KOMBINATORIKA A TEORIE GRAFŮ

Podle přednášek RNDr. Jiřího Kaďourka, CSc.
sepsal Jiří Wotke

březen 1998, Brno

Hodně jsem se snažil, aby se přepisováním nedostalo do textu moc chyb. Přesto nemohu bezchybnost zaručit. Narazíte-li na jakoukoliv nesrovnalost, zkuste prosím poslat e-mail na adresu: wotke@fi.muni.cz

Contents

Literatura:

- E. Fuchs, Kombinatorika a teorie grafů, skripta UJEP Brno
- J. Nešetřil, Kombinatorika I - MFF UK
- J. Plesník, Grafové alogoritmy, VEDA, Bratislava 1983
- M.Hall, Combinaterial theory 1967
- F. Haray, Graph theory, Adison-Wesley 1969

Označení číselných množin:
N — přirozená čísla; $\{1, 2, 3 \ldots\}$ N_0 — přirozená čísla s nulou; $N \cup 0$
Z — celá čísla
Q — racionální čísla
R — reálná čísla
C — komplexní čísla

1 Variace, kombinace

Definice:

Pro libovolné $r \in R$, $k \in N_0$ definujeme:

klesající faktoriál: $[r]_k = \begin{cases} r \cdot (r-1) \cdot \ldots \cdot (r-k+1), & \text{pokud } k \in N, r \in R \\ 1; \text{ pro } k = 0 \end{cases}$

rostoucí faktoriál: $[r]^k = \begin{cases} r \cdot (r+1) \cdot \ldots \cdot (r+k-1), & \text{pro } k \in N, r \in R \\ 1; \text{ pro } k = 0 \end{cases}$

faktoriál: definujeme pro libovolné $n \in N_0$ jako $n! = [n]_n$

kombinační číslo: definujeme pro libovolné $r \in R, k \in N_0$ jako $\binom{r}{k} = \frac{[r]_k}{k!}$

Binomické koeficienty

1.1 Tvrzení

Pro libovolné $r \in R$, $k \in N_0$ platí:

1.
$$\binom{-r}{k} = (-1)^k . \binom{r+k-1}{k}$$

2.
$$\binom{r}{k} + \binom{r}{k+1} = \binom{r+1}{k+1}$$

Důkaz:

1.
$$\binom{-r}{k} = \frac{[-r]_k}{k!} = \frac{(-1)^k . [r]^k}{k!} = (-1)^k . \frac{[r+k-1]_k}{k!} = (-1)^k . \binom{r+k-1}{k}$$

2.
$$\binom{r}{k} + \binom{r}{k+1} = \frac{[r]_k}{k!} + \frac{[r]_{k+1}}{(k+1)!} = \frac{(k+1).[r]_k + [r]_{k+1}}{(k+1)!} = \frac{(r+1)[r]_k}{(k+1)!} =$$
$$= \frac{[r+1]_{k+1}}{(k+1)!} = \binom{r+1}{k+1}$$

Poznámka:

Podle definice pro libovolné $r \in R$ platí $\binom{r}{0} = 1$, zejména $\binom{0}{0} = 1$ a pro libovolné $k \in N$ platí $\binom{0}{k} = 0$. Tyto hraniční podmínky spolu s rekurentní formulí umožňují postupně počítat všechny hodnoty $\binom{n}{k}$ pro $n, k \in N_0$.
Poznamenejme ještě, že $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ a $\binom{n}{k} = 0$ pro $n < k$.

Variace

V následujících úvahách nechť $k \in N_0$ a nechť M je konečná množina mající $n = |M|$ prvků.

Definice:

Uspořádané k-tice $(m_1, \ldots, m_k)$ vzájemně různých prvků $m_1, \ldots, m_k \in M$ se nazývají variací k-té třídy v M. Vzájemně jednoznačně odpovídající prostým zobrazením $\{1, \ldots, k\} \to M$.

1.2 Tvrzení

Počet variací k-té třídy v M je roven číslu $[n]_k$

Poznámka:

Je-li $n < k$, pak $[n]_k = 0$.

1.3 Důsledek

Počet všech permutací množiny M je roven $n!$.

Definice:

Uspořádané k-tice $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ libovolných prvků $m_1, m_2, \ldots, m_k \in M$ se nazývají variací k-té třídy s opakováním. Vzájemně jednoznačně odpovídají libovolným zobrazením $\{1, \ldots, k\} \to M$.

1.4 Tvrzení

Počet všech variací k-té třídy v M s opakováním je roven číslu n^k, klademe-li $0^0 = 1$.

