ . Zajímá nás nyní  $f(y), F(y)$ .

Distribuční funkce  $F(y)$  je zřejmě dána předpisem  $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X_1 + X_2 \leq y)$ . (Připomeňme znovu, že uvažujeme spojitý případ.)

Z nezávislosti dostáváme  $f(x_1, x_2) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ . Ke spočtení  $F_Y(y)$  použijeme následující úvahu: jev  $X_1 + X_2 \leq y$  představuje v rovině polorovinu ohraničenou přímkou  $y = x_1 + x_2$ , kde ovšem  $y$  je konstanta, a souřadnice jsou značeny  $x_1, x_2$ . Počítáme tedy integrál přes plochu:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \int \int f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{y-x_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{y-x_2} f_1(x_1) dx_1 \right] f_2(x_2) dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(y-x_2) f_2(x_2) dx_2 \end{aligned}$$

(Dále symetricky.) Pro funkci hustoty pravděpodobnosti pak máme

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y-x_2) f_2(x_2) dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) f_2(y-x_1) dx_1 = f_1(x_1) \otimes f_2(x_2)$$

kde výraz  $f_1 \otimes f_2$  představuje tzv. *konvoluci funkcí*.

### 2.2.4 Charakteristická funkce

#### Definice 2.17

Pro (diskrétní) náhodnou proměnnou, nabývající hodnot  $x_1, \dots, x_n$  s pravděpodobnostmi  $p_1, \dots, p_n$  (přičemž  $\sum p_i = 1$ ) definujeme charakteristickou funkci  $\Psi(t)$  takto:

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^n e^{it \cdot x_k} \cdot p_k$$

#### Věta 2.18

Pro charakteristickou funkci  $\Psi(t)$ , zavedenou jako v definici 2.17, platí

- (i)  $\Psi(0) = 1$
- (ii)  $\Psi(t) = \sum_{k=1}^n \left[ 1 + it \cdot x_k + \frac{i^2 t^2 x_k^2}{2!} + \frac{i^3 t^3 x_k^3}{3!} + \dots \right] \cdot p_k$
- (iii)  $\Psi'(0) = i \cdot \sum_{k=1}^n x_k p_k = i \cdot E[X]$
- (iv)  $\Psi''(0) = i^2 \cdot \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k = i^2 \cdot E[X^2]$
- (v) obecně  $\Psi^{(n)}(0) = i^n \cdot E[X^n]$

## 2.3 Laplaceova transformace

Mějme funkci  $a(x)$ , pro kterou platí  $a(x) = 0 \ \forall x < 0$ . Dále uvažujme komplexní funkci  $A^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} a(x) dx$ . Jak tyto funkce souvisí: vezměme např.  $a(x) = 1$  a dostaneme

$$A^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dx = \left[ \frac{e^{-sx}}{-s} \right]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

Píšeme  $a(x) \Leftrightarrow A^*(s)$ ;  $a(x)$  je *vzor*, funkce  $A^*(s)$  je *obraz* v Laplaceově transformaci (L-transformaci).  
Některé příklady:

1.  $a'(x) \Leftrightarrow s \cdot A^*(s)$
2.  $a^{(n)}(x) \Leftrightarrow s^n \cdot A^*(s)$ , pokud  $a(0) = 0$
3.  $\int_0^t a(x) dx \Leftrightarrow \frac{A^*(s)}{s}$
4.  $(-x)^n a(x) \Leftrightarrow A^{*(n)}(s)$
5.  $\frac{a(x)}{x} \Leftrightarrow \int_p^\infty A^*(s) ds$
6. konvoluce:  $a(x) \otimes b(x) \Leftrightarrow A^*(s) \cdot B^*(s)$
7.  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ,  $F^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{s+\lambda}$

## 2.4 Typy rozdělení pravděpodobnosti

Nyní si uvedeme nejobvyklejší typy rozdělení pravděpodobnosti náhodných veličin, které pak budeme využívat v dalším textu.

Základní tvar rozdělení náhodné veličiny (tvar křivky) je v zásadě dán *typem* rozdělení (normální, binomické,...); konkrétní podoba, zejména posunutí vůči souřadným osám, strmosti křivek (velikosti rozptylů a středních hodnot) jsou pak dány jedním nebo více *parametry* rozdělení.

Podle hodnot, kterých může náhodná veličina nabývat, pak hovoříme o *diskrétních* (binomické, geometrické, Poissonovo) a *spojitých* typech rozdělení (normální, exponenciální, Erlangovo).

### 2.4.1 Exponenciální rozdělení

Pokud např. stojíme u silnice, kde náhodně projíždějí auta, a měříme intervaly mezi jejich průjezdy, dostaneme exponenciální rozdělení. To má jednu důležitou vlastnost, nazývanou často princip bezpaměťovosti: z toho, jak dlouho čekám, neplyne, jak dlouho ještě čekat budu.<sup>9</sup>

Exponenciální rozdělení má jeden parametr  $\lambda$ ; funkce rozdělení hustoty pravděpodobnosti je zavedena následovně:<sup>10</sup>

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

<sup>9</sup> Vysvětlení: je totiž  $P(X \leq x_0 + \Delta x | x > x_0) = P(X \leq \Delta x)$ .

<sup>10</sup> Pokud uvážíme klesající exponenciálu  $e^{-\lambda x}$ , dostaneme  $\int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = [-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$ , tedy aby mohla být funkce pravděpodobností, musíme ji vynásobit  $\lambda$ , aby byl  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ .

Odtud pak distribuční funkce

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

Střední hodnota exponenciálního rozdělení

$$E(X) = \int_0^{\infty} 1 - (1 - e^{-\lambda x}) dx = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

za předpokladu (abychom mohli použít větu 2.16), že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\ln x}}{e^{\lambda x}} = 0$$

### 2.4.2 Normální rozdělení

Tento typ se vyskytuje v řadě „obvyklých“ aplikací, jako např. při sledování výšky a váhy lidí, při sledování jízdní doby z jednoho místa na jiné a podobně. Normální rozdělení je dáno v zásadě předpisem<sup>11</sup>  $y = a \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ . Nyní se pokusíme zjistit hodnotu čísla  $a$  tak, aby tato funkce mohla být prohlášena za hustotu pravděpodobnosti.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = \\ \left| \begin{array}{l} x = \varrho \cdot \sin \varphi \\ y = \varrho \cdot \cos \varphi \end{array} \right| &= \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{\varrho^2}{2}} \varrho d\varrho = 2\pi \left[-e^{-\frac{\varrho^2}{2}}\right]_0^{\infty} = 2\pi \end{aligned}$$

odkud pak plyne, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

a odtud již hustota normálního rozdělení<sup>12</sup>

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Distribuční funkce je

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Tento integrál nelze rozumně počítat, proto jej ponecháme v tomto tvaru.

Ze symetrie funkce hustoty pravděpodobnosti dále plyne, že střední hodnota  $E(X) = 0$ . (Kdo tomu nevěří, nechť si to ověří.)

Rozptyl:

$$\begin{aligned} D(X) &= \overline{X^2} - \overline{X}^2 = \overline{X^2} \\ \overline{X^2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \\ u' = 1 & v = -e^{-\frac{x^2}{2}} \end{array} \right| \end{aligned}$$

<sup>11</sup>Graf této funkce je známá Gaussova křivka, která má charakteristický zvonovitý tvar.

<sup>12</sup>Zde zatím uvažujeme tzv. *normované* normální rozdělení  $N(0, 1)$ .

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \underbrace{\left[ -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{\sqrt{2\pi}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = 1
\end{aligned}$$

S normovaným normálním rozdělením samozřejmě nevystačíme; v případech, které jsme uvedli na počátku této podkapitoly, se vyskytuje obecné normální rozdělení. Zatímco normované normální rozdělení  $N(0, 1)$  má střední hodnotu 0 (první parametr) a rozptyl jednotkový (druhý parametr), obecné normální rozdělení se střední hodnotou  $\mu$  a rozptylem  $\sigma^2$ , které budeme dále značit  $N(\mu, \sigma^2)$ , má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

(Snadno se ukáže, že střední hodnota takto definované funkce hustoty je skutečně  $\mu$  a rozptyl že je  $\sigma$ .)

### 2.4.3 Binomické rozdělení

se vyskytuje (např.) v případech, kdy náhodný pokus má dva možné výsledky, a sledujeme počet úspěchů.<sup>13</sup>

Nechť nyní úspěch nastává s pravděpodobností  $p$ , a neúspěch s pravděpodobností  $1 - p$ . Pokus opakujeme  $n$ -krát, a budeme sledovat, jak jsme si řekli, počet úspěchů, tedy  $p_k = P(X = k)$ , kde  $X$  je náhodná proměnná, vyjadřující počet úspěšných pokusů. Označíme-li nyní pravděpodobnost neúspěchu jako  $q$  (kde  $q = 1 - p$ ), dostaneme

$$p_k = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

(Tím je vyjádřena pravděpodobnost nastoupení  $X = k$  jako pravděpodobnost  $k$  úspěchů a  $n - k$  neúspěchů.)

Pro střední hodnotu a rozptyl platí (můžeme to spočítat např. přes charakteristickou funkci – použitím věty 2.18)

$$E[X] = np \tag{8}$$

$$D[X] = np(1 - p) \tag{9}$$

Binomické rozdělení je tedy charakterizováno dvěma parametry –  $p$  a  $n$ . Budeme je značit  $Bi(n, p)$ .

### 2.4.4 Geometrické rozdělení

Opět uvažujeme pokus, který má dva možné výsledky – úspěch a neúspěch. Nyní jej však budeme opakovat po neomezenou dobu tak dlouho, až nastane první úspěch; budeme přitom sledovat počet neúspěšných pokusů, které úspěchu předcházely. Označíme nyní pravděpodobnost úspěchu  $p$ , geometrické rozdělení, které má tento jeden parametr, pak  $Ge(p)$ .

<sup>13</sup>Výraz „úspěch“ a „neúspěch“ závisí samozřejmě na interpretaci; v dalším textu takto budeme nazývat ony dva možné výsledky.

Pro pravděpodobnosti  $p_k$  platí:

$$\begin{aligned} p_0 &= p \\ p_1 &= (1-p)p \\ p_2 &= (1-p)^2 p \\ p_k &= \begin{cases} (1-p)^k p, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Přitom se snadno ukáže, že  $\sum p_k = 1$ :

$$\sum_{k=0}^n p_k = p + (1-p)p + (1-p)^2 p + \dots = \frac{p}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1$$

Opět s využitím charakteristické funkce můžeme odvodit, že

$$E[X] = \frac{1-p}{p} \quad (10)$$

$$D[X] = \frac{1-p}{p^2} \quad (11)$$

**Poznámka.** Na pokus můžeme také hledět z opačné strany – zjišťujeme, kolikrát se pokus zdaří před prvním neúspěchem. Potom dostáváme poněkud odlišné výsledky:

$$p_k = \begin{cases} p^k(1-p) & k \geq 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (12)$$

$$E[X] = \frac{p}{1-p} \quad (13)$$

$$D[X] = \frac{p}{(1-p)^2} \quad (14)$$

Toto můžeme spočítat následovně:

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty} p^k(1-p)k = (1-p)p \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p^{k-1}$$

Poslední sumu přitom spočteme takto:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \varrho^{k-1} = 1 + 2\varrho + 3\varrho^2 + 4\varrho^3 + \dots$$

přičemž pro  $\varrho < 1$  je řada absolutně konvergentní. Rozložíme ji dále na součet:

$$\begin{aligned} &= (1 + \varrho + \varrho^2 + \dots) + \varrho(1 + \varrho + \varrho^2 + \dots) + \varrho^2(1 + \varrho + \varrho^2 + \dots) + \dots \\ &= \frac{1}{1-\varrho}(1 + \varrho + \varrho^2 + \dots) = \frac{1}{1-\varrho} \frac{1}{1-\varrho} = \frac{1}{(1-\varrho)^2} \end{aligned}$$

Jiný výpočet využívá derivování řady člen po členu:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{1-\varrho} \right)' &= (1 + \varrho + \varrho^2 + \dots)' \\ \frac{1}{(1-\varrho)^2} &= 1 + 2\varrho + 3\varrho^2 + 4\varrho^3 + \dots \end{aligned}$$



### 2.4.5 Poissonovo rozdělení

Opět budeme sledovat události, které se vyskytují v čase. Již jsme si řekli, že čas, který uplyne mezi dvěma událostmi, má exponenciální rozdělení. Sledujeme-li naopak události po určitý interval pevné délky a zaznamenáváme počet událostí za tento interval, dostaneme tzv. *Poissonovo* rozdělení, které má jeden parametr – budeme značit  $Po(\lambda)$ .<sup>14</sup>

Pro pravděpodobnost platí vztah

$$p_k = P(X = k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} & k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Snadno ukážeme, že  $\sum p_k = 1$ , a tedy že pravděpodobnostní funkce je definována korektně. Dále (opět např. s využitím charakteristické funkce) odvodíme

$$E[X] = \lambda \quad (15)$$

$$D[X] = \lambda \quad (16)$$

**Limitní přechod.** Uvažujme nyní znovu binomické rozdělení  $Bi(n, p)$ ; prohlásíme dále  $p = \frac{\lambda}{n}$  a provedeme limitní přechod  $n \rightarrow \infty$ . Pak dostaneme rozdělení Poissonovo. V praxi přitom můžeme tuto náhradu provést pro  $n > 30$ ; přitom musí být  $\lambda = np < \infty$ .

**Součet Poissonových rozdělení.** Uvažme dvě náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením, tedy  $p_k = P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$  a  $q_m = P(Y = m) = e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^m}{m!}$  a spočtěme nyní funkci pravděpodobnosti pro náhodnou veličinu určenou jejich součtem:

$$\begin{aligned} P(Z = m) &= \sum_{j+k=m} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^j}{j!} \cdot e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{-\mu} \cdot \sum_{j+k=m} \lambda^j \mu^k \cdot \frac{1}{k!j!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \sum_{j=0}^m \lambda^j \mu^{m-j} \cdot \frac{1}{j!(m-j)!} \cdot \frac{m!}{m!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{1}{m!} \cdot \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \lambda^j \mu^{m-j} = e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{(\lambda + \mu)^m}{m!} \\ &= Po(\lambda + \mu) \end{aligned}$$

Tedy součtem dvou Poissonových rozdělení je opět Poissonovo rozdělení, přičemž jejich parametry se sčítají. Matematickou indukci můžeme toto tvrzení rozšířit na libovolný počet.

**Vztah mezi exponenciálním a Poissonovým rozdělením.** Pokud tedy sledujeme určitý jev, jako např. příjezdy automobilů do křižovatky, nebo příchody zákazníků k obsluze, a délky intervalů mezi příchody mají exponenciální rozdělení, má počet událostí za jednotku času rozdělení Poissonovo. (Tato vlastnost nás opět bude zajímat zejména v systémech hromadné obsluhy.)

<sup>14</sup>Dá se říct, že parametr  $\lambda$  charakterizuje provoz systému – tato interpretace nabude na významu zejména v systémech hromadné obsluhy.

### 2.4.6 Erlangovo rozdělení

Pokud sečteme dvě (nebo více) veličiny s exponenciálním rozdělením, dostaneme nikoli exponenciální, ale *Erlangovo* rozdělení. Vezmeme tedy  $k$  veličin s exponenciálním rozdělením a jejich součet  $Y = \sum_{i=1}^k X_i$ , který bude mít Erlangovo rozdělení s  $k$  stupni volnosti, a pokusíme se určit funkci hustoty a distribuční funkci. Využijeme k tomu Laplaceovy transformace, kterou jsme popsali v části 2.3.

Víme, že hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny, která je součtem jiných náhodných veličin, je rovna konvoluci jejich rozdělení; v Laplaceově transformaci přechází konvoluce vzorů na součin obrazů, máme tedy:

$$\begin{aligned} X : f(x) &= \lambda \cdot e^{-\lambda x} & F^*(s) &= \frac{\lambda}{s+\lambda} \\ Y : &? & F^*(s) &= \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^k \end{aligned}$$

Pomocí pravidla o konvoluci funkcí nyní zjistíme vzor  $f(x)$  pro veličinu  $Y$ :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

a distribuční funkce

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

**Poznámka.** Erlangovo rozdělení má smysl pro  $k \geq 2$ ; pro  $k = 1$  přechází v rozdělení exponenciální. Sčítáme nyní nekonečně mnoho nekonečně malých veličin

$$f(x) = \frac{r\mu (r\mu x)^{r-1}}{(r-1)!} \cdot e^{-r\mu x}$$

tedy  $r \rightarrow \infty$  a  $\mu \rightarrow 0$ , a to tak, že  $r\mu = konst.$  Dostaneme

$$F^*(s) = \left(\frac{r\mu}{r\mu + s}\right)^r$$

a v Laplaceově transformaci spočteme limitu

$$F^*(s) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{r\mu}{r\mu + s}\right)^r = e^{-\frac{s}{\mu}}$$

tedy distribuční funkce (vzor) má v bodě  $\frac{1}{\mu}$  tzv. jednotkový impuls.

## 3 Náhodná čísla

V této části se budeme zabývat tím, jak náhodné veličiny s různými typy rozdělení vygenerovat, zpravidla na počítači, a také jak ověřit, že naše generování funguje tak, jak má.

### 3.1 Generování náhody

Základem pro naše generátory bude generátor rovnoměrného rozdělení  $R(0,1)$ , tedy obvyklý generátor poskytující náhodné číslo z intervalu  $\langle 0,1 \rangle$ . Takto vygenerované náhodné číslo pak dále zpracujeme podle požadavku naší aplikace. Například:

$$\begin{aligned} P(X = i) & \quad \text{pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty } i \\ P(X = 3) &= \frac{1}{6} \quad \text{při házení kostkou} \\ P(X = i) &= 10^{-1} \quad \text{generování číslic, tedy } i = 0, 1, \dots, 9 \end{aligned}$$

Přitom je z teoretického hlediska jedno, zda hovoříme o náhodných *číslích*, anebo *číslících*; obojí můžeme vzájemně převést jedno v druhé.

### 3.2 Generování náhodných číslic

Jak jsme si řekli, budeme nejprve hovořit o generování náhodných číslic; popíšeme jednotlivé metody, které přicházejí v úvahu.

#### 3.2.1 Neprogramové generování

Nejjednodušší metodou „generování“ náhodných číslic je mít tyto připravené ve zvláštním souboru a postupně z něj číst; vidíme však, že tento pseudonáhodný generátor dává po každém spuštění od začátku stejné výsledky.

Proto si uvedeme na úvod např. házení kostkou pro vygenerování číslice v šestkové soustavě a hod mincí pro soustavu binární. Vidíme ale, že tyto metody jsou technicky nepoužitelné.

**Fyzikální generátor.** Tento generátor se skutečně používal, a to ve druhé generaci počítačů. Princip spočíval v tom, že se nechal běžet vyzařovač částic po dobu  $\Delta t$  na detektor, který se po dopadu částice překlápí vždy do druhého ze dvou stavů (tj. po dopadu např. pěti částic se překlápí 1, 0, 1, 0, 1, 0). Pravděpodobnost, že dopadlo  $n$  částic, podléhá Poissonovu rozdělení

$$P(X = n) = e^{-\lambda\Delta t} \cdot \frac{(\lambda\Delta t)^n}{n!}$$

a pravděpodobnost, že získáme sudé číslo

$$P(2|X) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda\Delta t} \cdot \frac{(\lambda\Delta t)^{2k}}{2k!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x\Delta t}$$

(odvození jsme provedli pomocí funkce hyperbolického kosinu  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  a odtud  $e^{-x} \cosh x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x}$ ); podobně zjistíme pravděpodobnost lichého čísla

$$P(2 \nmid X) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda\Delta t} \cdot \frac{(\lambda\Delta t)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x\Delta t}$$

Zřejmě je součet těchto pravděpodobností roven jedné; avšak nemáme zaručenu tu vlastost, kterou od generátoru náhodných číslic požadujeme – aby byly všechny číslice stejně pravděpodobné! Pravděpodobnost sudého čísla (tedy binární nuly) je o  $e^{-2x\Delta t}$  větší. Abychom dosáhli stejné pravděpodobnosti, museli bychom zvyšovat  $\Delta t$ , čímž by se generátor neúměrně zpomaloval, nebo zvýšit  $\lambda$ , což ovšem snižuje spolehlivost.

Proto se tyto metody nadále v praxi nepoužívají.

### 3.2.2 Metoda kvadratického středu

Jednou z klasických metod je von Neumannova metoda kvadratického středu, kterou si nejlépe ukážeme na příkladu. Generuje postupně čtyřmístná čísla:

$$\begin{aligned} 2589^2 &= 06702921 \\ 7029^2 &= 49406841 \\ 4068^2 &= 16548624 \\ 5486^2 &= \dots \end{aligned}$$

Poslední vygenerované číslo tedy umocníme na druhou, čímž vznikne osmimístné číslo (popř. doplníme zepředu nulami). Z něj vyjmeme prostřední čtyřčíslí jako nové číslo. Precizně zapsáno:

$$X_{n+1} = \left[ \frac{X_n^2}{10^a} \right] - \left[ \frac{X_n^2}{10^{3a}} \right] \cdot 10^{3a}$$

přičemž v našem konkrétním případě bylo  $a = 2$ .

Je zřejmé, že po určité době se čísla začnou opakovat; perioda je rozhodně menší než 10 000, v praxi pak podstatně menší. My ale potřebujeme periodu co největší; proto ani tato metoda není pro praktické použití vhodná.

### 3.2.3 Kongruenční metody

Tyto metody využívají poznatků z teorie čísel. Generujeme celé číslo z intervalu  $(0, M)$  (tedy o desetinné části hovoříme jako o celém čísle). Obecně vzato používáme vztahu

$$X_{n+1} = a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + \dots + a_n X_0 + b \pmod{M}$$

přičemž zpravidla využíváme pouze několik posledních čísel, jako např.:

- Fibonacciho generátor (je rychlý):

$$X_{n+1} = X_n + X_{n-1} \pmod{M}$$

- multiplikativní generátory:

$$X_{n+1} = a \cdot X_n \pmod{M}$$

- smíšený generátor:

$$X_{n+1} = a \cdot X_n + b \pmod{M}$$

Kongruenční metody jsou rovněž dobře použitelné při programování generátorů náhody ve strojovém kódu: modul  $M$  je dán šířkou registrů (tedy je roven  $2^n$ , kde  $n$  je šířka registru v bitech) a operace modulo se realizuje triviálním způsobem – co je navíc, to přeteče a ztratí se.

### 3.2.4 Metoda Monte Carlo

je založena na opakovaných náhodných pokusech. Proto ji uvádíme na tomto místě, přestože nepatří mezi generátory, ale naopak využívá náhodných čísel k výpočtu, který by bylo velmi obtížné provést přímo.

Chceme například spočítat  $\int_0^1 x^2 dx$ . (Tuto hodnotu dovedeme samozřejmě určit zpaměti; představme si však, že integrál je složitější a že nejde spočítat analyticky vůbec.) Víme, že plocha určité leží ve čtverci omezeném přímkami  $x = 0$ ,  $x = 1$  (ze zadání intervalu) a  $y = 0$ ,  $y = 1$  (ze spočítaného maxima a minima na intervalu). Proto provedeme následující věc: budeme generovat dvojice  $(x, y)$  z tohoto čtverce a budeme testovat, zda patří do naší oblasti. Pokud provedeme  $n$  pokusů a  $m$ -krát se „trefíme“, můžeme při dostatečně velkém počtu pokusů prohlásit, že plocha integrálu je rovna  $S = \frac{m}{n}$ .

Podobně lze samozřejmě počítat i násobné integrály – např. pro dvojný integrál generujeme místo dvojic trojice a opět testujeme.

### 3.2.5 Smíšené generátory

Směřujeme k vylepšení kongruenčních generátorů. Idea je taková, že se pokusíme dvojitým spuštěním generátoru dostat „náhodnější“ čísla. Avšak pokud bychom takto spustili jeden generátor, výsledky nebudou nezávislé.

Použijeme proto generátory dva: jeden generuje náhodná čísla s rozdělením  $R(0, 1)$  (z celého intervalu), druhý má rozdělení  $R[0, 1, \dots, n - 1]$  (tedy generuje diskrétní hodnoty, indexy). Dále založíme  $n$ -prvkové pole, které zpočátku zaplníme čísly z intervalu  $(0, 1)$ . Generátorem indexů vygeneruji index, přečtu příslušný prvek pole a přepíšu jej novým číslem generovaným z intervalu  $(0, 1)$ .

Použití dvou kongruenčních generátorů dává dobré výsledky proto, že platí

**Věta.** Necht' nezávislé náhodné veličiny  $Y, Z$  mají rovnoměrné rozdělení  $R(0, 1)$ . Potom náhodná veličina  $X = Y + Z \pmod{1}$  má rovněž rovnoměrné rozdělení  $R(0, 1)$ .

### 3.2.6 Některé používané generátory

Z kongruenčních generátorů, které se pro své dobré vlastnosti skutečně používají v praxi, uvedeme alespoň některé:

$$\begin{array}{llll} X_{n+1} & = & 65539 \cdot X_n & \pmod{2^{31}} & X_0 \text{ musí být liché; používají počítače IBM} \\ X_n & = & X_{n-2} + X_{n-3} & \pmod{3137} & \text{výhodou je rychlost} \\ X_{n+1} & = & 8192 \cdot X_n & \pmod{67099547} & \text{má dlouhou periodu} \\ X_{n+1} & = & 24298 \cdot X_n + 9991 & \pmod{199017} & \text{používají např. kalkulačky TI} \end{array}$$

Obecně se doporučuje, aby pro koeficient  $a$  a modul  $M$  platilo zhruba  $a \approx \sqrt{M}$ .

### 3.2.7 Kongruence, prvočíselné rozklady

V předchozím textu jsme si ukázali možnosti generování náhodných čísel (číslic) na základě teorie čísel, konkrétně kongruencí. Zde si uvedeme některé její vlastnosti.

**Definice 3.1**

Definujeme relaci *kongruence modulo*  $M$  takto: dvě čísla jsou kongruentní, právě když jejich rozdíl je dělitelný modulem. Píšeme

$$a = b \pmod{M}^{15}$$

**Věta 3.2**

Relace kongruence modulo  $M$  zavedená v definici 3.1 je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Je tedy relací ekvivalence.

**Věta 3.3**

- (i) Je-li  $a = b \pmod{M}$  a  $c = d \pmod{M}$ , pak také  $a \pm c = b \pm d \pmod{M}$
- (ii) je-li  $a = b \pmod{M}$ , pak  $a - b = 0 \pmod{M}$
- (iii) je-li  $a = 0 \pmod{M}$ , pak  $M|a$
- (iv) je-li  $a = b \pmod{M_1}$  a  $a = b \pmod{M_2}$ , pak  $a = b \pmod{NSN(M_1, M_2)}$  ( $NSN$  je nejmenší společný násobek)
- (v) jsou-li moduly  $m_1, \dots, m_k$  po dvou nesoudělné a  $a = b \pmod{m_i}$  pro každé  $i = 1, \dots, k$ , pak

$$a = b \pmod{m_1 m_2 \dots m_k}$$

**Definice 3.4**

Nechť  $m$  je přirozené číslo. Pak zavedeme tzv. Eulerovu funkci  $\varphi(m)$  jako počet přirozených čísel menších než  $m$ , nesoudělných s  $m$ . (Pro prvočíslo  $p$  je  $\varphi(p) = p - 1$ .)

**Věta 3.5 EULEROVA VĚTA**

Jsou-li  $a, m$  nesoudělná, pak  $a^{\varphi(m)} = 1 \pmod{m}$ . □

Uvažme nyní číslo  $a$  nesoudělné s modulem  $m$  a zkoumejme, pro kterou jeho mocninu nastane  $a^n = 1 \pmod{m}$ . Z Eulerovy věty víme, že toto pro konečné  $n$  nastane; stačí totiž položit  $n = \varphi(m)$ . Rovnost (kongruence) může ale nastat dříve:  $a^n = 1 \pmod{m}$  a přitom  $n < m$ . Pak číslo  $n$  je exponent příslušný číslu  $a$ ; pokud dále  $a^N = 1 \pmod{m}$ , platí  $n|N$ .

**Věta 3.6**

Pro každé přirozené  $a$  existuje  $n$  tak, že platí  $a^n = 1 \pmod{m}$

**Definice 3.7**

Nechť  $m$  je přirozené číslo. Pokud pro číslo  $M$  platí, že pro každé  $a$  je  $a^M = 1 \pmod{m}$ , pak  $M$  navýváme *univerzálním exponentem* pro modul  $m$ .

**Definice 3.8**

Číslo  $a$  se nazývá *primitivní kořen* modulu  $m$ , pokud první  $n$ , pro které  $a^n = 1 \pmod{m}$ , je rovno  $n = \varphi(m)$ .

---

<sup>15</sup>Obvyklejší bývá zápis  $a \equiv b$ ; my se přidržíme  $a = b$ .

**Poznámka.** Každý modul nemusí mít primitivní kořen.

### Definice 3.9

Označíme nyní  $\lambda(m)$  minimální univerzální exponent pro modul  $m$ ; zřejmě každý násobek univerzálního exponentu je opět univerzálním exponentem.

### Věta 3.10

Nechť  $(b, M) = 1$ , nechť  $a = 1 \pmod{p}$  pro každý prvočinitel  $p$  prvočíselného rozkladu čísla  $M$ .  
Nechť dále  $a = 1 \pmod{4}$ , je-li  $M$  násobek 4. Potom generátor  $X_{n+1} = a \cdot X_n + b \pmod{M}$  má maximální periodu  $M$  pro každé počáteční  $X_0$ .

*Dukaz:* Předpokládejme  $a = 1$ .

Je  $X_n = X_0 + nb \pmod{M}$ ; ukážeme, že perioda  $H = M$ .

Předpokládejme opak, tedy že  $H < M$ .

Nechť  $n_0 < M$ . Je

$$\begin{aligned} X_0 + n_0 b &= X_0 \pmod{M} \\ n_0 b &= 0 \pmod{M} \end{aligned}$$

Protože  $(b, M) = 1$ , je  $n_0 = 0 \pmod{M}$ , tedy předpoklad neplatí a  $H \geq M$ .

Předpokládejme naopak  $a \neq 1$ . Máme

$$\begin{aligned} X_2 &= a^2 X_0 + a \cdot b + b \pmod{M} \\ X_n &= a^n X_0 + a^{n-1} b + \dots + ab + b \pmod{M} \\ X_n &= a^n X_0 + \frac{a^n - 1}{a - 1} \cdot b \pmod{M} \end{aligned}$$

Hledáme tedy takové nejmenší  $n$ , že  $X_n = X_0 \pmod{M}$ . Chceme dokázat, že vztah pro  $X_n$  je ekvivalentní  $\frac{a^n - 1}{a - 1} \cdot b = 0 \pmod{M}$ . Máme tedy

$$\begin{aligned} a^n X_0 + \frac{a^n - 1}{a - 1} \cdot b - X_0 &= 0 \pmod{M} \\ \frac{1}{a - 1} (a^n - 1) (X_0 (a - 1) + b) &= 0 \pmod{M} \end{aligned}$$

a již stačí ukázat, že  $d = (X_0(a - 1) + b, M) = 1$ . K tomu uvážíme prvočíselný rozklad  $M = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ .

Z předpokladů věty máme  $a = 1 \pmod{p_i}$ ; odtud pak

$$\begin{aligned} (a - 1) &= 0 \pmod{p_i} \\ X_0(a - 1) &= 0 \pmod{p_i} \\ X_0(a - 1) &= 0 \pmod{p_1 \dots p_r} \end{aligned}$$

Pokud nyní předpokládáme  $d > 1$ , existuje v prvočíselném rozkladu  $M$  prvočíslo, řekněme  $p_1$  takové, že  $p_1 | X_0(a - 1)$ , a tedy i  $p_1 | b$ . Ale  $(a, b) = 1$ , a to je spor. Odtud  $d = 1$ .

Nyní dokážeme, že  $M$  je nejmenší takové  $n$ . Rozlišíme tři případy:

I.  $M = p^\alpha$ , kde  $p$  je liché prvočíslo

$$\text{II. } M = 2^\alpha$$

$$\text{III. } M = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$$

Dokážeme pouze tvrzení I, další analogicky.

$$a = 1 \pmod{M} \Rightarrow X_n = aX_{n-1} + b \pmod{p} = (a-1)X_{n-1} + X_{n-1} + b \pmod{p} \Rightarrow a = 1$$

Další důkaz se opírá o:

$$\text{(i) } n = p^\alpha \text{ splňuje}$$

$$\text{(ii) } n = p^\alpha \text{ splňuje, právě když } n \text{ je násobkem } H$$

$$\text{(iii) } n = p^{\alpha-1} \text{ nesplňuje}$$

Budeme dále potřebovat

$$1. (1+a)^n - 1 = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} a^j$$

$$2. \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

$$3. \text{ je-li } (a-1) = 0 \pmod{M}, \text{ pak lze psát } a = 1 + kp^\beta, \text{ kde } \beta > 1, (k, p) = 1$$

Nyní dokážeme i. Dosadíme do 3:

$$\frac{(1+kp^\beta)^{p^\alpha} - 1}{kp^\beta} = \frac{1}{kp^\beta} \sum_{j=1}^{p^\alpha} \binom{p^\alpha}{j} (kp^\beta)^j = \sum_{j=1}^{p^\alpha} \binom{p^\alpha}{j} (kp^\beta)^{j-1}$$

Zde pro  $j = 1$  dostaneme  $p^\alpha$  – jasné. Pro  $j > 1$  lze psát

$$\frac{p^\alpha}{j} \binom{p^\alpha - 1}{j-1} (kp^\beta)^{j-1}$$

a toto je dělitelné  $p^\alpha$ , neboť rozepsáním

$$\frac{p^\alpha}{j} \cdot \frac{(p^\alpha - 1) \dots (p^\alpha - j + 1)}{(j-1) \dots 1}$$

Jestliže  $j | (p^\alpha - 1) \dots (p^\alpha - j + 1)$ , pak  $j$  dělí celý sčítanec, jinak je  $j$  v prvočíselném rozkladu  $p^\alpha$ .

Pro  $j \geq 2$  a  $p \geq 2$  je  $p^{j-1} \geq j$ . V prvočíselném rozkladu čísla  $j$  se nemůže  $p$  vyskytnout v mocnině vyšší než  $j-1$ . Z toho, že  $j$  dělí čitatele již plyne důkaz i.

Ad iii: výraz se analogicky rozepíše, všechny sčítance kromě jednoho jsou dělitelné, tedy nesplňuje (3?).  $\square$



**Věta 3.11**

Nechť  $(a, M) = (X_0, M) = 1$ . Nechť prvočíselný rozklad čísla  $M$  je roven  $M = 2^\alpha \prod_{i=1}^r p_i^{\beta_i}$ , kde  $p_i$  jsou navzájem různá lichá prvočísla. Položme

$$\lambda(p^\beta) = p^{\beta-1}(p-1) \quad p \text{ liché}$$

$$\lambda(2^\alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha = 0, 1 \\ 2 & \alpha = 2 \\ 2^{\alpha-2} & \alpha > 2 \end{cases}$$

Nechť  $a^n \not\equiv 1 \pmod{p_i^{\beta_i}}$  pro  $0 < n < \lambda(p_i^{\beta_i})$ , nechť  $a \equiv 1 \pmod{2}$ ,  $a \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $a \equiv 3$  nebo  $5 \pmod{8}$ . Potom perioda generátoru  $X_{n+1} = a \cdot X_n \pmod{M}$  je největší a je rovna

$$\lambda(M) = NSD(\lambda(2^\alpha), \lambda(p_1^{\beta_1}), \dots, \lambda(p_r^{\beta_r}))$$

*Dukaz:* je založen na pojmu maximální univerzální exponent. □

**3.3 Testování hypotéz**

Uvedli jsme si tedy možnosti, jak generovat náhodná čísla. Nyní stojíme před problémem, jak ověřit, že generátor je dobrý. Budeme se tedy zabývat tzv. testováním hypotéz, které mají samozřejmě širší uplatnění.

Provádíme jednak testy významnosti, kdy známe typ rozdělení a zkoumáme jeho parametry, dále pak tzv. testy shody, kdy naopak zkoumáme typ rozdělení.

Myšlenka je taková, že necháme generátor pracovat po určitou dobu, a potom testujeme výsledek.

**3.3.1 Základní pojmy**

Vypočteme z vygenerovaných dat aritmetický průměr  $\mu_0 = \bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum X_i$ . Nastává otázka, zdali je toto číslo dobrým odhadem střední hodnoty  $\mu$ .

Hovoříme pak o hypotézách:

$H_0$ :  $\mu = \mu_0$  tzv. nulová hypotéza

$H_1$ :  $\mu \neq \mu_0$  tzv. alternativní hypotéza

Naším úkolem tedy bude rozhodnout se pro jednu z těchto hypotéz. Provedeme tedy test, na jehož základě pak hypotézu *zamítáme* (nevyhovuje testovacímu kritériu), resp. *nezamítáme*.<sup>16</sup>

Při testování se přitom můžeme dopustit chyby, a sice:

**chyba 1. druhu** – hypotézu  $H_0$  zamítneme, ačkoli je správná

**chyba 2. druhu** – hypotézu  $H_1$  nezamítneme, ačkoli správná není

Test přitom provádíme na určité *hladině významnosti*  $\alpha$ , což je pravděpodobnost chyby 1. druhu. (Pravděpodobnost chyby 2. druhu přitom musí být minimální.)

Nyní je třeba určit testovací kritérium.

<sup>16</sup>Ríkáme, že pouze hypotézu *nezamítáme*, nikoli že ji *přijmáme*; hypotéza se pouze při daném testu neukázala jako nepřipustná.

**Příklad 3.1**

Mějme generátor normálního rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$ . Typ rozdělení (normální) a rozptyl  $\sigma^2$  znám, chci ověřit střední hodnotu.

Vygeneruji tedy čísla  $x_1, \dots, x_k$ ; pokud potom  $\bar{X} \geq k$  (kde  $k$  je testovací kritérium), pak zamítáme  $\mathbf{H}_0$ , pokud  $\bar{X} < k$ , pak  $\mathbf{H}_0$  nezamítáme.<sup>17</sup>

Jak určíme  $k$ :

- Každé  $x_i$  podléhá normálnímu rozdělení  $N(\mu_0, \sigma^2)$ .
- Aritmetický průměr  $\bar{X}$  má rozdělení  $N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$ .
- Veličina  $\sqrt{n} \cdot \frac{(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma}$  má rozdělení  $N(0, 1)$ .

Nyní určíme číslo  $u(\alpha)$ , které náhodná veličina s rozdělením  $N(0, 1)$  překročí s pravděpodobností  $\alpha$ . Protože  $1 - F[u(\alpha)] = \alpha$ , je  $u(\alpha) = F^{-1}(1 - \alpha)$ ; tuto hodnotu nazýváme *kritickou hodnotou* rozdělení  $N(0, 1)$  na hladině významnosti  $\alpha$  (kvantil). Přitom  $F^{-1}$  je tzv. kvantilová funkce (inverzní k distribuční) a bývá tabelována.

Testovací kritérium úzce souvisí s kvantily:

$$P(\bar{X} \geq k) = P\left[\sqrt{n} \cdot \frac{(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \geq \sqrt{n} \cdot \frac{(k - \mu_0)}{\sigma}\right] = 1 - F\left(\sqrt{n} \cdot \frac{(k - \mu_0)}{\sigma}\right)$$

Má-li být  $P(\bar{X} \geq k) = \alpha$ , musí být

$$\begin{aligned} F\left(\sqrt{n} \cdot \frac{(k - \mu_0)}{\sigma}\right) &= 1 - \alpha \\ \sqrt{n} \cdot \frac{(k - \mu_0)}{\sigma} &= F^{-1}(1 - \alpha) \end{aligned}$$

a odtud

$$k = \mu_0 + \frac{\sigma \cdot u(\alpha)}{\sqrt{n}}$$

Tím jsme našli testovací kritérium. Celkově tedy:

$$\begin{aligned} \bar{X} \geq \mu_0 + \frac{\sigma \cdot u(\alpha)}{\sqrt{n}} & \text{ hypotézu } \mathbf{H}_0 \text{ zamítáme na hladině významnosti } \alpha \\ \bar{X} < \mu_0 + \frac{\sigma \cdot u(\alpha)}{\sqrt{n}} & \text{ hypotézu } \mathbf{H}_0 \text{ nezamítáme na hladině významnosti } \alpha \end{aligned}$$

**3.3.2 Test dobré shody**

Test  $\chi^2$  dobré shody se používá zejména pro test shody, tedy pro test typu rozdělení. Spočívá v tom, že součet kvadrátů  $n$  veličin s normálním rozdělením má  $\chi^2$ -rozdělení s  $n - 1$  stupni volnosti.

Test se provádí následovně:

1. určíme nějakou veličinu  $X$  s rozdělením  $\chi_{n-1}^2$
2. hypotézu zamítneme na hladině  $\alpha$ , pokud platí  $\chi^2 \leq \chi_{n-1}^2 \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$  nebo  $\chi^2 > \chi_{n-1}^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right)$   
hypotézu nezamítáme, je-li  $\chi_{n-1}^2 \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) < \chi^2 < \chi_{n-1}^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right)$

<sup>17</sup>Jedná se o tzv. jednostranný test.

### 3.3.3 Kolmogorovův–Smirnovův test

Máme náhodnou proměnnou, její (teoretickou) distribuční funkci  $F(X)$  a empiricky naměřenou distribuční funkci  $F_n(X)$ .

Testovací kritérium  $\sqrt{n} \cdot D_n$  má Kolmogorov-Smirnovovo rozdělení a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n} \cdot D_n < X) = F_{KS}(X)$$

kde  $D_n = \sup |F(X) - F_n(X)|$ .

Pokud  $F_{KS}(\sqrt{n} \cdot D_n) > 1 - \alpha$ , hypotézu zamítáme na hladině významnosti  $\alpha$ .

### 3.3.4 Frekvenční test

Obor hodnot rozdělíme na  $N$  intervalů, spočítáme počty čísel, které do jednotlivých intervalů spadají, a poté ověřujeme rovnoměrnost rozdělení náhodných čísel. Testujeme tedy, zda  $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$  s pravděpodobností  $p(\beta) - p(\alpha)$ .

Označme nyní  $\sigma_i$  očekávaný počet čísel v intervalu  $i$ ,  $e_i$  pak počet skutečný. Položme dále

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^N \frac{(\sigma_j - e_j)^2}{\sigma_j}$$

a na tuto veličinu použijeme test dobré shody.

#### Příklad 3.2

Testujeme tři generátory **A**, **B**, **C**, každým z nich vygenerujeme 100 čísel z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  a testujeme hypotézu, že se jedná o rovnoměrné rozdělení. Údaje uspořádáme do tabulky:

interval č.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\chi^2$
gener. <b>A</b>	9	10	11	11	10	9	9	10	11	10	0,60
gener. <b>B</b>	5	7	8	12	18	17	13	11	5	7	21,67
gener. <b>C</b>	8	7	12	8	13	12	13	7	8	12	6,00

Test provedeme na hladině významnosti  $\alpha = 0,05$ . Dostaneme  $\chi^2(0,975) = 2,7$ ,  $\chi^2(0,025) = 19,0$ , tedy generátory **A**, **B** na základě frekvenčního testu zamítáme, **C** nezamítáme.

### 3.3.5 Test náhodnosti výskytu číslic

Generujeme posloupnost dekadických číslic, a zajímá nás, jaká je pravděpodobnost, že mezi dvěma stejnými číslicemi je právě  $k$  číslic jiných. Tato pravděpodobnost má zřejmě geometrické rozdělení  $p_k = P(X = k) = 0,9^k \cdot 0,1$

Dále použijeme Kolmogorov-Smirnovův test: spočteme pro jednotlivá  $k$  pravděpodobnosti i hodnoty distribuční funkce (prakticky vzato po jistou „rozumnou“ hodnotu  $k$ ), s použitím relativních četností spočteme experimentální pravděpodobnosti, získáme  $p'_k, F'(k)$ . Nyní najdeme maximální rozdíl a porovnáme s kvantilem.

### 3.3.6 Poker test

Tímto testem zkoumáme skutečně to, jak „vhodný“ by zkoumaný generátor byl pro populární karetní hru: testujeme posloupnosti číslic rozdělené na pětičky. Uvažme tedy pětičky  $(a, b, c, d, e)$ , kde  $a, b, c, d, e \in \{0, 1, \dots, 9\}$ . Mohou nastat tyto případy s těmito pravděpodobnostmi:

I.	$abcde$	všechny číslice jsou různé	0,3024
II.	$aabcd$	jedna dvojice	0,5040
III.	$aabbc$	dvě dvojičky	0,1080
	$aaabc$	trojička	0,0720
IV.	$aaabb$	fullhouse	0,0090
	$aaaab$	poker	0,0045
V.	$aaaaa$	(pro číslice to možné je)	0,0001

Z těchto pravděpodobností pak spočtu očekávané četnosti, spočtu skutečné (experimentální) četnosti jednotlivých skupin a provedu  $\chi^2$ -test.

Pravděpodobnosti jsme přitom snadno určili pomocí elementární kombinatoriky.

**Poznámka.** Pro použití  $\chi^2$ -testu je třeba, aby v každé skupině (podle počtu různých číslic) bylo alespoň pět pětic, tedy celkem musíme vygenerovat 20000 pětic.

**Pravděpodobnost** se přitom spočte jako

$$\frac{d(d-1)\dots(d-r+1)}{d^k} \cdot \left\{ \begin{matrix} k \\ r \end{matrix} \right\}$$

kde  $\left\{ \begin{matrix} k \\ r \end{matrix} \right\}$  je tzv. Stirlingovo číslo:

#### Definice 3.12

Stirlingovo číslo  $\left\{ \begin{matrix} k \\ r \end{matrix} \right\}$  je počet možností, jak rozdělit  $k$  prvků právě do  $r$  neprázdných disjunktních podmnožin.  $\square$

Stirlingova čísla se dají generovat podobným způsobem jako čísla kombinační: zatímco  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ , je  $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} = m \cdot \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ m \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ m-1 \end{matrix} \right\}$ ; dále  $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 1$ ,  $\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1$ . Odtud již vyjdou hodnoty pravděpodobnosti.

### 3.3.7 Test výskytu úplných sad číslic

Při tomto testu zkoumáme, jak daleko musíme jít, aby ve vygenerované posloupnosti byla každá číslice zastoupena aspoň jednou. (Tak např. v posloupnosti 1 3 2 1 4 0 7 3 1 5 6 4 8 0 9 2 3 4 5... je  $r = 15$ .)

Dostáváme tak délky posloupností; zajímá nás pravděpodobnost, s jakou má posloupnost délku právě  $r$ :

- pro  $d \leq r < t$  dostaneme

$$p_r = \frac{d!}{d^r} \cdot \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ d-1 \end{matrix} \right\}$$

- pro delší posloupnosti pak

$$p_t = 1 - \frac{d!}{d^{t-1}} \cdot \left\{ \begin{matrix} t-1 \\ d \end{matrix} \right\}$$

Toto jsou teoretické pravděpodobnosti; při testování dostaneme experimentální, pak použijeme Kolmogorov–Smirnovův test.

### 3.3.8 Test minima a maxima

Na čísla se *nedíváme* jako na posloupnosti náhodných čísel: vygenerujeme  $t$   $N$ -tic čísel

$$\{r_1^{(1)}, r_2^{(1)}, \dots, r_N^{(1)}\}, \{r_1^{(2)}, \dots, r_N^{(2)}\}, \dots, \{r_1^{(t)}, \dots, r_N^{(t)}\}$$

a určíme náhodnou veličinu

$$m_j = \max_i r_i^{(j)}$$

Dále máme distribuční funkci (teoretickou)  $F(x) = x^N$  (pro  $x \in (0, 1)$ ), tu srovnáme s empirickou a použijeme Kolmogorov–Smirnovův test.

Analogicky lze testovat minimum:

$$m_j = \min_i r_i^{(j)}$$

a distribuční funkce

$$F(x) = 1 - (1 - x)^N$$

## 3.4 Generování náhodných veličin

Ukázali jsme si tedy postupně, jak vygenerovat náhodné číslo (číslíci) s rovnoměrným rozdělením  $R(0, 1)$ , uvedli jsme si rovněž část teorie čísel, o kterou jsme se opírali, a také jsme si ukázali, jak se dá testovat správnost našich generátorů. Nyní se dostáváme k tomu, k čemu celá kapitola směřovala, a sice ke generování náhodných veličin různých typů rozdělení.

### 3.4.1 Metoda inverzní transformace

V této metodě využijeme popis náhodné veličiny pomocí distribuční funkce, resp. pomocí funkce k ní inverzní –  $F^{-1}(y)$ . Náhodně zvolíme (vygenerujeme) číslo  $y$  a spočteme  $F^{-1}(y)$ . To je samozřejmě možné jen tehdy, pokud lze inverzní funkci k distribuční nalézt. (Např. takto nemůžeme vygenerovat náhodné rozdělení – víme, že kvantilová funkce  $F^{-1}(y)$  bývá nejčastěji tabelována.)

#### Příklad 3.3

Pokusíme se pomocí metody inverzní transformace vygenerovat exponenciální rozdělení.

Máme distribuční funkci  $F(x) = y = 1 - e^{-\lambda x}$  a funkci inverzní  $x = -\frac{\ln(1-y)}{\lambda}$ . Vezmeme tedy funkci  $z = -\frac{\ln x}{\lambda}$ . (Přitom víme, že  $\lambda$  je tzv. koeficient přeskočů a že náš systém má vlastnost bezpaměťovosti (kompetitivní inhibice); kdy přeskočí, to závisí na veličině s exponenciálním rozdělením.)

Jak nyní vypočteme  $\ln x$ : je totiž

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

a dále máme součet geometrické řady

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

která konverguje pro  $|x| \in (0, 1)$ . Protože tato řada je absolutně konvergentní, můžeme ji integrovat člen po členu

$$-\ln|1-x| = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

a dále máme

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

která konverguje rychleji (a navíc konverguje pro každé  $x \in R$ ). Pro  $|x| > 1$  pak dostanu  $\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| = \ln|1-x| + \ln|1+x|$ , odtud tedy vypočteme číslo  $x$  a logaritmy sečteme.