Kombinace

Libovolné k-prvkové podmnožiny $L \subseteq M$ nazýváme kombinací k-té třídy v M. Jim vzájemně jednoznačně odpovídají zobrazení:
$f : M \to \{0,1\}$ splňující $\sum\limits_{m \in M} f(m) = k$ vztahem $f(m) = 1 \Leftrightarrow m \in L$.
Rozdělím-li na M pevně nějaké lineární uspořádání $\leq$, pak k-prvkové podmnožiny $L \subseteq M$ vzájemně jednoznačně odpovídají vzestupně uspořádaným k-ticím $(m_1, \ldots, m_k)$ vzájemně různých prvků v M.

1.5 Tvrzení

Počet všech kombinací k-té třídy v M je roven číslu $\binom{n}{k} = \frac{[n]_k}{k!}$

Důkaz:

Plyne z Tvrzení 1.2, neboť podle Důsledku 1.3 na k-prvkové podmnožině $L \subseteq M$ existuje $k!$ permutací, t.j. variací k-té třídy v M.

Poznámka:

To platí i tehdy, je-li $n < k$ pak $\binom{n}{k} = 0$

Definice:

Mějme nyní libovolné zobrazení $g : M \to M_0$ splňující $\sum\limits_{m \in M} g(m) = k$. Nazýváme je kombinace k-té třídy v M s opakováním . Pro kritické $m \in M$ udává $g(m)$ počet výskytů v dané kombinaci. Při pevně zvoleném lineárním uspořádání $\leq$ na M pak kombinace n-té třídy v M vzájemně jednoznačně odpovídají vzestupně uspořádaným k-ticím $(m_1, \ldots, m_k)$ libovolných, ne nutně různých prvků z M.

1.6 Tvrzení

Počet všech kombinací k-té třídy v M s opakováním je roven číslu $\binom{n+k-1}{k}$.

Důkaz:

Můžeme předpokládat přímo, že $M = \{1, \ldots, n\}$. Je-li $k = 0$, je uvedený počet roven 1. Pokud $k \in N$, $n = 0$, je tento počet roven 0.

Permutace

1.7 Věta

V okruhu $Z[x,y]$ polynomů dvou proměnných x, y nad Z pro libovolné $n \in N$ platí

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k . y^{n-k}$$

Poznámka:

Věta 1.7 je veřejnosti známa spíše pod pseudonymem Binomická věta.

1.8 Důsledek

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
2. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{cases} 1; & n = 0 \\ 0; & n \in N \end{cases}$
3. Pro libovolné $m, n \in N_0$ platí $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{k}{n} = (-1)^n . \delta_{mn}$,
   kde $\delta_{mn} = \begin{cases} 1; & m = n \\ 0; & m \neq n \end{cases}$

Důkaz:

1. Zřejmé z Binomické věty dosazením $x = y = 1$
2. Zřejmé z Binomické věty dosazením $x = -1$; $y = 1$
3. Nenulové sčítance jsou jen pro $n \leq k \leq m$. Pak vychází

$$\sum_{k=n}^{m} (-1)^k . \binom{m}{k} . \binom{k}{n} = \sum_{k=n}^{m} (-1)^k . \frac{m!}{k!(m-k)!} . \frac{k!}{n!(k-n)!} =$$

$$= \sum_{k=n}^{m} (-1)^k . \frac{m!}{n!(m-n)!} . \frac{(m-n)!}{(m-k)!(k-n!)} = (-1)^n \sum_{k=n}^{m} (-1)^{k-n} . \binom{m}{n} . \binom{m-n}{k-n} =$$

$$= (-1)^n . \binom{m}{n} . \sum_{k=0}^{m-n} (-1)^k \binom{m-n}{k} = \begin{cases} (-1)^n; & m = n \\ 0; & m \geq n \end{cases}$$

Zvolme nyní nekonečnou matici $C = ((-1)^n \binom{m}{n})_{m,n=0}^{\infty}$. Tato matice má v každém řádku jen konečný počet nenulových prvků. Potom Důsledek 1.8.(3) lze přepsat ve tvaru $C.C = E$, kde E je nekonečná jednotková matice.

1.9 Důsledek

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel. Pak

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a_k \;\; pro\ n \in N_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k \;\; pro\ n \in N_0$$

Důkaz:

Stačí si uvědomit, že uvedené lze přepsat jako $\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$. Pak jedna plyne z druhé pomocí $C.C = E$.

Poznámka:

Jedná se o příklad vzájemně inverzních formulí.