### 3.4.2 Zamítací metoda

Máme interval  $(a, b)$ , funkci hustoty  $f(x)$  a její maximum na tomto intervalu – označme  $M$ . Vygenerujeme dvě náhodná čísla  $r_1, r_2$ , poté určíme  $x = (b-a)r_1 + a$  a  $y = M \cdot r_2$  (tedy se „trefujeme“ číslem  $x$  do intervalu  $\langle a, b \rangle$  a číslem  $y$  do  $\langle 0, M \rangle$ ). Rozhodneme se nyní podle toho, zda  $y \leq f(x)$ : jestliže tento vztah platí, přijmeme hodnotu  $x$  za náhodnou veličinu, v opačném případě čísla  $r_1, r_2$  „zahodíme“ a generujeme znovu.

### 3.4.3 Interpolační metoda

Tuto metodu využijeme, pokud je funkce hustoty (resp. distribuční funkce) zadána tabulkou

$$\begin{array}{c|cccc} x & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \hline F(x) & F(\alpha_1) & F(\alpha_2) & \dots & F(\alpha_n) \end{array}$$

a máme vygenerovat spojitou náhodnou veličinu. Vygenerujeme tedy číslo  $r$  a zjistíme  $x$  přes interpolační přímkou – z podobnosti trojúhelníků. Pokud jsme tedy vygenerovali číslo  $r \in (F(\alpha_i), F(\alpha_{i+1}))$ , máme

$$\frac{x - \alpha_i}{r - F(\alpha_i)} = \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{F(\alpha_{i+1}) - F(\alpha_i)}$$

a po úpravách dostaneme

$$x = \alpha_i + (r - F(\alpha_i)) \cdot \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{F(\alpha_{i+1}) - F(\alpha_i)}$$

což je hledané náhodné číslo.

### 3.4.4 Normální rozdělení

Nyní se pokusíme generovat náhodnou veličinu s normálním rozdělením. K tomu nám poslouží

#### Věta 3.13 CENTRÁLNÍ LIMITNÍ VĚTA

Nechť  $X_1, X_2, \dots$  jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením, které má střední hodnotu  $\mu$  a (konečný) rozptyl  $\sigma^2$ . Označme  $\xi_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (X_1 + X_2 + \dots + X_n - n \cdot \mu)$  pro  $n = 1, 2, \dots$ . Pak  $\xi_n$  konverguje v distribuci k rozdělení  $N(0, \sigma^2)$ .  $\square$

Nyní využijeme centrální limitní věty k sestrojení generátoru náhodné veličiny s normálním rozdělením  $N(\mu, \sigma^2)$ .

Jestliže generátor náhodných čísel generuje rozdělení  $R(0, 1)$ , pak jeho střední hodnota je  $E[X] = \frac{1}{2}$  a rozptyl  $\sigma^2 = \frac{1}{12}$ . Sečtením  $n$  hodnot dostaneme náhodnou veličinu  $\sum_{i=1}^n X_i$  se střední hodnotou  $E[X] = \frac{n}{2}$  a rozptylem  $\sigma^2 = \frac{n}{12}$ . Odtud pak dostaneme, že

$$Y_n = \sqrt{\frac{12}{n}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{2} \right)$$

konverguje k  $N(0, 1)$ . Pro praktické počítání je vhodné volit např.  $n = 12$  (popř.  $n = 144$ , ale to je díky generování více hodnot pomalejší), pak máme vztah  $Y_{12} = \sum_{i=1}^{12} X_i - 6$ , resp.  $Y = Y_{12} \cdot \sigma + \mu$ , které již dává rozdělení  $N(\mu, \sigma)$ .

Nastává ovšem následující problém: jak jistě snadno nahlédneme, tento generátor nikdy nevyprodukuje hodnotu mimo interval  $(-6, 6)$  – „chvosty“ normálního rozdělení. Ty pak musíme aproximovat např. takto:

1.  $Z_n = Y_n + \frac{1}{20n} \cdot [Y_n^3 - 3 \cdot Y_n]$ , který již pro  $n = 5$  dobře aproximuje normální rozdělení, nebo
2. použít vztahy

$$\begin{aligned} Z_{2i} &= \sqrt{-2 \ln X_i} \cdot \sin 2\pi X'_i \\ Z_{2i+1} &= \sqrt{-2 \ln X_i} \cdot \cos 2\pi X'_i \end{aligned}$$

kde přitom pro  $X_i, X'_i$  použijeme dva různé generátory, např.

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= 5X_i \pmod{2^{35}} \\ X'_{i+1} &= 131X'_i \pmod{2^{35}} \end{aligned}$$

### 3.4.5 Geometrické rozdělení

Máme geometrické rozdělení  $Ge(p)$  dané vztahem  $P(X = x) = p \cdot q^x$ , kde  $q = 1 - p$ ; naší snahou bude vygenerovat číslo  $x$ .

Zajisté nás napadne triviální algoritmus – pomocí iterace: v každém kroku vygeneruji  $r$  a zkoumám, zda  $r > 1 - p$ : pokud ano, dám na výstup počet iterací jako  $x$ , jinak pokračuji dál (nastal neúspěch) a zvětším o jedničku počet iterací. Obecně potřebuji v průměru  $\frac{q}{p} + 1$  iterací, ale může se stát, že generování bude probíhat potenciálně do nekonečna. Je-li  $p$  malé, počet iterací roste; v tom případě používáme vztah

$$x = \left\lceil \frac{\log r}{\log q} \right\rceil$$

kde  $r$  je vygenerované číslo.

### 3.4.6 Binomické rozdělení

Generovat binomické rozdělení  $Bi(n, p)$  vygenerujeme nejnázve podle jeho definice – počet „úspěchů“ po provedení  $n$  pokusů. Vygenerujeme tedy  $n$  náhodných čísel, testujeme, zda  $r \leq p$ , pokud ano, přičteme jedničku k čítači úspěchů, jehož hodnotu nakonec prohlásíme za veličinu s binomickým rozdělením.

### 3.4.7 Poissonovo rozdělení

Víme, že Poissonovo rozdělení má počet událostí v určitém intervalu (pevné délky), pokud časové intervaly mezi událostmi mají rozdělení exponenciální. Proto by se dalo generovat Poissonovo rozdělení tak, že postupně generují veličiny s exponenciálním rozdělením (jak jsme si již ukázali), sčítám je tak dlouho, až v součtu překročí onu pevnou délku intervalu, a počet iterací prohlásit za veličinu s Poissonovým rozdělením.

Tato metoda je však neefektivní: proto vytvoříme nejprve proměnnou  $y = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln r$ , které má exponenciální rozdělení (použili jsme inverzní transformaci). Pokud považujeme délku toho intervalu za jednotkovou, dostáváme<sup>18</sup>

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^x t_i &\leq 1 < \sum_{i=1}^{x+1} t_i \\ -\frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^x \ln r_i &\leq 1 < -\frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^{x+1} \ln r_i \\ \sum_{i=1}^x \ln r_i &\geq -\lambda > \sum_{i=1}^{x+1} \ln r_i \\ \prod_{i=1}^x r_i &\geq e^{-\lambda} > \prod_{i=1}^{x+1} r_i \end{aligned}$$

Podle tohoto vztahu již počítáme  $x$ : vyjdeme z jedničky, ke které postupně přinásohubujeme vygenerovaná náhodná čísla  $r_i$ , až dostaneme číslo menší než  $e^{-\lambda}$ ; výsledkem je počet násobení. (Výhodou je fakt, že jsme se touto úpravou zbavili jinak nepříjemných logaritmu.)

### 3.4.8 Obecné metody generování

Nyní si rozmyslíme, jak vygenerovat náhodnou veličinu s obecným rozdělením, které neodpovídá žádnému z popsanych typů – funkce pravděpodobnosti je např. zadána tabulkou:

$x_i$	2	7	11	14
$p_i$	0,23	0,42	0,30	0,05

Zde máme dvě možnosti:

- buď vygenerujeme číslo a rozhodneme se – je-li  $r < 0,23$ , položíme  $x = 2$  atd.,
- nebo vytvoříme pole o sto prvcích, do jehož prvních 23 prvků dáme 2, do dalších 42 dáme 7 atd., pak jen vygenerujeme číslo  $r \in (0, 1)$ , vynásobíme jej stem, tím dostaneme index do pole a přečteme výsledek.

Metoda používající pole je samozřejmě rychlejší (zejména je-li pravděpodobnost v tabulce dána pro více hodnot a rozhodování by bylo pomalé), avšak nastává problém s pamětí, zvláště je-li pravděpodobnost udána např. v tisícinách (a jemněji). Máme-li např. tabulku

$x_i$	2	7	11	14
$p_i$	0,307	0,211	0,179	0,303

<sup>18</sup>Proměnná  $X$  má Poissonovo rozdělení – tu generujeme.



pak provedeme následující kroky: vypočteme

$$\begin{array}{rcl} m_1 = 9 & \dots & \text{sečtení číslic na místě desetin} \\ m_2 = 8 & \dots & \text{sečtení číslic na místě setin} \\ m_3 = 20 & \dots & \text{sečtení číslic na místě tisícín} \\ \hline \Sigma = 37 & \dots & \text{a toto je rozměr pole, které potřebuji} \end{array}$$

Nyní vytvoříme ono 37-prvkové pole. V něm prvních devět prvků odpovídá desetinnám čísla  $r$ , dalších osm setinám, a posledních dvacet tisícínám. Pole  $A$  tedy vypadá následovně:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \dots \\ 2 & 2 & 2 & 7 & 7 & 11 & 14 & 14 & 14 & 7 & 11 & \dots \end{array}$$

Nyní vygenerujeme náhodné číslo, které rozdělíme na desetinné číslice

$$r = K_1 \cdot 10^{-1} + K_2 \cdot 10^{-2} + K_3 \cdot 10^{-3} (+\dots)$$

a vytvoříme výsledek (pro pravděpodobnosti v tisícínách)

$$\begin{array}{ll} A(K_1) & \text{je-li } K_1 < m_1 \\ A(10 \cdot K_1 + K_2 - 9 \cdot m_1) & \text{je-li } 10 \cdot m_1 < 10 \cdot K_1 + K_2 < 10 \cdot m_1 + m_2 \\ A(K - 99 \cdot m_1 - 9 \cdot m_2) & \text{jinak; přitom } K = 100 \cdot K_1 + 10 \cdot K_2 + K_3 \end{array}$$

Podobně by se postupovalo, pokud by byly pravděpodobnosti určeny na více desetinných míst.

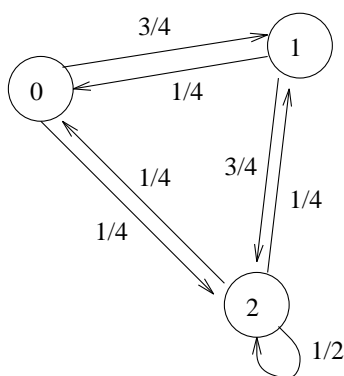
## 4 Markovovské procesy

### 4.1 Markovovské řetězce

Na úvod kapitoly o Markovovských řetězcích si uvedeme příklad, pomocí něhož si přiblížíme pojmy.

Představme si hippieho (háška, tuláka, somráka, pobudu...), který cestuje stopem do různých měst. V čase  $t = 0$  se nachází v jednom určitém městě. Uvažujeme přitom o *konečném* počtu měst, do nichž se může dostat. Přitom to, do kterého města dále cestuje, záleží na počasí, náladě, atd., tedy pro nás budou tyto jevy náhodné. Budeme však předpokládat, že známe pravděpodobnosti, se kterými se v určitý okamžik dostane z jednoho města do druhého. Tyto pravděpodobnosti přechodů budou přitom v čase neměnné, tedy systém je homogenní. Necht' se hippie nachází na počátku v městě 0 a necht' jsou další dvě místa, kam se může dostat (viz obrázek 5). Pravděpodobnosti přechodu budou tyto:  $p_{01} = \frac{3}{4}, p_{02} = \frac{1}{4}, p_{10} = \frac{1}{4}, p_{12} = \frac{3}{4}, p_{20} = \frac{1}{4}, p_{21} = \frac{1}{4}, p_{22} = \frac{1}{2}$ . Zkusíme nyní spočítat pravděpodobnosti  $\pi_i^{(n)}$ , s nimiž se nachází  $n$ -tý den v městě  $i$ , a to potenciálně až „do soudného dne“ – do nekonečna:

$$\begin{array}{cccccccc} n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \infty \\ \pi_0^{(n)} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0,187 & 0,203 & \dots & 0,20 \\ \pi_1^{(n)} & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{16} & 0,359 & 0,254 & \dots & 0,28 \\ \pi_2^{(n)} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{11}{16} & 0,454 & 0,543 & \dots & 0,52 \end{array}$$



Obrázek 5: Cestující hippie

Všimněme si, že v nekonečnu (resp. po dostatečně dlouhé době) nezáleží na počátečním stavu: náš systém se stabilizoval a můžeme tedy spočítat pravděpodobnosti  $p_0, p_1, p_2$ , se kterými se hippie nachází v jednotlivých městech. Dostaneme tak homogenní systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{4}p_1 + \frac{1}{4}p_2 \\ p_1 &= \frac{3}{4}p_0 + \frac{1}{4}p_2 \\ p_2 &= \frac{1}{4}p_0 + \frac{1}{4}p_1 + \frac{1}{2}p_2 \end{aligned}$$

který dále upravíme na

$$\begin{aligned} 4p_0 - p_1 - p_2 &= 0 \\ -3p_0 + 4p_1 - p_2 &= 0 \\ -p_0 - 3p_1 + 2p_2 &= 0 \end{aligned}$$

a přidáme dodatečnou podmínku, aby systém byl jednoznačně řešitelný, a aby čísla  $p_0, p_1, p_2$  byly pravděpodobnostmi

$$\sum_{i=0}^2 p_i = 1$$

Řešením tohoto systému jsou pak pravděpodobnosti, které jsme si označili jako  $\pi_i^{(\infty)}$ .

Máme tedy následující rovnice, které upravíme a provedeme limitní přechod:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}^{(1)} &= \pi^{(0)} \cdot p \\ \bar{\Pi}^{(n+1)} &= \pi^{(n)} \cdot p \\ \bar{\Pi}^{(n+1)} &= \pi^{(0)} \cdot p^n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\Pi}^{(n+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\Pi}^{(n)} \cdot p \\ \bar{\Pi} &= \bar{\Pi} \cdot p \end{aligned}$$

Pokud nyní uvážíme posloupnost měst, v nichž se hippie nachází (posloupnost stavů systému), máme posloupnost  $\{X_i\}$  náhodných veličin. Můžeme se na ni dívat různě – např. jako délku fronty v určitém systému hromadné obsluhy; její průběh (např. 0 1 0 2 1 2 2...) je náhodný, nazveme tedy tuto posloupnost *stochastickou*.

## 4.2 Diskrétní markovovské řetězce

### 4.2.1 Definice pojmů

#### Definice 4.1

Diskrétní Markovovský řetězec je posloupnost náhodných veličin  $\{X_i\}$ , pro kterou platí

$$P[X_n = j | X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}] = P[X_n = j | X_{n-1} = i_{n-1}]$$

a to pro každé  $n$  a pro každé  $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ .

Slovní vyjádření definice: znalost několika minulých stavů nám dává stejnou informaci, jako znalost stavu posledního. Budoucnost je závislá pouze na přítomnosti.

#### Definice 4.2

Uvážíme nyní čas jako diskrétní veličinu, a označíme  $p_{ij}$  pravděpodobnost přechodu ze stavu  $i$  do stavu  $j$  (v určitém kroku). Pravděpodobnosti přechodu se přitom mohou měnit – pak hovoříme o nehomogenních řetězcích; pokud se nemění, nazýváme řetězec homogenní.

#### Definice 4.3

Mějme Markovovský řetězec s množinou stavů  $A = \{E_0, E_1, \dots\}$ . Je-li  $|A| < \infty$ , říkáme, že příslušný Markovovský řetězec je *konečný*; v opačném případě, tedy pokud  $|A| = \infty$ , hovoříme o *nekonečném* řetězci.

#### Definice 4.4

V Markovovském řetězci zavedeme pravděpodobnosti (jednokrokových) přechodů takto:  $P[X_n = j | X_{n-1} = i] = p_{ij}$ . Přitom u homogenních řetězců nezávisí tyto pravděpodobnosti na indexu  $n$ .

Dále definujeme vícekové přechody:

$$p_{ij}^{(1)} = p_{ij} \tag{17}$$

$$p_{ij}^{(m)} = P[X_{n+m} = j | X_n = i] = \sum_k p_{ik}^{(m-1)} \cdot p_{kj} \quad (m \geq 2) \tag{18}$$

Všimněme si, že vícekový přechod je interpretován jako přechod přes libovolný jiný stav  $k$ , pravděpodobnosti jsou sečteny.

#### Definice 4.5

Množina stavů  $A_1 \subseteq A$  se nazývá *uzavřená*, pokud z ní neexistuje přechod (ani jedno-, ani vícekový) do stavu z množiny  $A_1^C = A - A_1$ .

Stav  $E_i$  se nazývá *absorbující*, pokud množina  $\{E_i\}$  je uzavřená, jinými slovy,  $p_{ii} = 1$  (tedy ze stavu není úniku, je to jakási „černá díra“).

#### Definice 4.6

Markovovský řetězec se nazývá *reducibilní*, pokud existuje vlastní uzavřená podmnožina množiny  $A$  (tj. tuto množinu stavů lze sledovat zvlášť).

Analogicky řetězec je *ireducibilní*, pokud každý stav může být dosažen z libovolného jiného, tedy pokud  $\forall i, j : \exists m_0(i, j) : p_{ij}^{(m_0(i, j))} > 0$ .

**Definice 4.7**

Označme nyní  $f_j^{(n)}$  jako pravděpodobnost, že první návrat do stavu  $E_j$  se objeví přesně  $n$  taktů po opuštění  $E_j$ . Dále označíme  $f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)}$ , tedy pravděpodobnost, že se do stavu vůbec vrátíme. Nyní

- pokud  $f_j = 1$ , nazveme stav  $E_j$  *rekurentní*,
- pokud  $f_j < 1$ , nazveme stav  $E_j$  *tranzientní*.

Střední dobu rekurence stavu  $E_j$  definujeme jako

$$M_j \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_j^{(n)}$$

přičemž pokud je  $M_j = \infty$ , je stav  $E_j$  *rekurentně prázdný*, zatímco pro  $M_j < \infty$  se nazývá *rekurentně neprázdný*.

**Definice 4.8**

Stav  $E_j$  nazýváme *periodický*, je-li návrat do  $E_j$  možný pouze po  $\gamma, 2\gamma, 3\gamma, \dots$  krocích ( $\gamma > 1$ ). Je-li návrat možný kdykoliv (tedy platí-li to i pro  $\gamma = 1$ ), nazývá se stav *aperiodický*.

**Definice 4.9**

Stav  $E_j$  se nazývá *ergonický*, pokud je zároveň aperiodický, rekurentní a rekurentně neprázdný (tedy  $f_j = 1$ ,  $M_j < \infty$ ,  $\gamma = 1$ ).

Markovův řetězec je ergonický, právě když je každý jeho stav ergonický.

**Poznámka 4.10**

Uvažme nyní systém rovnic

$$\begin{aligned} \pi_j &= \sum_i \pi_i \cdot p_{ij}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \\ \sum_j \pi_j &= 1 \end{aligned} \tag{19}$$

Vyslovíme nyní o ergonických řetězcích několik tvrzení:

**Věta 4.11**

Platí:

1. Všechny stavy konečného aperiodického ireducibilního Markovovského řetězce jsou ergonické.
2. Ireducibilní aperiodický Markovovský řetězec je ergonický, jestliže systém 19 má nenulové řešení, pro které platí  $\sum_j |\pi_j| < \infty$ .
3. Limity  $\pi_j$  ergonického řetězce, které se nazývají *pravděpodobnosti rovnovážného stavu*, nezávisí na počáteční hodnotě  $\pi_j^{(0)}$ .

**Věta 4.12**

Stavy v ireducibilním Markovovském řetězci jsou všechny buď tranzientní, nebo rekurentně prázdné, nebo rekurentně neprázdné; pokud jsou periodické, mají stejnou periodu  $\gamma$ .

**Věta 4.13**

V ireducibilním aperiodickém Markovovském řetězci existují limity  $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_j^{(n)}$  nezávislé na  $\pi_j^{(0)}$ . Navíc buď

- všechny stavy jsou tranzientní nebo rekurentně prázdné a  $\pi_j = 0$  pro každé  $j$  a neexistují stacionární distribuce pravděpodobnosti (systém se neustálí)
- všechny stavy jsou rekurentně neprázdné, a pak  $\pi_j > 0$  pro každé  $j$ , navíc  $\pi_j$  je stacionární distribuce pravděpodobnosti, pro niž platí  $\pi_j = \frac{1}{M_j}$  (kde  $M_j$  je střední doba rekurence).

**4.2.2 Chapman–Kolmogorovovy rovnice**

Pravděpodobnost, že systém zůstane ve stavu  $E_i$  přesně  $n$  kroků po přechodu do  $E_i$  je rovna  $P = (1 - p_{ii}) \cdot p_{ii}^n$ , podléhá tedy geometrickému rozdělení.

Snadno rovněž spočteme pravděpodobnost  $p_{ij}(m, n)$  jako pravděpodobnost přechodu, kdy v  $m$ -tém kroku je systém ve stavu  $i$  a v  $n$ -tém kroku ve stavu  $j$ :

$$\begin{aligned} p_{ij}(m, n) &= \sum_k P[X_n = j \wedge X_q = k | X_m = i] \\ &= \sum_k P[X_q = k | X_m = i] \cdot \underbrace{P[X_n = j | X_m = i \wedge X_q = k]}_{=P[X_n=j|X_q=k]} \end{aligned}$$

Odtud již dostaneme rovnice popisující systém – **Chapman–Kolmogorovovy rovnice**:

$$p_{ij}(m, n) = \sum_k p_{ik}(m, q) \cdot p_{kj}(q, n) \quad (20)$$

Vytvořme nyní matici  $H(m, n) = [p_{ij}(m, n)]$ ,  $P = [p_{ij}(m, n + 1)]$ ; dále  $H(m, n + 1) \equiv P$  a  $H(m, m + n) = P^n$ . Odtud dostaneme Ch-K rovnice v maticové formě:

$$H(m, n) = H(m, q) \cdot H(q, n) \quad (21)$$

**Poznámka.** Číslo  $q$  v rovnicích 20 a 21 přitom volíme libovolně mezi  $m$  a  $n$ , nejnázve  $m + 1$  nebo  $n - 1$ . Dostáváme potom

$$\begin{array}{ll} q = n - 1 & H(m, n) = H(m, n - 1) \cdot P \quad \text{Ch-K rovnice dopředu} \\ q = m + 1 & H(m, n) = P \cdot H(m + 1, n) \quad \text{Ch-K rovnice dozadu} \end{array}$$

**4.3 Markovovy procesy**

Nyní necháme čas téci spojitě a budeme počítat „spojité“ pravděpodobnosti. Nejprve si zavedeme pojem *Markovovského procesu*, který má stejnou vlastnost bezpaměťovosti jako diskrétní Markovovský řetězec:

**Definice 4.14**

Náhodný proces  $X(t)$  tvoří Markovovský proces se spojitým časem (Markovovský proces), pokud pro každé  $n$  a pro každou posloupnost  $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$  takovou, že  $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$  platí:

$$P(X(t_{n+1}) = j | X(t_1) = i_1 \wedge X(t_2) = i_2 \wedge \dots \wedge X(t_n) = i_n) = P(X(t_{n+1}) = j | X(t_n) = i_n)$$

Ekvivalentně lze napsat

$$P(X(t) = j | X(\tau) \text{ pro } \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2 < t) = P(X(t) = j | X(\tau_2))$$

**4.3.1 Pravděpodobnosti přechodu**

Ve stavu  $E_i$  musíme mít nyní distribuci pravděpodobnosti závisující jen na  $E_i$  a ne na tom, jak dlouho již systém v tomto stavu je. Mějme tedy

$$P[\tau_i > s + t | \tau_i > s] \stackrel{df}{=} h(t)$$

přítom

$$P[\tau_i > s + t | \tau_i > s] = \frac{P[\tau_i > s + t \cap \tau_i > s]}{P[\tau_i > s]}$$

dále vzhledem vztahu pro podmíněnou pravděpodobnost  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  dostáváme úpravami

$$\begin{aligned} P[\tau_i > s + t] &= P[\tau_i > s] \cdot h(t) \\ P[\tau_i > s + t] &= P[\tau_i > s] \cdot P[\tau_i > t] \end{aligned}$$

Dále platí  $P[\tau_i > t] = h(t)$ , protože pro  $s = 0$  je  $P[\tau_i > 0] = 1$ . Máme tedy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underbrace{P[\tau_i > t]}_{=f_{\tau_i}(t)} &= \frac{d}{dt} \underbrace{(1 - P[\tau_i \leq t])}_{=f_{\tau_i}(t)} \\ \frac{dP[\tau_i > s + t]}{ds} &= f_{\tau_i}(s) \cdot P[\tau_i > t] \\ \int_0^t \frac{dP[\tau_i > t]}{P[\tau_i > t]} &= \int_0^t f_{\tau_i}(0) \\ \ln P[\tau_i > t] &= -f_{\tau_i}(0) \cdot t \\ P[\tau_i > t] &= e^{-f_{\tau_i}(0) \cdot t} \\ \frac{d}{dt} P[\tau_i > t] &= -f_{\tau_i}(0) \cdot e^{-f_{\tau_i}(0) \cdot t} \end{aligned}$$

a dostáváme tak exponenciální rozdělení

$$f_{\tau_i}(t) = f_{\tau_i}(0) \cdot e^{-f_{\tau_i}(0) \cdot t} \quad (22)$$

Nyní zavedeme pravděpodobnosti  $p_{ij}$

$$p_{ij}(s, t) \stackrel{df}{=} P[X(t) = j | X(s) = i]$$

přičemž platí

$$p_{ij}(s, t) = \sum_k p_{ik}(s, u) \cdot p_{kj}(u, t)$$

Zapsáno maticovou formou pak

$$H(s, t) \stackrel{df}{=} [p_{ij}(s, t)]$$

a opět platí  $H(s, t) = H(s, u) \cdot H(u, t)$ . Dále pak platí  $H(t, t) = E$  (jednotková matice, pokud nedochází ke změnám).