Pro libovolné $l \in N$ a $k_1, \ldots, k_l \in N_0$ definujeme $\binom{k_1+\ldots+k_l}{k_1,\ldots,k_l} = \frac{(k_1+\ldots+k_l)!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_l!}$. Nazývají se polynomické koeficienty. V následujícím tvrzení ozřejmíme význam těchto čísel.

1.10 Tvrzení

Buď M konečná množina mající $n = |M|$ prvků. Nechť $k_1, \ldots, k_l \in N_0$ jsou taková, že $k_1 + \ldots + k_l = n$.
Pak počet všech zobrazení $h : M \to \{1, \ldots, l\}$ splňujících podmínku $|h^{-1}(i)| = k_i$ pro $i = 1, \ldots, l$ je rovno číslu $\binom{n}{k_1,\ldots,k_l}$.

Důkaz:

Indukcí vzhledem k l.
Pro $l = 1$ je tvrzení zřejmé. Nechť $l \in N$, $l > 1$. Uvažujme libovolné zobrazení splňující uvedený požadavek. Položíme $L = h^{-1}(l)$. Podle tvrzení 1.5. existuje $\binom{n}{k_l}$ možností jak může vypadat množina L. Podle indukčního předpokladu zobrazení h na množinu $M - L$ je možno vyhotovit $\binom{n-k_l}{k_1,\ldots,k_{l-1}}$ způsoby. Odtud plyne, že počet všech určených zobrazení je roven

$$\binom{n}{k_l}\binom{n-k_l}{k_1,\ldots,k_{l-1}} = \frac{n!}{k_l!(n-k_l)!} \cdot \frac{(n-k_i)!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_{l-1}!} =$$
$$= \frac{n!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_{l-1}!\cdot k_l!} = \binom{n}{k_1,\ldots,k_l}$$

1.11 Věta

Pro libovolné $n, k \in N$ v okruhu $Z[x_1, \ldots, x_l]$ polynomů l proměnných nad Z platí

$$(x_1 + \ldots + x_l)^n = \sum \binom{n}{k_1,\ldots,k_l}(x_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot x_l^{k_l})$$

kde suma jde přes všechny l-tice $(k_1, \ldots, k_l) \in N_0^l$ splňující $k_1 + \ldots + k_l = n$.

Důkaz:

Analogicky jako důkaz Věty 1.7 s použitím Tvrzení 1.10.

1.12 Důsledek

Pro libovolné $n \in N_0$ a $l \in N$ platí

$$\sum \binom{n}{k_1,\ldots,k_l} = l^n,$$

kde suma jde přes všechny l-tice $(k_1, \ldots, k_l) \in N_0^l$ splňující $k_1 + \ldots + k_l = n$.

Důkaz:

Pro $n = 0$ zřejmé a pro $n \in N$ plyne z Věty 1.11 dosazením 1 za všechny proměnné $x_1, \ldots, x_l$.

1.13 Tvrzení

Nechť $k_1, \dots, k_l \in N_0$ a nechť $n = k_1 + \dots + k_l$. Je-li $n \in N$ pak platí:

$$\binom{n}{k_1, \dots, k_l} = \sum \binom{n-1}{k_1, \dots, k_{j-1}, k_j - 1, k_{j+1}, \dots, k_l}$$

kde suma jde přes všechna $j = 1, \dots, l$ taková, že $k_j \in N$.

Poznámka:

Jedná se o částečné zobecnění rekurentní formule v Tvrzení 1.1.(2)

Důkaz:

Přímým výpočtem:

$$\sum \binom{n-1}{k_1, \dots, k_{j-1}, k_j - 1, k_{j+1}, \dots, k_l} = \sum \frac{(n-1)!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_{j-1}! \cdot (k_j - 1)! \cdot k_{j+1}! \cdot \ldots \cdot k_l!} =$$

$$= \sum \frac{k_j \cdot (n-1)!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_j! \cdot \ldots \cdot k_l!} = \frac{(n-1)!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_l!} \cdot \sum k_j = \frac{(n-1)!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_l!} \cdot (\overbrace{k_1 + \ldots + k_l}^{n}) =$$

$$= \binom{n}{k_1, \dots, k_l},$$

neboť přidáním nulových sčítanců se součet nezmění.

2 Princip inkluze a exkluze

Dokážeme nejprve zobecnění Důsledku 1.9. Bude se týkat systému čísel indexovaných konečnými podmnožinami $M \subseteq S$ nějaké množiny S.