#### Definice 4.15

Zavedeme nyní matici  $P(t) = [p_{ij}(t, t + \Delta t)]$  a provedeme limitní přechod  $\Delta t \rightarrow 0$ . Dostaneme

$$q_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t, t + \Delta t) - \delta_{ij}}{\Delta t}$$

a toto číslo nazveme *intenzitou přechodu* ze stavu  $i$  do stavu  $j$ .

Dále zavedeme intenzitu výstupu ze stavu  $i$

$$q_{ii}(t) = \frac{p_{ii}(t, t + \Delta t) - 1}{\Delta t}$$

a matici

$$Q(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t) - E}{\Delta t}$$

(jinak zapsáno,  $Q(t) = [q_{ij}(t)]$ , a to včetně  $q_{ii}(t)$ ); přitom platí, že  $\sum_j q_{ij}(t) = 0$ .

#### 4.3.2 Chapman–Kolmogorovy rovnice.

Máme tedy matice  $H$ , pro které platí

$$H(m, n) = H(m, n-1) \cdot P(n-1)$$

$$H(m, n) - H(m, n-1) = H(m, n-1) \cdot P(n-1) - H(m, n-1) = H(m, n-1) \cdot (P(n-1) - E)$$

Nyní opět provedeme limitní přechod  $\Delta t = (n-1, n) \rightarrow 0$  a dostaneme

$$\frac{\partial H(s, t)}{\partial t} = H(s, t) \cdot Q(t)$$

což rozepsáno do složek je

$$\frac{\partial p_{ij}(s, t)}{\partial t} = q_{ij}(t) \cdot p_{ij}(s, t) + \sum_{k \neq j} q_{kj} \cdot p_{ik}(s, t)$$

kde přitom

$$p_{ij}(s, t) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Takto jsme tedy získali Chapman–Kolmogorovy rovnice, jejichž řešení je

$$H(s, t) = \exp\left(\int_s^t Q(u) du\right)$$

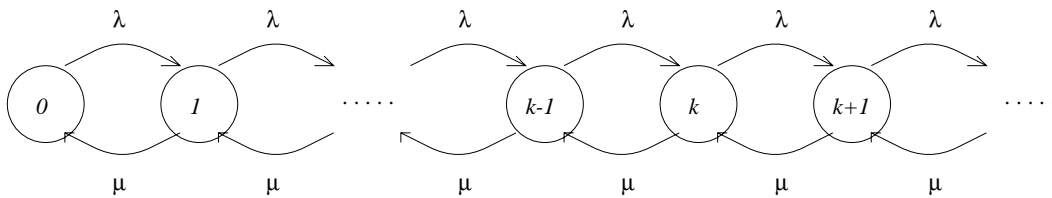
Zavedeme nyní vektor  $\bar{\pi}(t) \stackrel{\text{df}}{=} (\pi_0(t), \pi_1(t), \dots)$ , což jsou pravděpodobnosti, že celočíselná náhodná veličina, představující stav systému, nabývá hodnoty  $0, 1, \dots$ . Přitom zavedeme  $\bar{\pi}(0) \stackrel{\text{df}}{=} (\pi_0(0), \pi_1(0), \dots) = (1, 0, 0, \dots)$ , tedy systém je na počátku prázdný.

Nyní chceme spočítat  $\pi(t)$ , známe-li  $\pi(0)$ : máme

$$\begin{aligned}\bar{\pi}(t) &= \bar{\pi}(0) \cdot H(0, t) \\ \bar{\pi}(t) &= \bar{\pi}(0) \cdot \exp\left(\int_s^t Q(u) du\right) \\ \frac{d\pi_j(t)}{dt} &= q_{ij}(t)\pi_j(t) + \sum_{k \neq j} q_{kj}(t)\pi_k(t) \\ \frac{d\bar{\pi}(t)}{dt} &= \bar{\pi}(t) \cdot Q(t)\end{aligned}$$

#### 4.4 Procesy vzniků a zániků

Mějme opět náhodnou proměnnou  $X(t)$ , představující stav systému. Budeme nyní vyšetřovat systémy, v nichž se za dobu  $\Delta t$  změní nejvýše o 1 (přibude nebo ubude jednička). Systém charakterizují tzv. intenzity přechodu  $\lambda, \mu$ ; znázorníme je v tzv. *přechodovém grafu* (obrázek 6).



Obrázek 6: Přechodový graf procesu vzniků a zániků

Do stavu  $E_k$  se přitom mohou dostat těmito způsoby:

- ze stavu  $E_{k+1}$  – „zánik“, nastane s pravděpodobností  $p_{k+1,k}(t + \Delta t)$
- ze stavu  $E_k$  – nestane se nic, s pravděpodobností  $p_{k,k}(t + \Delta t)$
- ze stavu  $E_{k-1}$  – „vznik“, nastane s pravděpodobností  $p_{k-1,k}(t + \Delta t)$

Znamená to tedy, že při zkoumání stavu  $E_k$  potřebují znát pouze  $E_{k\pm 1}$ .

Pravděpodobnost vzniku události v intervalu  $(t, t + \Delta t)$  za předpokladu, že v čase  $t$  byl systém ve stavu  $k$ , je rovna

$$p_{k,k+1}(t + \Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

kde  $o(\Delta t)$  je veličina řádově menší než  $\Delta t$  (přesněji  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ ). Nyní uvažíme, že ve výrazu  $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \dots$  jsou všechny členy až na první dva malé, máme tedy  $1 - e^{-x} \doteq \frac{x}{1!} = x$  a odtud

$$p_{k,k-1}(t + \Delta t) = P[\text{zánik události}] = \mu \Delta t + o(\Delta t) \quad (23)$$



Vidíme tedy, že markovovské systémy jsou matematicky snadno zvládnutelné. Dále máme

$$P[\text{nedojde k vzniku}] = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t) \quad (24)$$

$$P[\text{nedojde k zániku}] = 1 - \mu\Delta t + o(\Delta t) \quad (25)$$

$$\begin{aligned} P[\text{nic se nestane}] &= p_{k,k}(t + \Delta t) \\ &= [1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)] \cdot [1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)] = 1 - (\mu + \lambda)\Delta t + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (26)$$

přičemž k jinému přechodu dochází s malou pravděpodobností  $p_{ij}(t + \Delta t) = o(\Delta t)$ .

Nechť nyní systém byl ve stavech  $E_{k-1}, E_k, E_{k+1}$  s pravděpodobnostmi  $p_{k-1}(t), p_k(t), p_{k+1}(t)$ . Spočteme dále pravděpodobnosti v čase  $t + \Delta t$ :

$$p_k(t + \Delta t) = p_k(t) \cdot p_{k,k}(t + \Delta t) + p_{k-1}(t) \cdot p_{k-1,k}(t + \Delta t) + p_{k+1}(t) \cdot p_{k+1,k}(t + \Delta t) \quad (27)$$

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t) \cdot p_{00}(t + \Delta t) + p_1(t) \cdot p_{10}(t + \Delta t) \quad (28)$$

Máme tedy nekonečný systém rovnic, jehož úpravami dostáváme

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t) - \lambda\Delta t \cdot p_0(t) + \mu\Delta t \cdot p_1(t) - o(\Delta t)$$

$$p_k(t + \Delta t) = p_k(t) + \lambda\Delta t \cdot p_{k-1}(t) - (\mu + \lambda)\Delta t \cdot p_k(t) + \mu\Delta t \cdot p_{k+1}(t) + o(\Delta t)$$

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t)$$

$$\frac{p_k(t + \Delta t) - p_k(t)}{\Delta t} = \lambda \cdot p_{k-1}(t) - (\mu + \lambda) \cdot p_k(t) + \mu \cdot p_{k+1}(t)$$

Nyní provedeme limitní přechod  $\Delta t \rightarrow 0$  a dostaneme

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

$$p_k'(t) = \lambda p_{k-1}(t) - (\mu + \lambda) p_k(t) + \mu p_{k+1}(t) \quad (29)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1$$

a to jsou **Chapman–Kolmogorovy rovnice** pro proces vzniků a zániků. Matice  $Q$  pak vypadá následovně:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \mu & 0 & \dots \\ \lambda & -(\lambda + \mu) & \mu & \dots \\ 0 & \lambda & -(\lambda + \mu) & \mu & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Kromě tří diagonál hlavního směru má tedy matice nulové prvky.

## 5 Systémy hromadné obsluhy

### 5.1 Úvod do problematiky

Nyní využijeme předešlé teorie k modelování systémů hromadné obsluhy, neboli systémů s frontami. Jako praktický příklad můžeme uvést např. frontu na poště, u výčepu, ale také frontu tiskových požadavků na tiskárně, a mnoho jiných. Nadefinujeme si tedy pojmy, které budeme používat, veličiny, které systém charakterizují, a posléze probereme jednotlivé typy systémů hromadné obsluhy.

### 5.1.1 Základní pojmy

Do systému přichází určitý *vstupní proud* (zákazníci), požadavky se postupně řadí do fronty, odkud je vybírá *linka obsluhy*. Poté zákazníci systém opouštějí.

Systém může mít rozličnou formu<sup>19</sup>, fronta může být (potenciálně) nekonečná nebo konečná (omezený počet míst na čekání), frontový režim může být rozličný (obvyklý FIFO, zásobník LIFO, priority,...), vstupní proud a obsluha se může rovněž chovat různými způsoby.

Čas je v systému spojitý; doba obsluhy je náhodná veličina s určitým typem rozdělení a parametrem  $\mu$ , který vyjadřuje střední počet *obsloužených* zákazníků za jednotku času. Podobně tzv. parametr vstupního proudu  $\lambda$  představuje počet *příchozích* zákazníků za jednotku času.

Dále si definujeme:

$t_0$  – počátek sledování (víceméně umělá hodnota)

$t_0, t_1, t_2, \dots$  – příchody zákazníků ( $t_i < t_{i+1}$ ); pravděpodobnost příchodu více zákazníků v jediném okamžiku je zanedbatelně malá (rovna  $o(t)$ )

$\tau_k$  – interval mezi zákazníky,  $\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k$

$N(t)$  – počet zákazníků došlých v čase  $t$

$N(s, t)$  – počet zákazníků došlých v intervalu délky  $t$  od okamžiku  $s$ , tedy  $N(s, t) = N(s+t) - N(s)$ ; přitom  $N(0, t) = N(t)$

$p_k(t) = P[N(t) = k]$

$X(t)$  bude zpravidla značit počet zákazníků v systému.

(Ostatní charakteristické veličiny si zavedeme později.)

### 5.1.2 Řádové srovnávání funkcí

#### Definice 5.1

Nechť  $f(x), g(x)$  jsou reálné funkce, nechť dále  $\alpha \in R^\#$ . Pokud platí, že  $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , řekneme, že  $f(x)$  je pro  $x \rightarrow \alpha$  *řádově menší* než  $g(x)$  a píšeme  $f(x) = o(g(x))$  pro  $x \rightarrow \alpha$ .

#### Příklad 5.1

Pro  $x \rightarrow \infty$  je  $x^3 = o(e^x)$ .

Pro  $x \rightarrow 0$  je také  $x^3 = o(x^2)$ .

#### Definice 5.2

Je-li  $f(x) - g(x) = o(g(x))$ , a zároveň  $f(x) - g(x) = o(f(x))$ , pak funkce  $f(x), g(x)$  se nazývají *ekvivalentní*.

---

<sup>19</sup>Na Slovensku bychom rekli: každý má svoje špecifiká.

### 5.1.3 Kendallova klasifikace

Pro systémy hromadné obsluhy je zavedena tzv. Kendallova klasifikace, která třídí systémy podle těchto hledisek:

- příchod zákazníků do systému,
- proces obsluhy zákazníků,
- počet linek obsluhy.

Podle těchto ukazatelů se zapisuje typ systému ve tvaru  $X/Y/C$ , kde  $C$  je číslo (počet linek, může být i nekonečný), význam písmen je v tabulce 1. Nejjednodušší systém je  $M/M/1$  (pokud chce-

Tabulka 1: Kendallova klasifikace systémů hromadné obsluhy – význam zkratk.

<i>Písmeno</i>	<i>Význam na místě X</i>	<i>Význam na místě Y</i>
$M$	Poissonův proces příchodů	exponenciální doba obsluhy
$E_k$	intervaly mezi příchody zákazníků mají Erlangovo rozdělení s $k$ stupni volnosti (tzv. skupinové příchody – odpovídá tomu totiž to, že zákazníci přicházejí po skupinkách: vojenský lékař prohlídne dalších deset; jiná interpretace – obsluhován je jen každý $k$ -tý zákazník)	doba obsluhy má Erlangovo rozdělení (opět toto složení několika rozdělení exponenciálních lze interpretovat tak, že zákazník je postupně obsluhován na $k$ linkách obsluhy)
$D$	doby příchodů jsou deterministické (když se do náhody strká determinismus, je to vždycky průšvih – jako když se do determinismu strká náhoda...)	doba obsluhy jednoho požadavku je deterministická
$G$	o časech příchodů, resp. obsluhy, nevíme vůbec nic (zcela obecný systém)	

me zdůraznit i potenciální délku fronty a frontový režim, zapíšeme  $M/M/1/\infty/FIFO$ , kterým se budeme zabývat jako prvním.

### 5.1.4 Charakteristické veličiny

Zákazník přijde do systému v čase  $t_i$  a opustí systém v čase  $x_i$ ; v systému stráví dobu  $w_i = x_i - t_i$ . Dále máme interval  $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ , distribuční funkci  $P(\tau_n \leq \tau) = A_n(\tau)$ , funkci  $B(x) = 1 - A(x)$ ,  $A'(x) = a(x) = -b(x)$ .

Posloupnosti  $\{t_n\}$ ,  $\{x_n\}$  (tedy kdy zákazníci přišli a odešli) přitom jednoznačně popisují konkrétní chování systému v čase.

Označíme nyní

$\alpha(t)$  – počet zákazníků, kteří dosud přišli,

$\delta(t)$  – počet zákazníků, kteří byli dosud obslouženi (přitom je-li  $\alpha(t) = \delta(t)$ , systém v okamžiku  $t$  stojí),

$\gamma(t)$  – celkový čas strávený zákazníky v systému, spočte se

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^t (\alpha(t) - \delta(t)) dt$$

$\lambda_t$  – intenzita příchodů,  $\lambda_t = \frac{\alpha(t)}{t}$ ,

$\mu$  – intenzita obsluhy,

$\varrho$  – intenzita provozu  $\varrho = \frac{\lambda}{\mu}$ ,

$T_t$  – střední doba strávená zákazníkem v systému,  $T_t = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}$ ,

$\bar{N}_t$  – střední počet zákazníků v systému,  $\bar{N}_t = \frac{\gamma(t)}{t} = \lambda_t \cdot T_t$ ,

$\lambda$  – intenzita příchodů,  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_t$ ,

$T$  – střední doba strávená zákazníkem v systému,  $T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_t$ ; přitom platí tzv. *Littlův vztah* (Little's formula)  $\bar{N} = \lambda \cdot T$ .

Dále budeme počítat tyto veličiny (resp. jejich střední hodnoty):

$L$  – počet zákazníků v systému,

$Q$  – délka fronty,

$W$  – doba strávená zákazníkem ve frontě,

$R$  – doba strávená zákazníkem v systému.

Rovněž je možné uvažovat tzv. busy period – délku nepřetržitého chodu linky obsluhy. V jednotlivých příkladech systémů pak budeme zavádět podle potřeby dodatečné parametry – např. pravděpodobnost rezignace zákazníka.

### 5.1.5 Obvyklý postup při analýze

Obecně při výpočtu parametrů systému hromadné obsluhy lze doporučit následující postup:

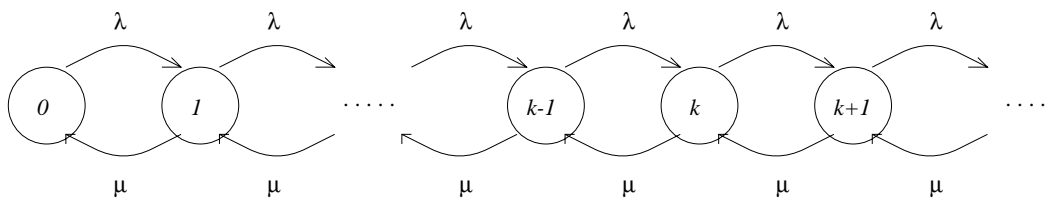
1. Ze všeho nejdříve je třeba určit, o jaký systém se vlastně jedná (tady např. zjistit, zdali má Markovovskou vlastnost apod.).
2. Máme-li  $X(t)$ , můžeme sestavit přechodový diagram, kde máme spočteny intenzity přechodu a intenzity výstupu.
3. Sepíšeme Chapman–Kolmogorovy rovnice systému.
4. Vypočteme pravděpodobnosti  $p_k(t)$ , resp.  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t)$  (tedy budeme systém analyzovat až v nekonečnu – ve stabilizovaném stavu).
5. Spočteme hodnoty  $L, Q, W, R$  (viz výše).

## 5.2 Systém $M/M/1$

Jako první si uvedeme nejjednodušší systém hromadné obsluhy  $M/M/1$ , kde příchody zákazníků i doby obsluhy jsou markovovské, fronta má potenciálně nekonečnou délku (může růst nade všechny meze), a je v ní zaveden obvyklý frontový režim *FIFO*. Vycházíme z hodnot parametrů  $\lambda, \mu$  a z náhodné proměnné  $X(t)$ .

### 5.2.1 Přejchodový diagram

znázorňuje stavy systému a intenzity přechodu mezi nimi (obrázek 7). Přitom, jak jsme již uvedli, lze realizovat přechod pouze do sousedního stavu.



Obrázek 7: Přejchodový graf systému  $M/M/1$

### 5.2.2 Řešení systému

Všimněme si v přechodovém grafu, že změny pravděpodobnosti stavu odpovídají šipkám, které vedou ven ze stavu a dovnitř; dostaneme tak nekonečný systém lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t) \\ p_k'(t) &= \lambda \cdot p_{k-1}(t) - (\lambda + \mu)p_k(t) + \mu \cdot p_{k+1}(t), \quad k \geq 1 \end{aligned} \quad (30)$$

s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} p_0(0) &= 1 \\ p_k(0) &= 0, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

Obecné řešení tohoto systému by bylo příliš složité, proto takto nepostupujeme a provedeme následující úvahu: systém se po jistém čase (potenciálně v nekonečnu) stabilizuje; je-li řetězec ergonický, můžeme prohlásit, že se „za určitých podmínek“ stabilizuje. To je možné samozřejmě jen tehdy, nepřichází-li do systému více zákazníků, než je systém schopen obsloužit, tedy  $\mu > \lambda$ , neboli pokud pro intenzitu provozu platí  $\rho < 1$ .

Protože pro stabilizovaný stav jsou pravděpodobnosti s časem neměnné, máme pravděpodobnosti  $p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t)$  pro každé  $k$ , a také  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_k'(t) = 0$ , čímž se nám systém 30 zjednoduší na

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1 \\ 0 &= \lambda \cdot p_{k-1} - (\lambda + \mu)p_k + \mu \cdot p_{k+1}, \quad k \geq 1 \end{aligned} \quad (31)$$

což je již nekonečný homogenní systém obyčejných lineárních (algebraických) rovnic. Tento systém má vždy nulové řešení; pokud je popisovaný systém ergonický, má systém 31 i řešení nenulové.

Proto – aby byl jednoznačně řešitelný – doplníme podmínku, která musí platit, aby čísla  $p_k$  byly pravděpodobnostmi, tedy

$$\sum_k p_k = 1 \quad (32)$$

Systém by se dal simulovat na počítači a po jeho dostatečné stabilizaci odečíst pravděpodobnosti  $p_k$ ; uvidíme však, že je mnohem snazší hodnoty spočítat.

Zavedeme substituci  $z_k = -\lambda \cdot p_k + \mu \cdot p_{k+1}$ , a tím systém 31 přejde na

$$\begin{aligned} 0 &= z_0 \\ 0 &= z_k - z_{k-1} \end{aligned}$$

odkud již  $z_k = 0$  pro každé  $k \geq 0$ . Potom ale  $\lambda \cdot p_k = \mu \cdot p_{k+1}$ , a tedy

$$p_k = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_{k-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot p_0 = \varrho^k \cdot p_0 \quad (33)$$

Zbývá již jen určit pravděpodobnost  $p_0$ , a to s použitím podmínky 32:

$$1 = p_0 + \varrho \cdot p_0 + \varrho^2 \cdot p_0 + \dots = p_0 \cdot \frac{1}{1 - \varrho}$$

a odtud

$$p_0 = 1 - \varrho \quad \Rightarrow \quad p_k = (1 - \varrho) \cdot \varrho^k \quad (34)$$

tedy stav systému podléhá geometrickému rozdělení (které je „diskrétním případem“ rozdělení exponenciálního). Odtud se již dají spočítat ostatní veličiny, jako střední délka fronty, střední počet zákazníků v systému apod.

### 5.2.3 $z$ -transformace

Ukážeme si nyní jinou univerzální metodu použitelnou k řešení Chapman–Kolmogorovových rovnic. Vydeme ze systému 31: řekneme, že  $z$  je nějaké komplexní číslo, rovnice postupně vynásobíme mocninami  $z^k$  a sečteme:

$$\begin{array}{rcll} 0 & = & -\lambda p_0 & + & \mu p_1 & & & | \cdot z^0 \\ 0 & = & \lambda p_0 & - & (\lambda + \mu)p_1 & + & \mu p_2 & | \cdot z^1 \\ 0 & = & & \lambda p_1 & - & (\lambda + \mu)p_2 & + & \mu p_3 & | \cdot z^2 \\ 0 & = & & & \lambda p_2 & - & (\lambda + \mu)p_3 & + & \mu p_4 & | \cdot z^3 \\ & & & & \vdots & & \ddots & & \ddots & & \vdots \end{array} \quad (35)$$

Řekneme dále, že  $G(z) = \sum p_k \cdot z^k$ . Známe-li nyní funkci  $G(z)$  a rozložíme ji do mocninné řady, hledané pravděpodobnosti nalezneme jako její koeficienty. Dále víme, že  $G(1) = 1$ . Po úpravách systému 35 dostáváme:

$$\begin{aligned} \lambda(z-1)p_0 + [\mu(1-z) + \lambda(z^2-z)]p_1 + \dots + [\mu(z^{k-1}-z^k) + \lambda(z^{k+1}-z^k)]p_k + \dots &= 0 \\ -\lambda(1-z)p_0 + [\mu(1-z) - \lambda z(1-z)]p_1 + \dots + [\mu z^{k-1}(1-z) - \lambda z^k(1-z)]p_k + \dots &= 0 \end{aligned}$$

což za předpokladu  $z \neq 1$  zkrátíme na

$$-\lambda p_0 + (\mu - \lambda z)p_1 + \dots + z^{k-1}(\mu - \lambda z)p_k + \dots = 0$$

a dále upravíme na

$$\begin{aligned} (\mu - \lambda z) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cdot z^{k-1} - \lambda p_0 &= 0 \\ \frac{(\mu - \lambda z)}{z} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cdot z^k - \lambda p_0 + \frac{\mu - \lambda z}{z} \cdot p_0 - \frac{\mu - \lambda z}{z} \cdot p_0 &= 0 \\ (\mu - \lambda z) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot z^k &= \frac{\mu}{z} \cdot p_0 \end{aligned}$$

a odtud již s využitím  $\frac{\mu}{\mu - \lambda z} = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu} z}$  dostáváme

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot z^k = \frac{\frac{\mu}{z} \cdot p_0}{\frac{\mu - \lambda z}{z}} = \frac{p_0}{1 - \varrho \cdot z}$$

Přitom posledně uvedený výraz je racionální lomená funkce proměnné  $z$ , navíc parciální zlomek.

Poslední rovnost můžeme dále přepsat na

$$\begin{aligned} G(z) &= p_0 + p_0 \cdot \varrho z + p_0 \cdot \varrho^2 z^2 + \dots \\ G(1) &= p_0 + p_0 \cdot \varrho + p_0 \cdot \varrho^2 + \dots = 1 \\ &= \frac{p_0}{1 - \varrho} \Rightarrow p_0 = 1 - \varrho \end{aligned}$$

a tak jsme opět (jiný způsobem) získali  $p_k = (1 - \varrho) \cdot \varrho^k$ .

#### 5.2.4 Ostatní charakteristické veličiny

Podářilo se nám tedy spočítat pravděpodobnosti  $p_k = P(X = k)$ . Nyní spočteme ostatní náhodné veličiny, které jsou určitým způsobem od veličiny  $X$  odvozené.

**Počet zákazníků v systému.** Začneme s počtem zákazníků v systému  $L$ , resp. jeho střední hodnotou  $E(L)$ . Máme

$$E(L) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cdot k = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \varrho) \cdot \varrho^k \cdot k = (1 - \varrho) \varrho \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \varrho^{k-1}$$

Nyní zbývá určit onu sumu  $\sum = 1 + 2 \cdot \varrho + 3 \cdot \varrho^2 + 4 \cdot \varrho^3 + \dots$ . Pro ergonický systém je  $\varrho < 1$ , a proto je řada absolutně konvergentní. Počítáme tedy

$$\begin{aligned} 1 + 2 \cdot \varrho + 3 \cdot \varrho^2 + \dots &= (1 + \varrho + \varrho^2 + \dots) + \varrho(1 + \varrho + \varrho^2 + \dots) + \varrho^2(1 + \varrho + \varrho^2 + \dots) \\ &= \frac{1}{1 - \varrho} + \varrho \cdot \frac{1}{1 - \varrho} + \varrho^2 \cdot \frac{1}{1 - \varrho} + \dots = \frac{1}{1 - \varrho} \cdot (1 + \varrho + \varrho^2 + \dots) \\ &= \frac{1}{1 - \varrho} \cdot \frac{1}{1 - \varrho} = \frac{1}{(1 - \varrho)^2} \end{aligned}$$

Jiný způsob využívá derivování řady

$$1 + \varrho + \varrho^2 + \dots = \frac{1}{1 - \varrho}$$

člen po členu, čímž opět dostaneme

$$1 + 2 \cdot \varrho + 3 \cdot \varrho^2 + \dots = \frac{1}{(1 - \varrho)^2}$$

Celkem tedy máme

$$E(L) = \frac{\varrho}{1 - \varrho} \quad (36)$$

Rozptyl spočteme

$$\begin{aligned} D(L) &= E(L^2) - E^2(L) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot p_k - E^2(L) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1 - \varrho) \cdot \varrho^k - \frac{\varrho^2}{(1 - \varrho)^2} \\ &= \varrho(1 - \varrho) \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \varrho^{k-1}}_{(analogicky) = \frac{1+\varrho}{(1-\varrho)^3}} - \frac{\varrho^2}{(1 - \varrho)^2} = \frac{\varrho}{(1 - \varrho)^2} \end{aligned} \quad (37)$$

**Délka fronty.** Spočteme opět její střední hodnotu

$$\begin{aligned} E(Q) &= \sum_{k=1}^{\infty} (k - 1) p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \varrho) \cdot \varrho^k \cdot (k - 1) \\ &= (1 - \varrho) \cdot \varrho^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \varrho^{k-1} = \frac{\varrho^2}{1 - \varrho} \end{aligned} \quad (38)$$

a rozptyl

$$\begin{aligned} D(Q) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot p_{k+1} - \left( \frac{\varrho^2}{1 - \varrho} \right)^2 = (po \text{ úpravách}) \\ &= \frac{\varrho^2(1 + \varrho)}{(1 - \varrho)^2} - \frac{\varrho^4}{(1 - \varrho)^2} = \frac{\varrho^2 \cdot (1 + \varrho - \varrho^2)}{(1 - \varrho)^2} \end{aligned} \quad (39)$$

Vidíme tedy poměrně zřejmou věc, a to že pokud  $\varrho \rightarrow 1$ , roste délka fronty do nekonečna.

**Doba čekání.** Pro výpočet průměrné doby čekání zákazníka ve frontě použijeme ještě jiné ukazatele, a to  $W_k$ , což bude doba, strávená ve frontě zákazníkem, který se zařadil na  $k$ -té místo do fronty. Protože pravděpodobnost, že se zákazník zařadí na  $k$ -té místo ve frontě, je totožná s pravděpodobností, že je v systému právě  $k$  zákazníků, máme

$$P(W > w) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot P(W_k > w)$$



Toto je tedy doplněk distribuční funkce; dále máme  $P(W = 0) = p_0 = 1 - \varrho$ , a odtud dále

$$P(W > w) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( (1 - \varrho) \varrho^k \cdot e^{-\mu w} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\mu w)^j}{j!} \right)$$

Doba čekání  $W_k$  má totiž Erlangovo rozdělení s  $k$  stupni volnosti: zákazník musí čekat na obslužení  $k$  zákazníků před ním, z nichž každý bude obsluhován po exponenciální dobu.

Nyní spočteme sumu v posledním vztahu: jednotlivé členy první (vnější) sumy jsou rovny

$$\begin{aligned} k = 1 : & \quad (1 - \varrho) \cdot \varrho \cdot e^{-\mu w} \cdot \varrho^0 \cdot \frac{(\mu w)^0}{0!} \\ k = 2 : & \quad (1 - \varrho) \cdot \varrho \cdot e^{-\mu w} \cdot \varrho^1 \cdot \left[ \frac{(\mu w)^0}{0!} + \frac{(\mu w)^1}{1!} \right] \\ k = 3 : & \quad (1 - \varrho) \cdot \varrho \cdot e^{-\mu w} \cdot \varrho^2 \cdot \left[ \frac{(\mu w)^0}{0!} + \frac{(\mu w)^1}{1!} + \frac{(\mu w)^2}{2!} \right] \\ & \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Protože je  $\varrho = \frac{\lambda}{\mu}$ , máme také  $\mu = \frac{\lambda}{\varrho}$  a části výrazů „vpravo“ přecházejí v

$$\begin{aligned} & \varrho^0 \cdot \frac{(\lambda w)^0}{0!} \\ & \varrho^1 \cdot \left[ \frac{(\lambda w)^0}{0!} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{(\lambda w)^1}{1!} \right] \\ & \varrho^2 \cdot \left[ \frac{(\lambda w)^0}{0!} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{(\lambda w)^1}{1!} + \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{(\lambda w)^2}{2!} \right] \end{aligned}$$

a sečtením „po sloupcích“ přejdeme k součinu dvou sum (namísto sumy dvojitě)

$$\begin{aligned} P(W > w) &= (1 - \varrho) \cdot \varrho \cdot e^{-\mu w} \cdot \left[ \frac{(\lambda w)^0}{0!} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \varrho^r + \frac{(\lambda w)^1}{1!} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \varrho^r + \dots \right] \\ &= (1 - \varrho) \cdot \varrho \cdot e^{-\mu w} \cdot \underbrace{\left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda w)^j}{j!} \right)}_{= e^{\lambda w}} \cdot \underbrace{\left( \sum_{r=0}^{\infty} \varrho^r \right)}_{= \frac{1}{1 - \varrho}} \end{aligned}$$

Celkem tedy dostáváme kýžený vztah

$$P(W > w) = \varrho \cdot e^{-(\mu - \lambda)w} \quad (40)$$

Distribuční funkce je pak  $F(w) = P(W \leq w) = 1 - \varrho \cdot e^{-(\mu - \lambda)w}$ .

Pro výpočet střední hodnoty dále využijeme následujícího tvrzení:

### Věta 5.3

Pro náhodnou veličinu  $X$ , její střední hodnotu  $E(X)$  a distribuční funkci  $F(x)$ , pro kterou platí  $F(x) = 0$  pro každé  $x < 0$  a navíc  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - F(x)) = 0$ , lze spočítat střední hodnotu takto:

$$E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx$$

*Dukaz:* Integrujeme zmíněný integrál per partes:

$$\int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx \quad \left| \begin{array}{l} u' = 1 \quad v = 1 - F(x) \\ u = x \quad v' = -f(x) \end{array} \right| = \underbrace{[x(1 - F(x))]_0^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} x \cdot f(x) dx = E(X)$$

Přitom první člen posledního výrazu je nulový proto, že v nekonečnu je to rovno nule dle předpokladu, a v nule to vyjde dosazením.  $\square$

Pomocí této věty již snadno určíme střední hodnotu

$$E(W) = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx = \varrho \cdot \int_0^{\infty} e^{-(\mu-\lambda)w} dw = \frac{\varrho}{\mu - \lambda} \quad (41)$$

a rozptyl

$$D(W) = \underbrace{E(W^2)}_{\frac{2\varrho}{(\mu-\lambda)^2}} - E^2(W) = \frac{\varrho(2 - \varrho)}{(\mu - \lambda)^2} \quad (42)$$

### 5.2.5 Shrnutí

Všechny vypočtené veličiny, charakterizující systém  $M/M/1$ , si nyní uspořádáme do přehledné tabulky:

$$p_k = (1 - \varrho) \cdot \varrho^k$$

$E(L) = \frac{\varrho}{1 - \varrho}$	$D(L) = \frac{\varrho}{(1 - \varrho)^2}$
$E(Q) = \frac{\varrho^2}{1 - \varrho}$	$D(Q) = \frac{\varrho^2 \cdot (1 + \varrho - \varrho^2)}{(1 - \varrho)^2}$
$E(W) = \frac{\varrho}{\mu - \lambda}$	$D(W) = \frac{\varrho(2 - \varrho)}{(\mu - \lambda)^2}$
$E(R) = \frac{1}{\mu - \lambda}$	$D(R) = D(W) + \frac{1}{\mu^2}$

Tím jsme uzavřeli kapitolu, ve které jsme se seznámili s nejjednodušším systémem hromadné obsluhy a spočetli jeho parametry.

## 5.3 Busy period

Řekli jsme si, že tzv. busy period je doba, po kterou linka obsluhy nepřetržitě pracuje. Zavedeme si tedy náhodné veličiny  $X(t)$ , představující nepřetržitou obsluhu, a  $Y(t)$ , reprezentující stav, kdy linka stojí. Máme Chapman–Kolmogorovy rovnice a počáteční podmínky

$$\begin{aligned} p'_0(t) &= \mu \cdot p_1(t) \\ p'_1(t) &= -(\lambda + \mu) \cdot p_1(t) + \mu \cdot p_2(t) \\ p'_k(t) &= \lambda \cdot p_{k-1}(t) - (\lambda + \mu)p_k(t) + \mu \cdot p_{k+1}(t), \quad k > 1 \\ p_0(0) &= 1 \\ \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) &= 1 \end{aligned}$$

Pro busy period však nemůžeme použít ustálený stav systému. Přitom  $p_0(t)$  je distribuční funkce busy period; spočítat přesně pravděpodobnosti  $p_k(t)$  neumíme. Pro střední dobu busy period  $E(X)$ , druhý moment  $E(X^2)$  a rozptyl  $D(X)$  platí

$$E(X) = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (43)$$

$$E(X^2) = \frac{2\lambda}{(\mu - \lambda)^3} \quad (44)$$

$$D(X) = \frac{\mu + \lambda}{(\mu - \lambda)^3} \quad (45)$$

Tyto vztahy odvozovat nebudeme.

Nechť nyní  $T$  je dostatečně dlouhý časový interval. Protože část doby linka pracuje a část stojí, máme

$$T = x \cdot \left( \frac{1}{\mu - \lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) = x \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{1}{\mu - \lambda}$$

a odtud

$$x = T \cdot \varrho \cdot (\mu - \lambda) \quad (46)$$

což je číslo, vyjadřující, kolikrát za časový interval  $T$  se linka zastaví.

## 5.4 Jiné frontové režimy

Dosud jsme uvažovali pouze režim obsluhy *FIFO*, obvyklý pro fronty, tedy první zákazník je nejdříve obslužen. Nyní si ukážeme systémy, v nichž to neplatí; zákazníci jsou z fronty vybírání jiným způsobem. Uvidíme, že některé z těchto režimů mají svůj smysl.

### 5.4.1 Inverzní frontový režim

Zde máme na mysli obyčejný zásobník, ze kterého jsou položky vybírány, resp. zákazníci jsou obsluhováni, přesně v opačném pořadí, než přišli. Poslední zákazník se proto dostává k obsluze jako první.

Můžeme uvažovat analogii busy period – je-li zásobník prázdný a nepřichází žádný zákazník, linka obsluhy se zastaví.

Chapman–Kolmogorovy rovnice jsou stejné jako při obvyklém režimu obsluhy; dostaneme stejné střední hodnoty charakteristických veličin, ale jiné rozptyly.

Pravděpodobnost, že zákazník nečeká, je rovna pravděpodobnosti, že zákazník najde systém prázdný, a tedy

$$P(W = 0) = p_0 = 1 - \varrho$$

Dále

$$P(W > w) = \varrho \cdot [1 - F(w)]$$

a odtud distribuční funkce doby čekání

$$P(W \leq w) = 1 - \varrho \cdot [1 - F(w)]$$

Ostatní veličiny jsou pak rovny

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\mu - \lambda} & E(W) &= \frac{\varrho}{\mu - \lambda} \\ E(X^2) &= \frac{2\lambda}{(\mu - \lambda)^3} & E(W^2) &= \varrho \cdot \frac{2\mu}{(\mu - \lambda)^3} = \frac{2\lambda}{(\mu - \lambda)^3} \\ D(X) &= \frac{\mu - \lambda}{(\mu - \lambda)^3} & D(W) &= E(W^2) - E^2(W) = \frac{2\lambda}{(\mu - \lambda)^2} - \frac{\varrho^2}{(\mu - \lambda)^2} = \frac{\lambda(\varrho^2 - \varrho + 2)}{(\mu - \lambda)^3} \end{aligned}$$

Střední doba strávená v systému je stejná –  $E(R) = E(W) + \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu - \lambda}$ ; rozptyl je pak roven

- pro režim *FIFO*:  $D(R) = \frac{2 \cdot (2 - \varrho)}{(\mu - \lambda)^2}$ ,
- pro režim *LIFO*:  $D(R) = \frac{\lambda(\varrho^2 - \varrho + 2)}{(\mu - \lambda)^3}$ .

Při libovolném jiném režimu obsluhy je střední doba obsluhy stejná, rozptyl doby obsluhy ležší mezi těmito dvěma extrémy (pro obvyklou frontu je nejmenší, pro zásobník největší).

#### 5.4.2 Obecný frontový režim

Je možné zařídit i jiné frontové režimy, které při výběru zákazníka na obsluhu postupují jiným způsobem, zohledňují jiná kritéria. Uvedeme si jeden takový systém přímo z praxe; charakteristické veličiny počítat nebudeme.

#### Příklad 5.2

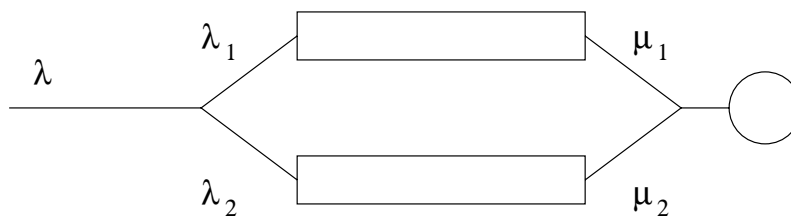
V operačním systému počítače je realizována fronta požadavků na přístup k disku. Správce systému vybírá požadavky tím způsobem, při kterém hlava disku bude co nejméně „běhat“ tam a zpět: hlava jede jedním směrem, ve kterém sbírá požadavky (vybere vždy nejbližší ve svém směru), pak jede zpět. Zřejmě některé požadavky budou na základě momentální situace (police hlavy) upřednostněny, ale všechny budou obslouženy v konečném čase.

### 5.5 Teorie obnovy

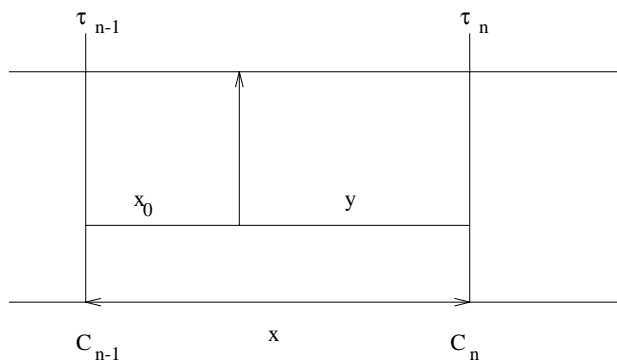
#### 5.5.1 Hromadná obsluha s předností

V těchto systémech neplatí, že jsou si všichni rovni, nýbrž někteří jsou rovnější: k lékaři chodí známí do ordinace zadem apod. V řeči teorie to znamená, že jedna linka obsluhy obsluhuje dvě fronty s parametry  $\lambda_1, \lambda_2$ , resp.  $\mu_1, \mu_2$  (obsluha prioritního zákazníka může trvat jinou dobu). Schematicky tuto situaci zachycuje obrázek 8. „Protektce“ je ovšem „slabá“ v tom smyslu, že při příchodu prioritního zákazníka se ještě dokončí obsluha rozpracovaného zákazníka, byť i obyčejného.

V reálném světě se přitom můžeme setkat se systémy, kde je více skupin zákazníků podle priority (blízká rodina lékaře, příbuzní, známí, milenky,... obyčejní pacienti); na druhé straně může být systém s předností velmi užitečný např. pro zpracování poruch (poruchy mají přednost).



Obrázek 8: Schéma systému s předností



Obrázek 9: Pojem životnosti

### 5.5.2 Základní pojmy teorie obnovy

Budeme uvažovat příchody zákazníků, označíme přitom  $\tau_k$  okamžik příchodu  $k$ -tého zákazníka. Necht' doba mezi příchody zákazníků je  $x$ , určitý okamžik nám ji dělí na  $x_0$ , tedy dobu, která uplynula od příchodu posledního zákazníka, a  $y$ , která uplyne do příchodu zákazníka následujícího. Nazveme nyní (viz schéma na obr. 9)

$x$  – životnost (odpovídá to interpretaci, kdy si např. v okamžiku  $\tau_{k-1}$  koupím boty a v okamžiku  $\tau_k$  se mi rozpadly a kupuji si nové),

$x_0$  – věk (age) (tedy životnost je časovým úsekem mezi „zrozením“ a „smrtí“),

$y$  – reziduální životnost.

Máme tedy  $P(\tau_k - \tau_{k-1} = x) = f(x)$ , distribuční funkci  $F(x)$ . Zajímá nás distribuční funkce  $\hat{F}_Y(y)$  reziduální životnosti a její hustota  $\hat{f}_Y(y)$ . Hustota rozdělení životnosti je úměrná délce intervalu a „frekvenci“

$$f_X(x) = P(x < X \leq x + dx) = K \cdot x \cdot f(x) = \frac{x \cdot f(x)}{m_1}$$

a dostáváme

$$1 = \int_0^{\infty} f_X(x) dx = K \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} x \cdot f(x) dx}_{= m_1} \Rightarrow K = \frac{1}{m_1}$$

Dále nás zajímá reziduální životnost, známe-li životnost. Máme

$$P(Y \leq y | X = x) = \frac{y}{x}$$

$$P(y < Y \leq y + dy \wedge x < X \leq x + dx) = \frac{dy}{x} \cdot \frac{x \cdot f(x) dx}{m_1}, \quad 0 \leq y \leq x$$

a odtud

$$\hat{f}(y) = \int_{x=y}^{x=\infty} \frac{f(x) dx dy}{m_1} = \frac{dy}{m_1} \cdot \int_y^{\infty} f(x) dx = (1 - F(y)) \cdot \frac{dy}{m_1}$$

Tedy celkem

$$\hat{f}(y) = \frac{1 - F(y)}{m_1}$$

$$F(y) = \frac{1}{m_1} \cdot \int_0^y (1 - F(u)) du$$

(Odpovídá to interpretaci, kdy k lékaři přijde pacient, a ptá se, jak dlouho bude ještě ošetřovat svého známého, kterého má rozpracovaného.)

### 5.5.3 Systém s předností

Máme tedy dvě fronty zákazníků, parametry  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ . Označíme  $Y(t)$  počet zákazníků v systému (be zohledu na přednost); dále je  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$  čili  $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda} + \frac{\lambda_2}{\lambda}\right) = 1$ . Dále označíme intenzity provozu v obou frontách  $\varrho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$ ,  $\varrho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2}$ . Pro stabilitu systému je podmínka  $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 < 1$ .

Spočtěme nyní dobu obsluhy zákazníka:

$$P[U \leq u] = F(u) = \frac{\lambda_1}{\lambda} \cdot [1 - e^{-\mu_1 u}] + \frac{\lambda_2}{\lambda} \cdot [1 - e^{-\mu_2 u}]$$

$$= 1 - \frac{1}{\lambda} \cdot [\lambda_1 e^{-\mu_1 u} + \lambda_2 e^{-\mu_2 u}]$$

a to je tedy distribuční funkce doby obsluhy.

**Parametry systému s předností.** Nyní nás zajímají další parametry systému. Připomeňme ještě, že

$$P(Y \leq y) = F_0(y) = \frac{1}{m_1} \cdot \int_0^y [1 - F(u)] du$$

a dále že systém najdeme prázdný s pravděpodobností  $p_0 = 1 - \varrho$ .<sup>20</sup> Tuto rovnost můžeme intuitivně odvodit takto: uvažme dostatečně dlouhý časový interval  $\tau$ . Z toho po dobu  $\tau - \tau \cdot p_0$  je systém činný s pravděpodobností 1. Přitom obslouží  $\lambda \tau \doteq \frac{\tau - p_0 \cdot \tau}{\bar{X}}$  (v čitateli je doba, kdy systém pracuje, ve jmenovateli střední doba obsluhy jednoho zákazníka). Nyní provedeme limitní přechod  $\tau \rightarrow \infty$  a máme  $\lambda \cdot \bar{X} = 1 - p_0$ . Avšak  $\bar{X} = \frac{1}{\mu}$ , a tedy  $\lambda \cdot \bar{X} = \varrho = 1 - p_0$  a jsme hotovi.

Nyní tedy víme, že distribuční funkce je rovna

$$F(u) = 1 - \frac{1}{\lambda} \cdot [\lambda_1 e^{-\mu_1 u} + \lambda_2 e^{-\mu_2 u}]$$

<sup>20</sup>Tento vztah platí naprosto ve všech systémech – dokonce i v  $G/G/1$ .

Dále systém nacházíme prázdný s pravděpodobností  $P(Y = 0) = p_0 = 1 - \varrho$ ; víme, že  $P(Y \leq y) = (1 - p_0) \cdot F_0(y) = \varrho \cdot F_0(y)$ . Odtud již spočteme, jak dlouho v průměru trvá obsluha:

$$\begin{aligned} E(Y) &= (1 - p_0) \cdot \underbrace{\int_0^\infty (1 - F(y)) dy}_{\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx} = \varrho \cdot \int_0^\infty \left[ 1 - \frac{\lambda}{\mu} \cdot \int_0^y (1 - F(u)) du \right] dy \\ &= \int_0^\infty \left[ \varrho - \int_0^y \underbrace{(\lambda_1 e^{-\mu_1 u} + \lambda_2 e^{-\mu_2 u})}_{1 - F(u)} du \right] dy = \int_0^\infty [\varrho - \varrho_1 (1 - e^{-\mu_1 y}) - \varrho_2 (1 - e^{-\mu_2 y})] dy \\ &= \int_0^\infty (\varrho_1 \cdot e^{-\mu_1 y} + \varrho_2 \cdot e^{-\mu_2 y}) dy = \frac{\varrho_1}{\mu_1} + \frac{\varrho_2}{\mu_2} = \frac{\lambda_1}{\mu_1^2} + \frac{\lambda_2}{\mu_2^2} \end{aligned}$$

Máme tedy střední dobu obsluhy

$$E(Y) = \frac{\lambda_1}{\mu_1^2} + \frac{\lambda_2}{\mu_2^2} \quad (47)$$

**Doba čekání ve frontě.** Nyní budeme počítat, jak dlouho bude ve frontě čekat přednostní, resp. nepřednostní zákazník –  $\overline{W}_1, \overline{W}_2$ .

Spočítáme nejprve dobu  $\overline{W}_1$ : uvažujeme opět dostatečně dlouhý časový úsek  $T$ . Za tuto dobu přijde  $\lambda_1 T$  přednostních zákazníků, každý z nich čeká v průměru  $\overline{W}_1$ , celkem je tedy ve frontě  $\lambda_1 \overline{W}_1$  zákazníků. Průměrná doba obsluhy přednostního zákazníka je rovna  $\frac{1}{\mu_1}$ .

Nyní máme

$$\overline{W}_1 = E[Y] + \varrho_1 \overline{W}_1$$

a odtud již dostáváme

$$\overline{W}_1 = \frac{E[Y]}{1 - \varrho_1}.$$

Výpočet doby  $\overline{W}_2$  bude poněkud složitější – doba čekání se totiž skládá z těchto položek:

- čekání na dokončení obsluhy předchozího (rozpracovaného) zákazníka,
- doba obsluhy přednostních zákazníků, kteří jsou již ve frontě,
- doba obsluhy nepřednostních zákazníků, kteří jsou ve frontě,
- doba obsluhy přednostních zákazníků, kteří přišli, než jsme se dostali na řadu.