2.1 Věta

Buď S libovolná množina. Nechť $\{a_M \mid M \subseteq S, |M| < \infty\}$, $\{b_M \mid M \subseteq S, |M| < \infty\}$, jsou dva systémy reálných čísel. Pak

$$b_M = \sum_{L \subseteq M} a_L \textit{ pro } M \subseteq S, |M| < \infty \iff a_M = \sum_{L \subseteq M} (-1)^{|M-L|} b_L \textit{ pro } M \subseteq S, |M| < \infty$$

Důkaz:

Nechť platí první vztah pro všechny konečné podmnožiny $M \subseteq S$. Pak do sumy v druhém vztahu lze dosadit z prvního vztahu, čímž vychází:

$$\sum_{L \subseteq M} (-1)^{|M-L|} b_L = \sum_{L \subseteq M} (-1)^{|M-L|} \cdot (\sum_{H \subseteq L} a_H) = \sum_{L \subseteq M} \sum_{H \subseteq L} (-1)^{|M-L|} a_H =$$

$$= \sum_{H \subseteq M} \sum_{H \subseteq L \subseteq M} (-1)^{|M-L|} . a_H = \sum_{H \subseteq M} a_H \sum_{H \subseteq L \subseteq M} (-1)^{|M-L|} =$$

$$= \sum_{H \subseteq M} a_H \cdot \left(\sum_{|H| \leq l \leq |M|} (-1)^{|M|-l} \cdot \binom{|M-H|}{l - |H|} \right) =$$

$$= \sum_{H \subseteq M} a_H \left(\sum_{k=0}^{|M-H|} (-1)^{|M-H|-k} \binom{|M-H|}{k} \right) =$$

$$= \sum_{H\subseteq M} a_H \cdot (-1)^{|M-H|} \left(\sum_{k=0}^{|M-H|} (-1)^k \binom{|M-H|}{k} \right) = a_M$$

Neboť podle Důsledku 1.8.(2) je poslední suma v závorkách nenulová jen pro $H = M$. Tím jsme dostali druhý vztah pro všechny konečné podmnožiny $M \subseteq S$. Dosazením 2.vztahu do 1. vztahu dostaneme to co potřebujeme.

Poznámka:

Důsledek 1.9 plyne z Věty 2.1 následovně:

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Buď S spočetná množina. Dále definujme systémy reálných čísel

$$\{a_M \mid M \subseteq S, |M| < \infty\}, \qquad \{b_M \mid M \subseteq S, |M| < \infty\}$$

takto: $a_M = (-1)^{|M|}.a_{|M|}$, $b_M = b_{|M|}$ pro $M \subseteq S$, $|M| < \infty$. Pak prvky ve Větě 2.1 přejdou pomocí Tvrzení 1.5 ve formule v Důsledku 1.9.

Použitím Věty 2.1. ve speciální aplikaci dostaneme následující:

2.2 Důsledek — Princip inkluze a exkluze

Buď Q konečná množina. Nechť $\{A_i \mid i \in I\}$ je konečný systém podmnožin množiny Q, tj. $|I| < \infty$ a $A_i \subseteq Q$ pro $i \in I$. Položíme $\overline{A_i} = Q - A_i$ pro $i \in I$. pak pro libovolnou podmnožinu $J \subseteq I$ platí:

$$|\bigcap_{i\in J} A_i \cap \bigcap_{i\in I-J} \overline{A_i}| = \sum_{J\subseteq K\subseteq I} (-1)^{|K-J|} |\bigcap_{i\in K} A_i|$$

Poznámka:

Dodejme pro určitost, že $\bigcap\limits_{I\in\emptyset} A_i = Q$.

Důkaz:

Je evidentní, že pro libovolnou podmnožinu $J \subseteq I$ platí $\bigcap\limits_{i\in J} A_i = \bigcup\limits_{J\subseteq K\subseteq I} (\bigcap\limits_{i\in K} A_i \cap \bigcap\limits_{i\in I-K} \overline{A_i})$
Kde průnik vlevo je disjunktní sjednocení množin.

Pokud $|\bigcap\limits_{i\in J} A_i| = \sum\limits_{J\subseteq K\subseteq I} |\bigcap\limits_{i\in K} A_i \cap \bigcap\limits_{i\in I-K} \overline{A_i}|$.

Definujme nyní systém čísel $\{a_J \mid J \subseteq I\}$, $\{b_J \mid J \subseteq I\}$ takto:
$a_J = |\bigcap\limits_{i\in I-J} A_i \cap \bigcap\limits_{i\in J} \overline{A_i}|$, $b_J = |\bigcap\limits_{i\in I-J} A_i|$ pro $J \subseteq I$.