Zapišeme tyto komponenty do rovnosti, kterou dále upravujeme

$$\begin{aligned} \overline{W}_2 &= E(Y) + \varrho_1 \cdot \overline{W}_1 + \varrho_2 \cdot \overline{W}_2 + \varrho_1 \cdot \overline{W}_2 \\ \overline{W}_2 - \varrho_1 \cdot \overline{W}_2 - \varrho_2 \cdot \overline{W}_2 &= E(Y) + \varrho_1 \cdot \overline{W}_1 \\ (1 - \varrho_1 - \varrho_2) \cdot \overline{W}_2 &= E(Y) + E(Y) \cdot \frac{\varrho_1}{1 - \varrho_1} \end{aligned}$$

a závěrečnou úpravou již získáme hledaný vztah

$$\overline{W}_2 = \frac{E(Y)}{(1 - \varrho)(1 - \varrho_1)} \quad (48)$$

Pokud je dále proces markovovský, můžeme ještě dosadit  $E(Y) = \frac{\lambda_1}{\mu_1^2} + \frac{\lambda_2}{\mu_2^2}$ . Tím jsme systémy s předností uzavřeli.

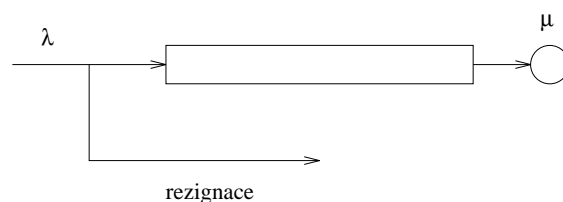
## 5.6 Systém s rezignací

### 5.6.1 Motivace

Uvažujme opět systém  $M/M/1$ , u něhož je ale porušena podmínka stability a je  $\frac{\lambda}{\mu} \rightarrow 1$ , nebo se dokonce  $\lambda$  zvětšuje (zákazníci přicházejí častěji – fáma se zdražováním, vybírají vklady z Banky Bohemia) natolik, že  $\frac{\lambda}{\mu} > 1$ . Co se v takovém případě může stát:

1. Buď budeme zvyšovat parametr  $\mu$  (zvýšíme produktivitu, musíš bóchat jak vo život) a tím vrátíme systém ke stabilitě. (Z teoretického hlediska to není příliš zajímavé.)
2. Fronta se zvětšuje, ale ne do nekonečna – zákazníci se na to vykašlou a jdou domů.
3. Zvětšíme počet obslužných linek – pak se ale již dostáváme k systému  $M/M/n$ .

Budeme řešit 2. případ, a to tak, že zákazník, který hodlá využít služeb systému, se rozhodne, zda se zařadí do fronty, nebo odejde (rezignuje). Schematicky nám tento případ vyjadřuje obrázek 10 –



Obrázek 10: Schéma systému s rezignací

část zákazníků se k lince nedostává, poněvadž rezignuje.

### 5.6.2 Popis systému s rezignací

Zákazník tedy může rezignovat pouze před tím, než do systému vstoupí – nějak se musí rozhodnout. Zavedeme si proto posloupnost

$$1 = b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_m \geq \dots \geq 0$$

kde  $b_i$  vyjadřuje pravděpodobnost, že se zákazník zařadí na  $i$ -té místo ve frontě (nerezignuje). (Všimněme si přirozeného faktu, že posloupnost je nerostoucí, tedy s rostoucí délkou fronty se zákazníkovi chce čím dál méně čekat, a také že  $b_0 = 1$ , tedy pokud je systém prázdný, zákazník určitě neodejde.)

Mohli bychom nyní řešit systém s rezignací tak, jak jsme si jej právě nadefinovali, tedy bez bližší specifikace toho, co platí pro  $b_k$ , napsat a vyřešit Chapman–Kolmogorovovy rovnice. (Ve výsledku by se násobilo něčím jako  $\left(\prod_{k=0}^m b_k\right)$ , nebo co.) My si místo toho určíme nějaké hodnoty  $b_k$  a systém budeme řešit pro ně.



### 5.6.3 Řešení systému s rezignací

Určíme tedy např.  $b_i = \frac{1}{1+i}$ . Vidíme, že to odpovídá výchozí podmínce, můžeme tedy sepsat rovnice

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= \mu \cdot p_1(t) - \lambda \cdot p_0(t) \\ p_k'(t) &= \lambda \cdot [b_{k-1} \cdot p_{k-1}(t) - b_k \cdot p_k(t)] - \mu \cdot [p_k(t) - p_{k+1}(t)] \end{aligned}$$

a přejít ke stabilizovanému stavu s tím, že pravděpodobnosti se nemění, tedy  $p_i'(t) = 0$ , dostaneme systém, v němž provedeme substituci

$$\begin{aligned} 0 &= \mu \cdot p_1 - \lambda \cdot p_0 \\ 0 &= \underbrace{\mu \cdot p_{k+1} - \frac{\lambda}{1+k} \cdot p_k}_{z_k} - \underbrace{\left( \mu \cdot p_k - \frac{\lambda}{k} \cdot p_{k-1} \right)}_{z_{k-1}} \end{aligned}$$

odkud dostaneme

$$\begin{aligned} z_0 = 0 &\Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_0 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{1!} \cdot \varrho \cdot p_0 \\ z_1 = 0 &\Rightarrow \mu \cdot p_2 = \frac{\lambda}{2} \cdot p_1 \Rightarrow p_2 = \frac{1}{2!} \cdot \varrho^2 \cdot p_0 \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

Dostaneme tedy

$$p_k = \frac{1}{k!} \cdot \varrho^k p_0$$

dále spočteme  $p_0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 = p_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varrho^k}{k!} = p_0 \cdot e^{\varrho} \Rightarrow p_0 = e^{-\varrho}$$

a odtud dostaneme

$$p_k = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu}}, \quad \forall k \geq 0 \quad (49)$$

a to je tedy Poissonovo rozdělení s parametrem  $\frac{\lambda}{\mu}$ . (Vidíme, že tedy mělo smysl volit pravděpodobnosti  $b_k$  právě takto – systém pak „hezky“ vychází.)

### 5.6.4 Ostatní parametry systému s rezignací

Spočteme nejprve střední počet zákazníků v systému: z Poissonova rozdělení snadno určíme  $\overline{N} = \frac{\lambda}{\mu}$ .

Označili jsme si  $\lambda$  jako intenzitu příchoďů; spočteme nyní tzv. střední počet příchoďů  $\bar{\lambda}$ , který již zahrnuje pouze ty zákazníky, kteří nerezignovali a do fronty se zařadili. Zavedeme si proto  $\lambda_k = \lambda \cdot b_k = \frac{\lambda}{k+1}$ ; dostaneme pak

$$\bar{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda}{k+1} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varrho^k}{(k+1)!} \\
&= e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \cdot \lambda \cdot \left( \left[ \frac{\varrho^0}{1!} + \frac{\varrho^1}{2!} + \dots \right] \cdot \frac{\varrho}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho} \right) \\
&= e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \cdot \lambda \cdot \left( \frac{1}{\varrho} \cdot \left[ \frac{\varrho^0}{0!} + \frac{\varrho^1}{1!} + \frac{\varrho^2}{2!} + \dots \right] - \frac{1}{\varrho} \right) \\
&= \frac{\lambda}{\varrho} - \frac{\lambda}{\varrho} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu}} = \mu \cdot (1 - e^{-\frac{\lambda}{\mu}})
\end{aligned} \tag{50}$$

Z Littlovy formule  $\bar{N} = \bar{\lambda} \cdot T$  odvodíme střední dobu čekání zákazníka

$$T = \frac{\bar{N}}{\bar{\lambda}} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{1}{\mu \cdot (1 - e^{-\frac{\lambda}{\mu}})} = \frac{\lambda}{\mu^2 \cdot (1 - e^{-\frac{\lambda}{\mu}})} \tag{51}$$

Ještě spočítáme pravděpodobnost toho, že zákazník rezignuje<sup>21</sup>. Máme

$$\bar{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \cdot p_k$$

a odtud

$$\begin{aligned}
p_{rez} &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot (1 - b_k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_k - \sum_{k=0}^{\infty} p_k b_k = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varrho^k}{k!} \cdot \frac{1}{1+k} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\mu}} = 1 - e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \cdot \left[ \frac{1}{\varrho} \cdot e^{\frac{\lambda}{\mu}} - \frac{1}{\varrho} \right] \\
&= 1 - \frac{1}{\varrho} + \frac{e^{-\varrho}}{\varrho}
\end{aligned} \tag{52}$$

Toť vše k systémům s rezignací.

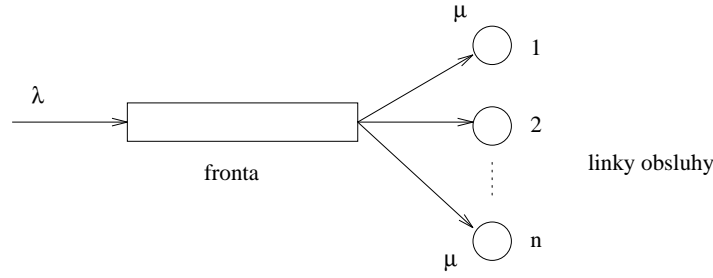
## 5.7 Systém $M/M/n$

Nyní budeme uvažovat systém, v němž nemáme zájem na tom, aby záakzníci rezignovali, a proto „rozmnožíme“ linky obsluhy. Dá se rovněž uvažovat  $n \rightarrow \infty$ ; pak můžeme počítat, kolik linek musí být v činnosti, aby s určitou pravděpodobností nebyla fronta, nebo naopak považovat počet linek za vždy dostačující.

### 5.7.1 Popis systému $M/M/n$

Zákazníci přicházejí s intenzitou  $\lambda$  a rozdělují se na  $n$  linek obsluhy se stejným parametrem obsluhy  $\mu$  (obrázek 11). Označíme  $\frac{\lambda}{\mu} = \beta$ , intenzita provozu je pak  $\varrho = \frac{\lambda}{n \cdot \mu}$ ; pro stabilitu systému je podmínka  $\varrho < 1$ .

<sup>21</sup>Pozor: „Todle jsou krásný příklady na písemky...“

Obrázek 11: Schéma systému  $M/M/n$ 

Zatímco v systému  $M/M/1$  byly pravděpodobnosti  $p_{jk}(\tau)$  přechodu ze stavu  $j$  do stavu  $k$  za čas  $\tau$  (tedy  $X(t) = j, X(t + \tau) = k$ ) rovny

$$\begin{aligned} p_{j,j-1}(\tau) &= \mu \cdot \tau + o(\tau) \\ p_{j,j}(\tau) &= 1 - (\mu + \lambda) \cdot \tau + o(\tau) \\ p_{j,j+1}(\tau) &= \lambda \cdot \tau + o(\tau) \\ p_{jk}(\tau) &= o(\tau) \quad \text{pro } |j - k| > 1 \end{aligned}$$

v systému  $M/M/n$  dostáváme nejprve pro  $j = 0$

$$\begin{aligned} p_{00}(\tau) &= 1 - \lambda \cdot \tau + o(\tau) \\ p_{01}(\tau) &= \lambda \cdot \tau + o(\tau) \\ p_{0k}(\tau) &= o(\tau), \quad k > 1 \end{aligned}$$

a dále pak (je možná změna jen z  $j$  do  $j \pm 1$ )

$$p_{j,j-1} = \begin{cases} j\mu \cdot \tau + o(\tau), & j < n \\ n\mu \cdot \tau + o(\tau), & j \geq n \end{cases}$$

kde první případ odpovídá tomu, že linek je dostatek a všichni zákazníci jsou obsluhováni, zatímco druhý znamená, že všechny linky jsou vytíženy a někdo čeká. Tedy dále

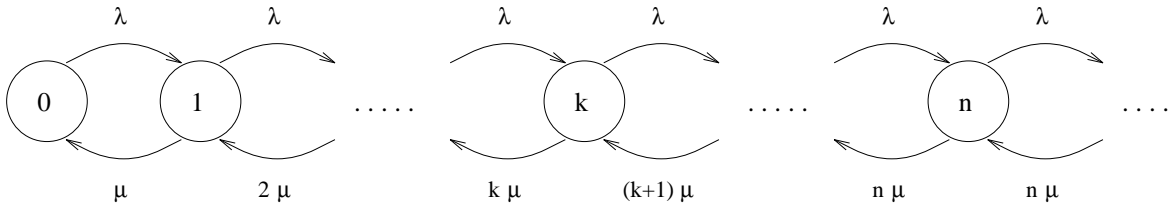
$$\begin{aligned} p_{j,j}(\tau) &= \begin{cases} 1 - \lambda \cdot \tau - j\mu \cdot \tau + o(\tau), & j < n \\ 1 - \lambda \cdot \tau - n\mu \cdot \tau + o(\tau), & j \geq n \end{cases} \\ p_{j,j+1}(\tau) &= \lambda \cdot \tau + o(\tau) \\ p_{j,k}(\tau) &= o(\tau), \quad |j - k| > 1 \end{aligned}$$

Přechodový graf systému máme na obr. 12.

### 5.7.2 Řešení systému $M/M/n$

Dostáváme tedy Chapman–Kolmogorovy rovnice

$$\begin{aligned} p'_0(t) &= -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t) \\ p'_k(t) &= \lambda \cdot p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu) \cdot p_k(t) + (k+1)\mu \cdot p_{k+1}(t), \quad 1 \leq k < n \\ p'_k(t) &= \lambda \cdot p_{k-1}(t) - (\lambda + n\mu) \cdot p_k(t) + n\mu \cdot p_{k+1}(t), \quad k \geq n \end{aligned}$$

Obrázek 12: Přechodový graf systému  $M/M/n$ 

Tento systém opět řešíme tak, že jej necháme ustálit, tedy položíme  $p'_k(t) = 0$  a prohlásíme  $p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t)$ , čímž dostaneme systém

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1 \\ 0 &= \lambda \cdot p_{k-1} - (\lambda + k\mu) \cdot p_k + (k+1)\mu \cdot p_{k+1}, \quad 1 \leq k < n \\ 0 &= \lambda \cdot p_{k-1} - (\lambda + n\mu) \cdot p_k + n\mu \cdot p_{k+1}, \quad k \geq n \end{aligned}$$

přidáme doplňující podmínku  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$  a systém řešíme.

Řešení nyní provedeme takto: nejprve budeme řešit prvních  $n$  rovnic, pak zbytek. Provedeme substituci  $z_k = \lambda \cdot p_{k-1} - k\mu \cdot p_k$  a dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= z_0 \\ 0 &= z_k - z_{k-1} \end{aligned}$$

a odtud již  $z_k = 0$  pro  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Z toho pak určíme

$$\begin{aligned} \lambda \cdot p_0 - \mu \cdot p_1 = 0 &\Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_0 \\ \lambda \cdot p_{k-1} - k\mu \cdot p_k = 0 &\Rightarrow p_k = \frac{\lambda}{k\mu} \cdot p_{k-1} = \frac{\lambda^k}{k! \cdot \mu^k} \cdot p_0 = \frac{\beta^k}{k!} \cdot p_0 \end{aligned}$$

(Mimo jiné je také  $p_n = \frac{\beta^n}{n!} \cdot p_0$ .) Další rovnice pak jsou

$$\begin{aligned} n : \quad 0 &= \lambda \cdot p_{n-1} - (\lambda + n\mu) \cdot p_n + n\mu \cdot p_{n+1} \\ n+1 : \quad 0 &= \lambda \cdot p_n - (\lambda + n\mu) \cdot p_{n+1} + n\mu \cdot p_{n+2} \\ &\vdots \\ n+r : \quad 0 &= \lambda \cdot p_{n+r-1} - (\lambda + n\mu) \cdot p_{n+r} + n\mu \cdot p_{n+r+1} \end{aligned}$$

Sečteme nyní tyto rovnice – všimněme si, že se většina členů vyhubí – a dostaneme

$$0 = \lambda \cdot p_{n-1} - n\mu \cdot p_n - \lambda \cdot p_{n+r} + n\mu \cdot p_{n+r+1}$$

odkud

$$n\mu \cdot p_{n+r+1} + \underbrace{\lambda \cdot p_{n-1} - n\mu \cdot p_n}_{=z_n=0} = \lambda \cdot p_{n+r}$$

tedy  $n\mu \cdot p_{n+r+1} = \lambda \cdot p_{n+r} \Rightarrow p_{n+r+1} = \frac{\lambda}{n\mu} \cdot p_{n+r} = \frac{\beta}{n} \cdot p_{n+r}$ , a odtud  $p_{n+1} = \frac{\beta}{n} \cdot p_n$ ,  $p_{n+k} = \left(\frac{\beta}{n}\right)^k \cdot p_n = p_n \cdot \varrho^k$ . Dostáváme tedy vyjádření

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\beta^k}{k!} \cdot p_0, \quad k = 0, 1, \dots, n \\ p_{n+k} &= p_n \cdot \varrho^k \end{aligned} \quad (53)$$

Nyní zbývá vyjádřit  $p_0$ . K tomu rozepíšeme podmínku  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$  a máme tak

$$\left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta^k}{k!} + \frac{n^n}{n!} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\beta}{n}\right)^k \right) \cdot p_0 = 1$$

Druhou sumu v závorce spočítáme jako

$$\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\beta}{n}\right)^k = \frac{\beta^n}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\beta}{n}\right)^k = \frac{\beta^n}{n!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\beta}{n}} = \frac{\beta^n}{n^n} \cdot \frac{n}{n - \beta}$$

odkud

$$p_0 = \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta^k}{k!} + \frac{\beta^n}{(n-1)! \cdot (n-\beta)} \right]^{-1} \quad (54)$$

A nyní již můžeme spočítat pravděpodobnosti  $p_1, p_2$  atd.

### 5.7.3 Ostatní parametry systému $M/M/n$

Pravděpodobnost toho, že po příchodu budeme čekat:

$$\Pi = \sum_{k=n}^{\infty} p_k = p_0 \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\beta^k}{n! \cdot n^{n-k}} = p_0 \cdot \underbrace{\frac{\beta^n}{n!}}_{p_n} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{n^k}}_{\varrho^k} = \frac{p_n}{1 - \varrho} \quad (55)$$

Pravděpodobnost obsluhy bez čekání – je komplementární k  $\Pi$ :

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k = p_0 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta^k}{k!} = 1 - \Pi \quad (56)$$

Průměrný počet zákazníků ve frontě:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_{n+k} = p_n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \varrho^k = p_n \cdot \frac{\varrho}{(1 - \varrho)^2} \\ &= p_0 \cdot \frac{\beta^n}{n!} \cdot \frac{\frac{\beta}{n}}{\left(1 - \frac{\beta}{n}\right)^2} = p_0 \cdot \frac{\beta^n}{n!} \cdot \frac{n\beta}{(n-\beta)^2} = p_0 \cdot \frac{\beta^{n+1}}{(n-1)! \cdot (n-\beta)^2} \end{aligned} \quad (57)$$

Kolik linek průměrně pracuje:

$$\begin{aligned} \nu &= \sum_{k=1}^n k \cdot p_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} n \cdot p_k = p_0 \cdot \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{\beta^k}{k!} + p_0 \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} n \cdot \frac{\beta^k}{n! \cdot n^{k-n}} \\ &= \beta \cdot p_0 \cdot \underbrace{\left[ \sum_{k=1}^n \frac{\beta^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{n^n}{n!} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\beta}{n}\right)^{k-1} \right]}_{=1 \text{ (viz } p_0)} = \beta \end{aligned} \quad (58)$$

Průměrný počet zákazníků v systému:

$$L = \beta + p_0 \cdot \frac{\beta^{n+1}}{(n-1)! \cdot (n-\beta)^2} \quad (59)$$

**Doba čekání.** Nyní spočteme dobu čekání: pravděpodobnost toho, že budeme čekat, je, jak jsme si řekli,

$$P(W > 0) = \Pi = 1 - P(W = 0)$$

Budeme opět počítat dobu  $W_k$  čekání v případě, že se zařadíme na  $k$ -té místo ve frontě. Narozdíl od systému  $M/M/1$  to však odpovídá tomu, že v systému je  $n + k - 1$  zákazníků: všech  $n$  linek je v činnosti. Spočteme tedy pravděpodobnost  $P(W_k > w)$ , tedy pravděpodobnost toho, že ze systému odejde za čas  $w$  nejvýše  $k - 1$  zákazníků.

Všimněme si, že zákazníci opouštějící systém tvoří Poissonovský proces s parametrem  $n\mu$ , čili délky intervalů mají exponenciální rozdělení s parametrem  $n\mu$ . To znamená, že pro odchod  $k - 1$  zákazníků dostaneme Erlangovo rozdělení s parametrem  $n\mu$  a s  $k - 1$  stupni volnosti. Máme tedy doplněk distribuční funkce Erlangova rozdělení

$$P(W_k > w) = \sum_{j=0}^{k-1} e^{-n\mu \cdot w} \cdot \frac{(n\mu \cdot w)^j}{j!}$$

a odtud

$$\begin{aligned} P(W > w) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_{n+k-1} \cdot P(W_k > w) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{n+k} \cdot P(W_{k+1} > w) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{\beta}{n} \right)^k \cdot p_n \cdot \sum_{j=0}^k e^{-n\mu \cdot w} \cdot \frac{(n\mu \cdot w)^j}{j!} \right] \\ &= p_n \cdot e^{-n\mu \cdot w} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \left( \frac{\beta}{n} \right)^k \cdot \frac{(n\mu \cdot w)^j}{j!} \end{aligned}$$

Sumu v tomto výrazu rozepíšeme

$$\begin{aligned} k = 0 : & \quad \left( \frac{\beta}{n} \right)^0 \cdot \left[ \frac{(n\mu \cdot w)^0}{0!} \right] \\ k = 1 : & \quad \left( \frac{\beta}{n} \right)^1 \cdot \left[ \frac{(n\mu \cdot w)^0}{0!} + \frac{(n\mu \cdot w)^1}{1!} \right] \\ k = 2 : & \quad \left( \frac{\beta}{n} \right)^2 \cdot \left[ \frac{(n\mu \cdot w)^0}{0!} + \frac{(n\mu \cdot w)^1}{1!} + \frac{(n\mu \cdot w)^2}{2!} \right] \\ & \quad \vdots \\ \Sigma : & \quad \frac{(n\mu \cdot w)^0}{0!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\beta}{n} \right)^k + \frac{(n\mu \cdot w)^1}{1!} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\beta}{n} \right)^k + \dots \end{aligned}$$

kde poslední řádek jsme získali posčítáním „po sloupcích“. Celkem tedy výraz  $p_n \cdot e^{-n\mu \cdot w} \cdot \sum \sum$  přejde ve

$$\begin{aligned}
 P(W > w) &= p_n \cdot e^{-n\mu \cdot w} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{(n\mu \cdot w)^j}{j!} \cdot \sum_{k=j}^{\infty} \left( \frac{\beta}{n} \right)^k \right) \\
 &= p_n \cdot e^{-n\mu \cdot w} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{(n\mu \cdot w)^j}{j!} \cdot \frac{\beta^j}{n^j} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\beta}{n} \right)^k \right) \\
 &= p_n \cdot e^{-n\mu \cdot w} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda w)^j}{j!} \cdot \frac{1}{1 - \varrho} \\
 &= \underbrace{p_n \cdot \frac{1}{1 - \varrho}}_{=\Pi} \cdot e^{-n\mu \cdot w} \cdot e^{\lambda w}
 \end{aligned}$$

a odtud již závěrečnou úpravou

$$P(W > w) = \Pi \cdot e^{-(n\mu - \lambda) \cdot w} \quad (60)$$

Tedy  $W$  má Poissonovo rozdělení s parametrem  $n\mu - \lambda$ .

Nyní analogicky jako v systému  $M/M/1$  spočítáme střední hodnotu doby čekání

$$\begin{aligned}
 E[W] &= \frac{\Pi}{n\mu - \lambda} \\
 &= \frac{p_n}{(1 - \varrho)(n\mu - \lambda)} = \frac{p_0 \cdot \beta^n}{n! \cdot \left(1 - \frac{\beta}{n}\right) \cdot \mu \cdot (n - \beta)} = \frac{p_0}{\mu} \cdot \frac{\beta^n}{n! \cdot \frac{1}{n} \cdot (n - \beta)^2} \\
 &= \frac{p_0}{\mu} \cdot \frac{\beta^n}{(n - 1)! \cdot (n - \beta)^2}
 \end{aligned} \quad (61)$$

a rozptyl

$$D[W] = \frac{\Pi \cdot (2 - \Pi)}{(n\mu - \lambda)^2} \quad (62)$$

Tím jsme spočetli nejdůležitější parametry systému  $M/M/n$ .

## 5.8 Systém $M/M/\infty$

Jako doplněk si uvedeme systém v němž necháme růst počet obslužných linek do nekonečna,  $n \rightarrow \infty$ , a budeme sledovat jeho chování. Počet linek je dostatečný při jakémkoliv provozu, nemá tedy smysl mluvit o frontě ani o pravděpodobnosti  $\Pi$  čekání ve frontě.

Pravděpodobnosti  $p_k$  jsou rovny pro každé  $k$

$$p_k = p_0 \cdot \frac{\beta^k}{k!}$$

pravděpodobnost  $p_0$  pak spočteme

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = p_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} = p_0 \cdot e^{\beta} \quad \Rightarrow \quad p_0 = e^{-\beta}$$

a celkem tedy

$$p_k = e^{-\beta} \cdot \frac{\beta^k}{k!}$$

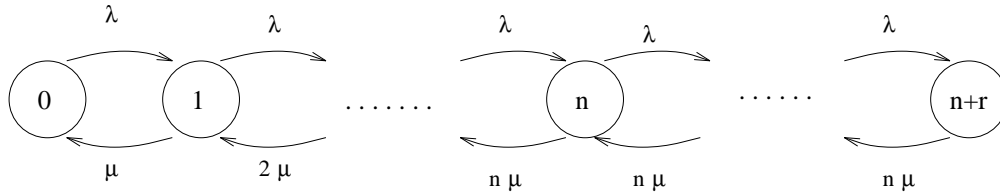
Víc si k systému  $M/M/\infty$  uvádět nebudeme.

## 5.9 Systém se ztrátami

Dosud jsme uvažovali systémy s frontou potenciálně nekonečnou; nyní uvažíme frontu, v níž je omezený počet  $r$  míst na čekání – přijdou-li další zákazníci, odchází neobslouženi.

### 5.9.1 Popis systému se ztrátami

Opět tedy studujeme pravděpodobnosti  $p_k(t) = P[X(t) = k]$ , opět jde o Markovovský proces. Přitom množina stavů je omezená –  $X(t) \in \{0, 1, \dots, n+r\}$  (resp.  $p_k(t) = 0$  pro každé  $k > n+r$ ), omezený je rovněž přechodový graf (obrázek 13). Navíc nemá smysl podmínka stability systému  $\lambda < n\mu$ ,



Obrázek 13: Přechodový graf systému se ztrátami

poněvadž systém se nepřeplnuje, fronta roste jen do délky  $r$ .

Systém Chapman–Kolmogorovových rovnic je rovněž konečný:

$$\begin{aligned} p'_0(t) &= -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t) \\ p'_k(t) &= \lambda \cdot p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu) \cdot p_k(t) + (k+1)\mu \cdot p_{k+1}(t), \quad 1 \leq k < n \\ p'_k(t) &= \lambda \cdot p_{k-1}(t) - (\lambda + n\mu) \cdot p_k(t) + n\mu \cdot p_{k+1}(t), \quad n \leq k < n+r \\ p'_{n+r}(t) &= \lambda \cdot p_{n+r-1}(t) - n\mu \cdot p_{n+r}(t) \end{aligned}$$

### 5.9.2 Řešení systému se ztrátami

Systém opět řešíme tak, že předpokládáme stabilizaci, tedy  $\lim_{t \rightarrow \infty} p'_k(t) = 0$ , a položíme  $p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} p'_k(t)$ .

(Opět předpokládáme dodatečnou podmínku  $\sum_{k=0}^{n+r} p_k = 1$ .) Dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1 \\ 0 &= \lambda \cdot p_{k-1} - (\lambda + k\mu) \cdot p_k + (k+1)\mu \cdot p_{k+1}, \quad 1 \leq k < n \\ 0 &= \lambda \cdot p_{k-1} - (\lambda + n\mu) \cdot p_k + n\mu \cdot p_{k+1}, \quad n \leq k < n+r \\ 0 &= \lambda \cdot p_{n+r-1} - n\mu \cdot p_{n+r} \end{aligned}$$



Řešením tohoto systému pak dostaneme (zde opět  $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$ )

$$\begin{aligned} p_k &= p_0 \cdot \frac{\beta^k}{k!}, \quad 0 \leq k < n \\ p_k &= p_0 \cdot \frac{\beta^k}{n! \cdot n^{k-n}} = p_n \cdot \left(\frac{\beta}{n}\right)^{k-n} \end{aligned} \quad (63)$$

Dále pravděpodobnost  $p_0$  – spočteme z toho, že  $\sum_{k=0}^{n+r} p_k = 1$ :

$$p_0 \cdot \left[ \sum_{k=0}^n \frac{\beta^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{n+r} \frac{\beta^k}{n! \cdot n^{k-n}} \right] = p_0 \cdot \left[ \sum_{k=0}^n \frac{\beta^k}{k!} + \frac{\beta^n}{n!} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^r \left(\frac{\beta}{n}\right)^k}_{\frac{1-\varrho^r}{1-\varrho} \text{ (r pro } \varrho=1)} \right]$$

a odtud

$$p_0^{-1} = \begin{cases} \sum_{k=0}^n \frac{\beta^k}{k!} + \frac{\beta^n}{n!} \cdot \frac{1-\varrho^r}{1-\varrho}, & \varrho \neq 1 \\ \sum_{k=0}^n \frac{\beta^k}{k!} + \frac{\beta^n}{n!} \cdot r, & \varrho = 1 \end{cases}$$

### 5.9.3 Parametry systému se ztrátami

Na základě vypočtených pravděpodobností pak můžeme spočítat

- pravděpodobnost ztráty (odmítnutí)  $p_{n+r}$ ,
- pravděpodobnost, že se zákazník neztratí  $1 - p_{n+r}$ ,
- pravděpodobnost okamžité obsluhy  $\sum_{k=0}^{n-1} p_k$ ,
- pravděpodobnost čekání  $\sum_{k=0}^{r-1} p_{n+k}$ ,
- střední počet zákazníků v systému  $E(L) = \sum_{k=1}^{n+r} k \cdot p_k$ ,
- střední délka fronty  $E(Q) = \sum_{k=1}^r k \cdot p_{n+k}$ .

Dále spočteme střední počet pracujících linek

$$\begin{aligned} \nu &= \sum_{k=1}^n k \cdot p_k + \sum_{k=1}^r n \cdot p_{n+k} \\ &= p_0 \cdot \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{\beta^k}{k!} + n \cdot p_0 \cdot \sum_{k=1}^r \frac{\beta^{n+k}}{n! \cdot n^k} = \beta \cdot p_0 \cdot \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta^k}{k!} + \sum_{k=0}^{r-1} \left(\frac{\beta}{n}\right)^k \right] \end{aligned}$$

Po roznásobení poslední závorky číslem  $p_0$  máme  $\sum_{k=0}^{n-1} p_k$  a  $\sum_{k=0}^{r-1} p_{n+k}$ , tedy

$$\nu = \beta \cdot (1 - p_{n+r}) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (1 - p_{n+r})$$

Položíme-li nyní  $\lambda' = \lambda \cdot (1 - p_{n+r})$ , tedy hodnotu efektivního vstupního proudu, zjistíme, že zákazník, který se neztratí, najde při příchodu do systému v průměru  $\beta$  obsazených linek.

Nyní zbývá určit dobu čekání  $W$ . K tomu, abychom ji spočítali, můžeme v zásadě uplatnit dva přístupy:

1. Pravděpodobnost toho, že neztracený zákazník se postaví na  $k$ -té místo ve frontě (pro  $k = 1, 2, \dots, r$ ) se rovná

$$p_{n+k-1} = \frac{p_{n+k-1}}{1 - p_{n+r}} = c \cdot p_{n+k-1}$$

kde  $c$  je konstanta.

2. Nebo to chápeme tak, že zákazník čekal, tedy

$$p_{n+k-1} = \frac{p_{n+k-1}}{\sum_{j=0}^{r-1} p_{n+j}} = c \cdot p_{n+k-1}$$

kde opět  $c$  je konstanta.

Každopádně můžeme tedy vzít původní pravděpodobnosti, které jsou „něčím normovány“. Vztahy uvedeme vždy pro oba přístupy:

$$1. \frac{1}{c} = 1 - p_{n+r} = p_0 \cdot \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta^k}{k!} + \frac{\beta^n}{n!} \cdot \frac{1-\varrho^r}{1-\varrho} \right)$$

$$2. \frac{1}{c} = \sum_{j=0}^{r-1} p_{n+j} = p_0 \cdot \frac{\beta^n}{n!} \cdot \frac{1-\varrho^r}{1-\varrho}$$

Dále pro dobu čekání platí

$$P(W > w) = \sum_{k=0}^{r-1} c \cdot p_{n+k} \cdot P(W_{k+1} > w)$$

Zákazník čeká na  $k + 1$  zákazníků před ním, dostaneme tedy Erlangovo rozdělení a odtud pak  $E[W_{k+1}] = \frac{k+1}{n\mu}$ . Pro dobu čekání pak dostáváme

$$1. E[W] = \sum_{k=0}^{r-1} c \cdot p_{n+k} \cdot \frac{k+1}{n\mu} = \frac{p_0 \cdot \frac{\beta^n}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{r-1} (k+1) \cdot \varrho^k}{n\mu \cdot p_0 \cdot \left( \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\beta^k}{k!} + \frac{\beta^n}{n!} \cdot \frac{1-\varrho^r}{1-\varrho} \right)}$$

$$2. E[W] = \sum_{k=0}^{r-1} c \cdot p_{n+k} \cdot \frac{k+1}{n\mu} = \frac{1}{n\mu} \cdot \frac{1}{p_0} \cdot \frac{n!}{\beta^n} \cdot \frac{1-\varrho}{1-\varrho^r} \cdot \sum_{k=0}^{r-1} (k+1) \cdot p_0 \cdot \frac{\beta^{n+k}}{n! \cdot n^k} = \frac{1}{n\mu} \cdot \frac{1-\varrho}{1-\varrho^r} \cdot \sum_{k=0}^{r-1} (k+1) \cdot \underbrace{\frac{\beta^k}{n^k}}_{\varrho^k} =$$

$$\frac{1}{n\mu} \cdot \frac{1-\varrho}{1-\varrho^r} \cdot \sum_{k=1}^r k \cdot \varrho^{k+1}$$

Nyní se pokusíme provést limitní přechod pro  $r \rightarrow \infty$  a uvidíme, zdali dostaneme to, co v systému  $M/M/n$ , tedy

$$E[W] = \frac{p_0}{\mu} \cdot \frac{\beta^n}{(n-1)! \cdot (n-\beta)^2}$$

Limitní přechod dává

$$\begin{aligned} E[W] &= \frac{\overbrace{\frac{\beta^n}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{r-1} (k+1) \cdot \varrho^k}^{\lim_{r \rightarrow \infty} = \frac{1}{(1-\varrho)^2}}}{n\mu \cdot \underbrace{\left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta^k}{k!} + \frac{\beta^n}{n!} \cdot \frac{1-\varrho^r}{1-\varrho} \right)}_{p_0^{-1}}} \\ &= \frac{p_0 \cdot \frac{\beta^n}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \varrho^k}{n\mu} = \frac{p_0 \cdot \beta^n}{n\mu \cdot n! \cdot (1-\varrho)^2} \quad \left| \varrho = \frac{\beta}{n} \right. \\ &= \frac{p_0 \cdot \beta^n}{n\mu \cdot n! \cdot \frac{(n-\beta)^2}{n^2}} = \frac{p_0 \cdot \beta^n}{\mu \cdot (n-1)! \cdot (n-\beta)^2} \end{aligned}$$

a jsme hotovi.

## 5.10 Systémy bez čekání

V předchozí kapitole jsme zkoumali systém, v němž je počet míst ve frontě omezen; nyní jej omezíme na  $r = 0$ , tedy zákazník vůbec nemá kde čekat, a pokud jsou všechny linky obsazeny, odchází s nepořízenou.

Dostáváme zde systém  $n$  rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1 \\ 0 &= \lambda \cdot p_{k-1} - (\lambda + k\mu) \cdot p_k + (k+1)\mu \cdot p_{k+1}, \quad 1 \leq k < n \\ 0 &= \lambda \cdot p_{n-1} - n\mu \cdot p_n \end{aligned}$$

a doplňující podmínku

$$\sum_{k=0}^n p_k = 1$$

### 5.10.1 Řešení systému bez čekání

Provedeme substituci  $z_k = \lambda \cdot p_{k-1} - k\mu \cdot p_k$  a dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= z_0 \\ 0 &= z_k - z_{k+1} \\ 0 &= z_n \end{aligned}$$

Máme tedy opět  $z_k = 0$  pro každé  $k$ , odkud  $p_1 = p_0 \cdot \frac{\lambda}{\mu}$ ,  $p_2 = p_1 \cdot \frac{\lambda}{2\mu}$  atd., celkem tedy  $p_k = p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} = p_0 \cdot \frac{\beta^k}{k!}$ . Zbývá dopočítat z doplňující podmínky pravděpodobnost  $p_0$ , odkud již získáme

$$p_k = \frac{\beta^k}{k!} \cdot \left[ \sum_{j=0}^n \frac{\beta^j}{j!} \right]^{-1} \quad (64)$$

což jsou tzv. Erlangovy vzorce. (Tyto systémy Erlang zkoumal.)

Průměrný počet obsluhujících linek je roven

$$\begin{aligned} \nu &= \sum_{k=1}^n k \cdot p_k = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{\beta^k}{k!} \cdot p_0 \\ &= p_0 \cdot \beta \cdot \underbrace{\left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta^k}{k!} + \frac{\beta^n}{n!} \right)}_{\frac{1}{p_0}} - p_0 \cdot \beta \cdot \frac{\beta^n}{n!} \\ &= \beta - \beta \cdot p_n = \beta \cdot (1 - p_n) \end{aligned} \quad (65)$$

čili opět to stejné  $-\beta$  zredukováno o zákazníky, kteří odešli s nepořízenou.

### 5.10.2 Limitní přechod

Budeme-li nyní zvětšovat intenzitu provozu  $\rho$ , roste pravděpodobnost ztráty. Jsou-li parametry  $\lambda, \mu$  konstantně dány a zvětšujeme  $n$ , ztráty naopak klesají. Přitom pro  $n \rightarrow \infty$  se rozdíl mezi systémy beze ztrát a se ztrátami stírají.

Je-li tedy  $n \rightarrow \infty$ , jsou ztráty nulové; máme tak

$$p_k = \frac{\beta^k}{k!} \cdot \underbrace{\left( \sum_{j=0}^n \frac{\beta^j}{j!} \right)^{-1}}_{\lim_{n \rightarrow \infty} = e^{-\beta}}$$

tedy pro  $n \rightarrow \infty$  je  $p_k = e^{-\beta} \cdot \frac{\beta^k}{k!}$ , což jsme vskutku spočetli dříve.

## 5.11 Systém $M/E_r/1$

Nyní budeme zkoumat systém, v němž doba obsluhy je Erlangovská. Toto můžeme interpretovat tak, že zákazník při obsluze projde několika linkami obsluhy se stejným parametrem, přičemž obsluhování může být jen jeden požadavek, další zákazník přijde na řadu, až ten předchozí odejde z celého systému. (Např. policista řidiče napřed legitimuje, poté mu udělí pokutu.)

### 5.11.1 Metoda fází

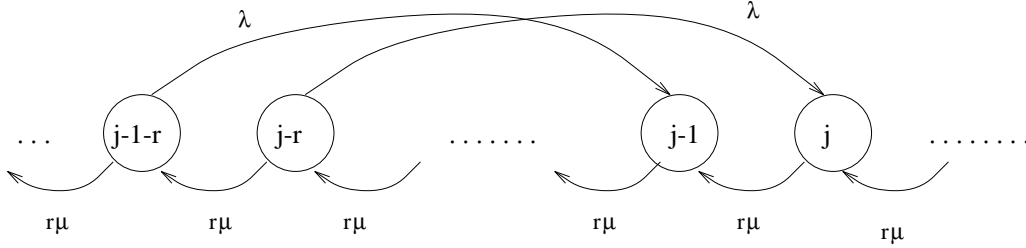
Systém budeme řešit právě pomocí interpretace, kterou jsme uvedli v předchozí poznámce: každý zákazník bude představovat  $r$  fází (obsluhy); potom

$X(t) \geq 0$  vyjadřuje, kolik fází je ještě „v zásobě“, k udělení

$X(t) = 0$  znamená, že linka stojí.

Znamená to tedy, že na každého čekajícího zákazníka připadá  $r$  fází a navíc „zbytek“ od zákazníka rozpracovaného.

Při příchodu zákazníka „poskočíme“ ve stavovém diagramu (obrázek 14) o  $r$  stavů; postup v ob-



Obrázek 14: Stavový diagram systému  $M/E_r/1$  – metoda fází

služe zákazníka znamená jeden stav (jednu fázi). Pokud naopak při příchodu poskočíme o jeden stav a při obsluze o  $r$ , dostáváme samozřejmě skupinové příchody, ke kterým se dostaneme později. Přitom pro  $r = 1$  dostaneme systém  $M/M/1$ , který jsme již diskutovali.

*Pozor:* v metodě fází nebudeme studovat  $p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} p_k(t)$ , ale (opět po stabilizaci systému) pravděpodobnosti  $P_k$ , že je ještě „k dodělán“  $k$  fází; přitom  $p_0 = P_0$  a dále  $p_k = \sum_{j=(k-1) \cdot r+1}^{k \cdot r} P_j$ ; přirozeně pak  $P_j = 0$  pro  $j < 0$ .

Sepíšeme tedy Chapman–Kolmogorovovy rovnice:

$$\begin{aligned} (0) \quad & \lambda \cdot P_0 = r\mu \cdot P_1 \quad \text{tedy} \quad 0 = \lambda \cdot P_0 - r\mu \cdot P_1 \\ (j) \quad & (\lambda + r\mu) \cdot P_j = \lambda \cdot P_{j-r} + r\mu \cdot P_{j+1} \quad \forall j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

„Klasický“ postup řešení se zde uplatnit nedá; zavedeme proto  $z$ -transformaci  $G(j) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j \cdot z^j$  s dodatečnou podmínkou  $G(1) = 1$ . Dále každou rovnici vynásobíme  $z^j$  a dostaneme po sečtení

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda + r\mu) \cdot P_j \cdot z^j = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda \cdot P_{j-r} \cdot z^j + \sum_{j=1}^{\infty} r\mu \cdot P_{j+1} \cdot z^j$$

odkud úpravami dostáváme

$$(\lambda + r\mu) \cdot \left( \sum_{j=0}^{\infty} P_j \cdot z^j - P_0 \right) = \lambda \cdot z^r \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} P_{j-r} \cdot z^{j-r}}_{\sum_{j=0}^{\infty} P_j \cdot z^j} + \frac{r\mu}{z} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} P_{j+1} \cdot z^{j+1}$$

tedy

$$(\lambda + r\mu)(G(z) - P_0) = \lambda z^r \cdot G(z) + \frac{r\mu}{z} \cdot (G(z) - P_0 - P_1 z)$$

$$\begin{aligned}
G(z) \cdot \left[ \lambda + r\mu - \lambda z^r - \frac{r\mu}{z} \right] &= \lambda P_0 + r\mu P_0 - \frac{r\mu}{z} \cdot P_0 - \mu P_1 \\
&= r\mu \cdot P_0 \cdot \left( 1 - \frac{1}{z} \right) = r\mu \cdot P_0 \cdot \frac{z-1}{z} \\
G(z) \cdot \frac{1}{z} \cdot \left[ (\lambda + r\mu)z - \lambda z^{r+1} - r\mu \right] &= r\mu \cdot P_0 \cdot \frac{z-1}{z} \cdot z
\end{aligned}$$

přítom

$$G(z) = \frac{r\mu \cdot P_0 \cdot (1-z)}{r\mu + \lambda z^{r+1} - (\lambda + r\mu)z}$$

a poněvadž

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 1} G(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-r\mu \cdot P_0}{\lambda(r+1) \cdot z^r - (\lambda + r\mu)} \\
&= \frac{r\mu \cdot P_0}{(\lambda + r\mu) - \lambda(r+1)} = \frac{r\mu \cdot P_0}{r\mu - \lambda r} = \frac{\mu P_0}{\mu - \lambda} \\
&= \frac{P_0}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{P_0}{1 - \varrho} = 1 \quad \Rightarrow \quad P_0 = 1 - \varrho
\end{aligned}$$

### 5.11.2 Systém $M/E_1/1$

Dosadíme-li nyní  $r = 1$ , dostáváme klasické exponenciální rozdělení a systém  $M/M/1$ , tedy po dosazení

$$\begin{aligned}
G(z) &= \frac{\mu \cdot (1 - \varrho)(1 - z)}{\mu + \lambda z^2 - (\lambda + \mu)z} = \frac{(1 - \varrho)(1 - z)}{\underbrace{1 + \varrho z^2 - (1 + \varrho)z}_{1 + \varrho z^2 - z - \varrho z = (1-z) - \varrho z(1-z)}} \\
&= \frac{(1 - \varrho)(1 - z)}{(1 - \varrho z)(1 - z)} = \frac{1 - \varrho}{1 - \varrho z} = (1 - \varrho) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (\varrho z)^j
\end{aligned}$$

Zde je  $P_k = p_k$ , a tedy  $p_k = (1 - \varrho) \cdot \varrho^k$  ( $p_k$  je koeficient u  $z^k$ , poněvadž  $G(z) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j \cdot z^j$ ).

### 5.11.3 Systém $M/E_2/1$

Dosazením  $r = 2$  dostaneme systém  $M/E_2/1$ , pro který máme

$$G(z) = \frac{2\mu \cdot (1 - \varrho)(1 - z)}{2\mu + \lambda z^3 - (\lambda + 2\mu)z}$$

a protože jmenovatel má vždy kořen 1, máme

$$G(z) = \frac{2\mu \cdot (1 - \varrho)(1 - z)}{-(1 - z)(\lambda z^2 + \lambda z - 2\mu)} = \frac{-2\mu(1 - \varrho)(1 - z)}{\lambda(1 - z)(z_1 - z)(z_2 - z)} = -\frac{2}{\varrho} \cdot \frac{(1 - \varrho)}{(z_1 - z)(z_2 - z)}$$

kde

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 + 8\varrho^{-1}} \right)$$

a po rozkladu na parciální zlomky dostaneme

$$G(z) = -\frac{2}{\varrho} \cdot (1 - \varrho) \cdot \left[ -\frac{\varrho}{2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right) \left(1 - \frac{z}{z_1}\right)} - \frac{\varrho}{2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right) \left(1 - \frac{z}{z_2}\right)} \right]$$

a vzhledem k tomu, že  $z_{1,2} = \frac{-\sqrt{\varrho} \pm \sqrt{\varrho+8}}{2\sqrt{\varrho}}$ , můžeme „při troše počítání“ dospět k

$$G(z) = (1 - \varrho) \cdot \left[ \frac{\sqrt{\varrho+8} - \sqrt{\varrho}}{2\sqrt{\varrho+8}} \cdot \frac{1}{1 - z \cdot \frac{\varrho - \sqrt{\varrho(\varrho+8)}}{4}} + \frac{\sqrt{\varrho+8} + \sqrt{\varrho}}{2\sqrt{\varrho+8}} \cdot \frac{1}{1 - z \cdot \frac{\varrho + \sqrt{\varrho(\varrho+8)}}{4}} \right]$$

Tomuto se někdy říká *zobecněné geometrické rozdělení*. Dále máme

$$P_j = \frac{(1 - \varrho) \cdot \sqrt{\varrho^j}}{2^{2j+1} \cdot \sqrt{\varrho+8}} \cdot \left[ \left( \sqrt{\varrho} + \sqrt{\varrho+8} \right)^{j+1} - \left( \sqrt{\varrho} - \sqrt{\varrho+8} \right)^{j+1} \right]$$

pro  $j = 1, 2, \dots$ , a odtud užitím binomické věty dostaneme pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} P_{2k} &= \frac{1 - \varrho}{2^{4k}} \cdot \sum_{i=1}^k \binom{2k+1}{2i-1} \cdot \varrho^{2k+2-i} (\varrho+8)^{i-1} \\ P_{2k+1} &= \frac{1 - \varrho}{2^{4k-2}} \cdot \sum_{i=1}^k \binom{2k}{2i-1} \cdot \varrho^{2k-i} (\varrho+8)^{i-1} \end{aligned}$$

## 5.12 Systém $E_r/M/1$

Nyní se pokusíme řešit systém  $E_r/M/1$ , který, i když vypadá symetrický s předchozím, má poněkud jiný smysl: vyjadřuje tzv. *skupinové příchody*, tedy máme-li intenzitu obsluhy  $\mu$ , pak  $r - 1$  zákazníků zaženeme a vezmeme až  $r$ -tého, nebo na  $r$ -tého čekáme a vezmeme všechny najednou (ne méně).

Dá se uvažovat též systém  $E_m/E_n/1$ , ale ten je již příliš komplikovaný, a proto se jím zabývat nebudeme.

### 5.12.1 Popis systému $E_r/M/1$

Použijeme opět metodu fází: tentokrát příchodem zákazníka jedna fáze přibude, zatímco obsluhou  $r$  fází ubude. Dostaneme proto systém rovnic

$$\begin{aligned} r\lambda \cdot P_0 &= \mu \cdot P_r \\ r\lambda \cdot P_j &= r\lambda \cdot P_{j-1} + \mu \cdot P_{j+r}, \quad 1 \leq j \leq r-1 \\ (r\lambda - \mu) \cdot P_j &= r\lambda \cdot P_{j-1} + \mu \cdot P_{j+r}, \quad j \geq r \end{aligned}$$

který budeme dále řešit.

5.12.2 Řešení systému  $E_r/M/1$ 

Zavedeme funkci  $P(z)^{22} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j \cdot z^j$ , přičemž  $P(1) = 1$ . Dostaneme tak

$$\begin{aligned} (r\lambda + \mu) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} P_j \cdot z^j - \sum_{j=1}^{r-1} \mu \cdot P_j \cdot z^j &= \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} r\lambda \cdot P_{j-1} \cdot z^j}_{r\lambda z \cdot \sum_{j=0}^{\infty} P_j \cdot z^j} + \sum_{j=1}^{\infty} \mu \cdot P_{j+r} \cdot z^j \\ (r\lambda + \mu) \cdot [P(z) - P(0)] - \sum_{j=1}^{r-1} \mu \cdot P_{j-1} \cdot z^j &= r\lambda z \cdot P(z) + \frac{\mu}{z^r} \cdot \left[ P(z) - \sum_{j=0}^{\infty} P_j \cdot z^j \right] \\ P(z) \cdot \left[ r\lambda + \mu + r\lambda z - \frac{\mu}{z^r} \right] &= \frac{z^r}{z^r} \cdot (r\lambda + \mu) \cdot P_0 + \frac{z^r}{z^r} \cdot \mu \cdot \sum_{j=1}^{r-1} P_j \cdot z^j - \frac{\mu}{z^r} \cdot \sum_{j=0}^r P_j \cdot z^j \\ P(z) \cdot \frac{\mu}{z^r} \cdot \left[ (r \cdot \varrho + 1)z^r - r \cdot \varrho \cdot z^{r+1} - 1 \right] &= \underbrace{(r\lambda \cdot P_0 - \mu \cdot P_r)}_{=0} + \frac{\mu}{z^r} \cdot \underbrace{\left[ z^r \cdot \sum_{j=0}^{r-1} P_j \cdot z^j - \sum_{j=0}^{r-1} P_j \cdot z^j \right]}_{(z^r - 1) \cdot \sum} \end{aligned}$$

Poslední rovnost dále zkrátíme výrazem  $\frac{\mu}{z^r}$  a dostaneme

$$P(z) = \frac{(1 - z^r) \cdot \sum_{j=0}^{r-1} P_j \cdot z^j}{r\varrho \cdot z^{r+1} - (1 + r\varrho) \cdot z^r + 1}$$

přičemž vidíme, že suma v čitateli jest polynomem stupně  $r - 1$ .

Máme tedy funkci komplexní proměnné, která je v oblasti jednotkové kružnice  $|z| < 1$  ohraničená, proto všechny kořeny čitatele jsou i kořeny jmenovatele.

Víme, že funkce komplexní proměnné, která je ohraničená v celé komplexní rovině, je konstantní<sup>23</sup>, zejména pak funkce

$$\frac{r\varrho \cdot z^{r+1} - (1 + r\varrho) \cdot z^r + 1}{(1 - z^r) \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)} = K \cdot \sum_{j=0}^{r-1} P_j \cdot z^j$$

Odtud pak

$$P(z) = \frac{1 - z^r}{K \cdot (1 - z) \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)}$$

dále pak protože  $\lim_{z \rightarrow 1} P(z) = 1$  a  $(1 - z^r) = (1 - z) \underbrace{(1 + z + z^2 + \dots + z^{r-1})}_{=r}$ , je

$$\lim_{z \rightarrow 1} P(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - z^r}{K \cdot (1 - z) \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)} = \frac{r}{K \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)}$$

a odtud pak

$$K = \frac{r}{1 - \frac{z}{z_0}}$$

<sup>22</sup>Totéž vyjadřovala v předchozí kapitolce funkce  $G(z)$ ; dále ji budeme značit již  $P(z)$ , jak se obvykle značí.

<sup>23</sup>Nemyslí se tady náhodou jen polynomiální funkce?



Celkem tedy

$$\begin{aligned}
 P(z) &= \frac{(1 - z^r) \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)}{r(1 - z) \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)} \\
 P(z) &= (1 - z^r) \cdot \left[ \frac{1}{1 - z} + \frac{-\frac{1}{rz_0}}{1 - \frac{z}{z_0}} \right]
 \end{aligned} \tag{66}$$

### 5.13 Systém $M/G/1$

Vyřešili jsme tedy základní parametry systémů  $M/M/1$ ,  $M/M/n$ ,  $E_r/M/1$ . Nyní budeme směřovat k systému obecnějšímu –  $M/G/1$ , kdy o délce obsluhy (resp. jejím typu rozdělení) nevíme nic. Při řešení systému již nevystačíme se  $z$ -transformací.

#### 5.13.1 Laplaceova transformace

O Laplaceově transformaci jsme již hovořili v kapitole 2.3; zde si pojmy zopakujeme a ukážeme si její další využití.

#### Definice 5.4

Mějme funkci reálného argumentu  $f(t)$ , která se chová „rozumně“, tedy že je definována pro  $t \geq 0$ , že je spojitá, že má konečný počet nulových bodů, že  $f(t) \equiv 0$  pro  $t \leq 0$ , a že je ohraničena exponenciálou v tom smyslu, že

$$\exists M > 0, s_0 \geq 0 : |f(t)| < M \cdot e^{s_0 t}$$

Vytvoříme nyní tzv. Laplaceův intergál jako funkci komplexní proměnné

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

Funkce  $f(t)$  se pak nazývá *vzor* (originál),  $F(p)$  je *obraz* v Laplaceově transformaci. Píšeme  $f(t) \Leftrightarrow F(p)$ .

#### Příklad 5.3

Příklady vzorů a obrazů v Laplaceově transformaci:

- $1 \Leftrightarrow \frac{1}{p}$
- $e^{kt} \Leftrightarrow \frac{1}{p-k}$
- jestliže  $f_1(t) \Leftrightarrow F_1(p)$  a  $f_2(t) \Leftrightarrow F_2(p)$ , pak  $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \Leftrightarrow c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$ , pro každé  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- $\sin \beta t \Leftrightarrow \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$ , protože

$$\sin \beta t = \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i} = \frac{1}{2i} \cdot \left( \frac{1}{p - \beta i} - \frac{1}{p + \beta i} \right)$$

- analogicky  $\cos \beta t \Leftrightarrow \frac{p}{p^2 + \beta^2}$ , protože

$$\cos \beta t = \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2}$$

- derivace: je-li  $f(t) \Leftrightarrow F(p)$ , pak

$$\int_0^\infty f'(t) \cdot e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{l} u = e^{-pt} \quad u' = -p \cdot e^{-pt} \\ v' = f(t) \quad v = f(t) \end{array} \right| = [f(t) \cdot e^{-pt}]_0^\infty + p \cdot \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} dt = p \cdot F(p) - f(0)$$

tedy celkem  $f'(t) \Leftrightarrow p \cdot F(p) - f(0)$

- $f^{(n)}(t) \Leftrightarrow p^n \cdot F(p)$  (je-li  $f(0) = 0$ )

- $\int_0^t f(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{F(p)}{p}$

- odtud pak  $t^n \Leftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}$

- $-t \cdot f(t) \Leftrightarrow F'(p)$

- $(-t)^n \cdot f(t) \Leftrightarrow F^{(n)}(p)$

- $\frac{f(t)}{t} \Leftrightarrow \int_p^\infty F(u) du$

- konvoluce: je-li  $f(t) \Leftrightarrow F(p)$  a  $g(t) \Leftrightarrow G(p)$ , pak  $f(t) \otimes g(t) \Leftrightarrow F(p) \cdot G(p)$ .

#### Příklad 5.4

Víme, že  $\sin t \Leftrightarrow \frac{1}{1+p^2}$ . Dále pak

$$\frac{\sin t}{t} \Leftrightarrow \int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} = [\arctan u]_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan p = \operatorname{arccotg} p$$

a odtud

$$\operatorname{si} t = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \Leftrightarrow \frac{\operatorname{arccotg} p}{p}$$

#### Příklad 5.5 ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Mějme nyní zadánu např. diferenciální rovnici  $y'' + y = t$  s počátečními podmínkami  $y(0) = y'(0) = 1$ . Tuto rovnici bychom snadno vyřešili známými metodami; nyní si ukážeme, jak se dá řešit pomocí Laplaceovy transformace.

Řekněme, že  $y \Leftrightarrow Y$ . Pak máme

$$y' \Leftrightarrow p \cdot Y - f(0) = p \cdot Y - 1$$

$$y'' \Leftrightarrow p^2 \cdot Y - p - 1$$

tedy rovnice přejde ve tvar

$$p^2 \cdot Y - p - 1 + Y = \frac{1}{p^2}$$

Odtud pak

$$(p^2 + 1)Y = \frac{1}{p^2}$$

a dále po úpravách

$$Y = \frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2 + 1}$$

a protože je  $t \Leftrightarrow \frac{1}{p^2}$  a  $\cos t \Leftrightarrow \frac{p}{p^2+1}$ , máme celkem výsledek  $y = t + \cos t$ .

### 5.13.2 Výpočty momentů náhodných veličin

Nyní uvažujme náhodnou veličinu, která je popsána distribuční funkcí  $F(x)$ , resp. hustotou  $a(x)$ ; předpokládejme, že  $a(x)$  splňuje podmínky Laplaceovy transformace, tedy  $a(x) \geq 0$  pro  $x > 0$ ,  $a(x) \equiv 0$  pro  $x \leq 0$ .

Protože  $a(x)$  je hustota, máme

$$\int_0^{\infty} a(x) dx = 1$$

a dále střední hodnotu

$$\int_0^{\infty} x \cdot a(x) dx = \bar{X}$$

a  $n$ -tý počáteční moment

$$\int_0^{\infty} x^n \cdot a(x) dx = \bar{X}^n$$

Nyní uvážíme laplaceovský obraz hustoty

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot a(x) dx = A^*(s)$$

a odtud snadno

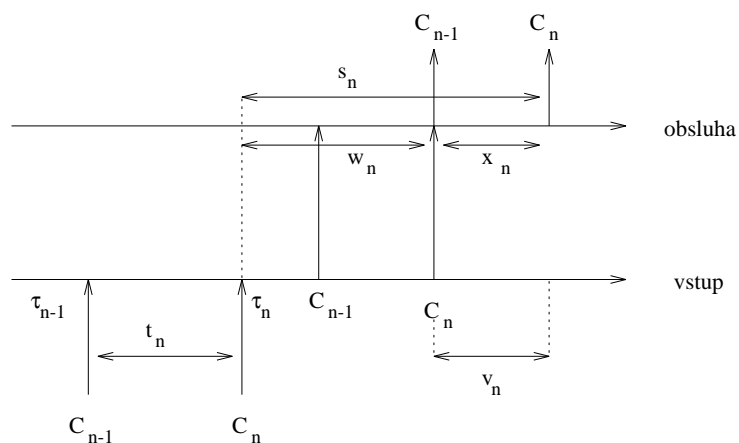
$$A^{*(n)}(0) = (-1)^n \cdot \bar{X}^n \quad (67)$$

a takto můžeme počítat počáteční momenty náhodné proměnné (již bez zpětné transformace).

Uvěřit se tomu dá takto:

$$\begin{aligned} e^{-sx} &= 1 - sx + \frac{s^2 x^2}{2!} - \dots \\ A^*(s) &= \int_0^{\infty} \left[ a(x) - sx \cdot a(x) + \frac{s^2 x^2}{2!} \cdot a(x) - \dots \right] dx \\ &= \underbrace{\int_0^{\infty} a(x) dx}_1 - \underbrace{s \cdot \int_0^{\infty} x \cdot a(x) dx}_{-s \cdot \bar{X}} + \underbrace{\frac{s^2}{2!} \cdot \int_0^{\infty} x^2 \cdot a(x) dx}_{\frac{s^2}{2!} \cdot \bar{X}^2} - \dots \end{aligned}$$

Nyní již jen stačí po zderivování dosadit  $s = 0$  a vyjde výše uvedená rovnost.

Obrázek 15: Schéma činnosti systému  $M/G/1$ 

### 5.13.3 Popis systému $M/G/1$

V systému  $M/G/1$  předpokládáme markovovské příchody zákazníků, zatímco o době obsluhy nevíme nic. Víme opět, že zákazníci nepřicházejí do systému současně. Schematicky si systém znázorníme na obr. 15, kde máme naznačeny vstupy zákazníků do systému (spodní osa) a obsluhu (horní osa); „přeskok“ zákazníka z dolní na horní osu značí jeho přijetí na linku obsluhy.

Označíme si nyní

$C_n$  bude  $n$ -tý zákazník,

$s_n$  doba jím strávená v systému,

$w_n$  doba čekání,

$x_n$  doba obsluhy,

$\tau_n$  čas jeho příchodu,

$t_n$  interval od příchodu  $n - 1$ -ního,

$q_n$  délka fronty ve chvíli, kdy opouští systém,

$v_n$  počet zákazníků, kteří přišli během obsluhy.

Zatímco totiž v Markovovském procesu popisovalo  $X(t)$  v libovolném okamžiku stav systému, tady to nejde: jak se systém chová, můžeme říci jen v určitých okamžicích. Tedy: když to markovovské „není pořád“, tak alespoň někdy – v okamžiku, kdy zákazník opouští systém.

Tedy budeme uvažovat, že od doby, kdy zákazník  $C_n$  opustil systém, do doby, než skončil  $C_{n+1}$ , přišlo  $v_{n+1}$  nových zákazníků. Pak je zřejmě  $q_{n+1} = q_n - 1 + v_{n+1}$ .

Pokud zákazník  $C_{n+1}$  přišel až poté, co  $C_n$  systém opustil, je fronta prázdná, je obsluhován okamžitě, tedy  $q_n = 0$ . Pak také  $q_{n+1} = v_{n+1} = q_n + v_{n+1}$ .

Oba vztahy nyní sloučíme

$$q_{n+1} = q_n - \Delta q_n + v_{n+1} \quad (68)$$

$$\text{kde } \Delta k = \begin{cases} 1, & k = 1, 2, \dots \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

Pokud nyní necháme systém pracovat, dostaneme

- $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \bar{q}$ , střední délka fronty,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \bar{v}$ , střední počet zákazníků, kteří přijdou během obsluhy; pokud je  $\bar{v} \geq 1$ , systém se zahltí.

Platí přitom  $E[q_{n+1}] = E[q_n] - E[\Delta q_n] + E[v_{n+1}]$ ; v limitním přechodu pak můžeme říct, že

$$E[\bar{q}] = E[\bar{q}] - E[\Delta q_n] + E[\bar{v}] \quad \Rightarrow \quad E[\Delta q_n] = E[\bar{v}]$$

Dále

$$\begin{aligned} E[\Delta q_n] &= \sum_{k=0}^{\infty} \Delta k \cdot P[\bar{q} = k] \\ &= \Delta 0 \cdot P[\bar{q} = 0] + \Delta 1 \cdot P[\bar{q} = 1] + \dots \\ &= P[\bar{q} > 0] = \rho \end{aligned}$$

tedy systém je prázdný s pravděpodobností rovnou intenzitě provozu  $\rho$ .

Dále pak ( $\bar{x}$  je střední doba obsluhy jednoho zákazníka)

$$E[\Delta q_n] = E[\bar{v}] = \rho = \lambda \cdot \bar{x} < 1 \quad (\text{stabilita})$$

a odtud  $P[\bar{q} = 0] = 1 - \rho$ .

#### 5.13.4 Řešení systému $M/G/1$

Nyní chceme spočítat  $E[\bar{q}]$ . K tomu vztah 68 umocníme na druhou a dále uvážíme, že je  $\Delta^2 q_n = \Delta q_n$  a rovněž  $q_n \cdot \Delta q_n = q_n$ . Dostáváme tak

$$q_{n+1}^2 = q_n^2 + (\Delta q_n)^2 + v_{n+1}^2 - 2q_n \Delta q_n + 2q_n v_{n+1} - 2\Delta q_n v_{n+1}$$

a dále pro limitní přechod (kde pak  $E[\overline{\Delta q}] = E[\bar{v}]$ )

$$\begin{aligned} E[q_{n+1}^2] &= E[q_n^2] + E[\Delta q_n] + E[v_{n+1}^2] - 2 \cdot E[q_n] + 2 \cdot E[q_n \cdot v_{n+1}] - 2 \cdot E[\Delta q_n \cdot v_{n+1}] \\ E[\bar{q}^2] &= E[\bar{q}] + E[\bar{v}] + E[\bar{v}^2] - 2 \cdot E[\bar{q}] + 2 \cdot E[\bar{q}] \cdot E[\bar{v}] - 2 \cdot E[\bar{v}] \cdot E[\bar{v}] \end{aligned}$$

Odtud pak

$$2 \cdot E[\bar{q}] \cdot (1 - E[\bar{v}]) = E[\bar{v}] + E[\bar{v}^2] - E[\bar{v}] \cdot E[\bar{v}]$$

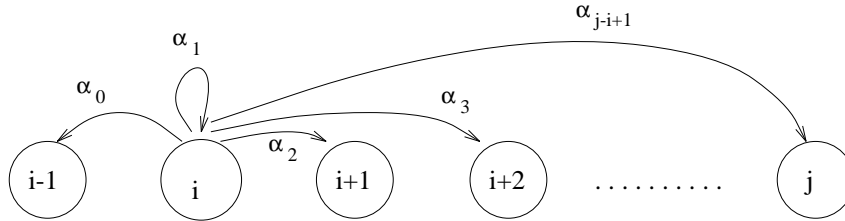
a dále s využitím  $E[\bar{v}] = \rho$

$$\begin{aligned} E[\bar{q}] &= \frac{\rho + E[\bar{v}^2] - 2\rho^2 + \rho - \rho}{2(1 - \rho)} \\ &= \frac{2\rho(1 - \rho) + E[\bar{v}^2] - \rho}{2(1 - \rho)} \\ &= \rho + \frac{E[\bar{v}^2] - E[\bar{v}]}{2(1 - \rho)} \end{aligned}$$

Nyní je třeba spočítat  $E[\bar{v}^2], E[\bar{v}]$ .

Připomeňme si, že při počítání procesů vzniků a zániků jsme vycházeli z toho, že systém se mohl ze stavu  $i$  překlopit jen do  $i \pm 1$  nebo zůstat.

Zde máme  $v_{n+1} = k$ , kde  $k = 0, 1, 2, \dots$  a zajímá nás, kolik zákazníků do systému přišlo, tedy pravděpodobnosti  $P[v_{n+1} = k] = \alpha_k$ . Po obsluze jednoho zákazníka může systém skončit ve stavu  $i - 1, i, i + 1$  atd. (viz obrázek 16).



Obrázek 16: Přejchodový graf systému  $M/G/1$

Přitom pokud označíme  $P[X_n \leq x] = P[\bar{x} \leq x] = B(x)$  distribuční funkci obsluhy, resp. její hustotu  $b(x)$ , hodnoty  $\alpha_k$  můžeme spočítat jako integrál vyjadřující úplnou pravděpodobnost

$$\begin{aligned} \alpha_k = P[\bar{v} = k] &= \int_0^\infty P[\bar{v} = k, x < \bar{x} < x + dx] dx \\ &= \int_0^\infty \underbrace{P[\bar{v} = k | \bar{x} = x]}_{\frac{(\lambda x)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda x}} \cdot b(x) dx \end{aligned}$$

Máme tedy systém  $M/G/1$ , pro jehož obsluhu známe hustotu  $b(x)$ , resp. distribuční funkci  $B(x)$ ; příchody jsou markovovské, tedy tvoří Poissonův proces (proto zde vystupuje  $\frac{(\lambda x)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda x}$ ).

Nyní budeme počítat všechna  $\alpha_k$  současně. Dostaneme mocninovou řadu, v níž koeficienty budou právě  $\alpha_k$ . Dále využijeme, že za předpokladu konvergence je  $f \sum = \sum f$ :

$$\begin{aligned} V(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (P[\bar{v} = k] \cdot z^k) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(\lambda x)^k}{k!} \cdot z^k \right) \cdot b(x) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x z)^k}{k!}}_{e^{\lambda x z}} \cdot b(x) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-(\lambda - \lambda z)x} \cdot b(x) dx = B^*(\lambda - \lambda z) \end{aligned}$$

Celkem jsme tedy dostali  $V(z) = B^*(\lambda - \lambda z)$ .

Tedy  $b(x)$  byla hustota, která popisuje dobu obsluhy v  $M/G/1$  a  $B^*$  její Laplaceova transformace;  $V(z)$  je Laplaceova transformace jiného procesu, a sice markovovského procesu příchodů. Studujeme obojí v Laplaceově transformaci; oba procesy se vzájemně ovlivňují.

Platí:

- $B^*(0) = V(1) = 1$  (součet pravděpodobností),

- $B^{*(k)}(0) = (-1)^k \cdot \overline{X^k}$  ( $k$ -tý počáteční moment),
- první derivace  $V^{(1)}(1) = \bar{v}$ ,
- druhá derivace  $V^{(2)}(1) = \overline{v^2} - \bar{v}$ .

Totíž

$$\frac{dV(z)}{dz} = \frac{dB^*(\lambda - \lambda z)}{dz} = \frac{dB^*(\lambda - \lambda z)}{d(\lambda - \lambda z)} \cdot \frac{d(\lambda - \lambda z)}{dz} = -\lambda \cdot \frac{dB^*(y)}{dy}$$

a tedy

$$V^{(1)}(1) = -\lambda \cdot \left. \frac{dB^*(y)}{dy} \right|_{y=0} = \lambda \bar{x} = \bar{v} = \varrho$$

Dále protože  $\frac{dy}{dz} = \lambda$ , je druhá derivace

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left[ -\lambda \cdot \frac{dB^*(y)}{dy} \right] = -\lambda \cdot \frac{d^2B^*(y)}{dy^2} \cdot \frac{dy}{dz} = \lambda^2 \cdot \frac{d^2B^*(y)}{dy^2}$$

čili

$$V^{(2)}(1) = \lambda^2 \cdot B^{*(2)}(0) = \lambda^2 \overline{X^2}$$

což se rovná  $\overline{v^2} - \bar{v}$ .

Dostáváme se tedy ke střednímu počtu zákazníků, který je po dosazení roven

$$\bar{q} = \varrho + \frac{\lambda^2 \overline{X^2}}{2(1 - \varrho)} \quad (69)$$

Dále ukážeme ještě jeden vztah.

Pro náhodnou veličinu s hustotou  $b(x)$  a rozptylem  $\sigma_b^2$  zavedeme tzv. *normovaný* rozptyl  $C_b^2 = \frac{\sigma_b^2}{(\bar{X})^2}$ . Pak dostaneme

$$\overline{X^2} = \underbrace{\overline{X^2} - (\bar{X})^2}_{\sigma_b^2} + (\bar{X})^2 = \sigma_b^2 + (\bar{X})^2 = (\bar{X})^2 \cdot (C_b^2 + 1)$$

a odtud

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \varrho + \frac{\lambda^2 (\bar{X})^2 \cdot (C_b^2 + 1)}{2(1 - \varrho)} \\ &= \varrho + \varrho^2 \cdot \frac{C_b^2 + 1}{2(1 - \varrho)} \end{aligned} \quad (70)$$

což je tzv. Pollaczek–Khinchinova formule.

### 5.13.5 Vyjádření jednodušších systémů z $M/G/1$

Nyní si ukážeme, že lze opět snadno dostat systémy, které jsme vyřešili dříve, jako speciální případ obecnějšího systému  $M/G/1$ .

$M/M/1$ . Tak pro systém  $M/M/1$  dostaneme

$$\bar{q} = \rho + \rho^2 \cdot \frac{1+1}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

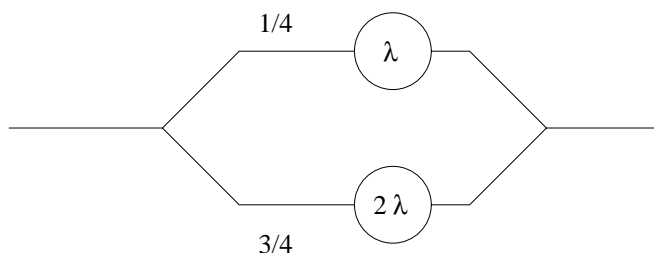
což jsme spočeli dříve.

$M/D/1$ . Tímto systémem jsme se nezabývali – každý zákazník je obsluhován stejně dlouho, rozptyl je tedy nulový, a dostáváme

$$\bar{q} = \rho + \rho^2 \cdot \frac{1}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho^2}{1-\rho} < \frac{\rho}{1-\rho}$$

$M/H_2/1$ . Zde máme příklad systému, který jsme ani neuvažovali v Kendallově klasifikaci: systém má dvě linky obsluhy, ke kterým se příchozí zákazníci rozdělí v určitém poměru (zařadí se s určitou pravděpodobností).

Například budeme uvažovat systém, v němž k první lince obsluhy, která má parametr  $\lambda$ , přijde čtvrtina zákazníků, ke druhé s parametrem  $2\lambda$  zbylé tři čtvrtiny (obrázek 17). Dostaneme



Obrázek 17: Schéma systému  $M/H_2/1$

- $\bar{X} = \frac{5}{8\lambda}$
- $\bar{X}^2 = \frac{28}{32\lambda^2}$
- $\sigma^2 = \frac{31}{64\lambda^2}$
- $C^2 = 1,24$  (pro exponenciální rozdělení je  $C^2 = 1$ )

a odtud

$$\bar{q} = \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{0,12\rho^2}{1-\rho}$$

## 5.14 Závěrem

Probrali jsme postupně několik základních typů systémů hromadné obsluhy až po poměrně obecný  $M/G/1$ . V této teorii by bylo možné pokračovat dále – např. se pokusit počítat systém  $G/G/1$ ; ten však vede k integrálním rovnicím, které nejsou bez náročného matematického aparátu zvládnutelné.

Další věc, která by mohla být zajímavá, jsou sítě linek obsluhy: zákazník po obsluze u jedné linky přechází k jiné. Rovněž tyto systémy jsou dosti obtížné, proto se zpravidla řeší vytvořením simulačního modelu.