Pak tento předchozí vztah lze přepsat jako formuli $b_{I-J} = \sum\limits_{J\subseteq K\subseteq I} a_{I-K}$ pro všechna $J \subseteq I$. Položíme $M = I - J$, $L = I - K$ pak $J \subseteq K \Leftrightarrow L \subseteq M$.

Podle Věty 2.1. pak platí také inverzní formule a

$$a_M = \sum_{L\subseteq M} (-1)^{|M-L|} b_L \quad \text{pro všechna } M \subseteq I$$

neboli

$$a_{I-J} = \sum_{J\subseteq K\subseteq I} (-1)^{|K-J|} b_{I-K} \quad \text{pro všechna } J \subseteq I$$

Což přepsáno nazpět dá dokazovaný vztah.

Nejčastější interpretace:

Dána konečná množina Q objektů, které mohou mít konečně mnoho vlastností v_i, $i \in I$. Označme A_i množinu všech objektů z Q nějaké vlastnosti v_i, pro $i \in I$. Potom vztah v Důsledku 2.2 udává pro danou podmnožinu $J \subseteq I$ počet těch objektů, které mají právě vlastnosti v_i pro $i \in J$. Tento vztah a jeho následující důsledky bývají označován jako Princip inkluze a exkluze.

2.3 Důsledek

Vztah pro počet objektů nemající žádnou z uvedených vlastností.
Buď Q konečná množina. Nechť $\{A_i | i \in I\}$ je konečný systém podmnožin v Q. Označíme $A(0) = \bigcap_{i \in I} (Q - A_i) = Q - \bigcup_{i \in I} A_i$.

Pak platí:

$$|A(0)| = \sum_{K \subseteq I} (-1)^{|K|} |\bigcap_{i \in K} A_i|, \ kde \ \bigcap_{i \in \emptyset} A_i = Q$$

Důkaz:

Okamžitě z Důsledku 2.2 pro $J = \emptyset$.

Poznámka:

Důsledek 2.3. je jenom jinou formulací skutečnosti, že pro libovolný konečný systém množin $\{A_i \mid i \in I\}$ konečných množin platí

$$|\bigcup_{i \in I} A_i| = \sum_{\emptyset \neq K \subseteq I} (-1)^{|K|-1} . |\bigcap_{i \in K} A_i| =$$

$$\sum_{i \in I} |A_i| - \sum_{\{i,j\} \subseteq I \ \wedge i \neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{\{i,j,k\} \subseteq I \ \wedge i \neq j \neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{|I|-1} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

2.4 Důsledek

Vztah pro počet objektů určujících právě r vlastností $0 \leq r \leq |I|$
Buď Q konečná množina. Nechť $\{A_i \mid i \in I\}$ je konečný systém podmnožin v Q. Pro libovolné $r \in N_0$, $0 \leq r \leq |I|$ označíme $A(r) = \bigcup_{J \subseteq I, |J|=r} (\bigcap_{i \in j} A_i \cap \bigcap_{i \in I-J} \overline{A_i})$.

Pak platí:

$$|A(r)| = \sum_{\substack{K \subseteq I \\ r \leq |K|}} (-1)^{|K|-r} \binom{|K|}{r} . |(\bigcap_{i \in K} A_i|$$

Důkaz:

S použitím Důsledku 2.2. platí:

$$|A(r)| = \sum_{\substack{J \subseteq I \\ |I|=r}} |\bigcap_{i \in I} A_i \cap \bigcap_{i \in I-J} \overline{A_i}| = \sum_{\substack{J \subseteq I \\ |J|=r}} \sum_{J \subseteq K \subseteq I} (-1)^{|K-J|} |\bigcap_{i \in K} A_i| =$$

$$\sum_{\substack{K \subseteq I \\ r \leq |K|}} \sum_{\substack{J \subseteq K \\ |J|=r}} (-1)^{|K-J|} |\bigcap_{i \in K} A_i| = \sum_{\substack{K \subseteq I \\ r \leq |K|}} \binom{|K|}{r} (-1)^{|K|-r} |\bigcap_{i \in K} A_i|$$

Příklad:

Mějme $n \in N_0$. Určete počet všech permutací σ množiny $\{1, \ldots, n\}$, které nemají žádný pevný bod, tj. takový, že $\sigma(i) \neq i$, pro $i = 1, \ldots, n$.

Řešení:

Označíme S_n množinu všech permutací množiny $\{1, \ldots, n\}$. Definujme podmnožiny $\{A_1, \ldots A_n\}$ permutací z S_n takto:

$A_i = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}$ pro $i = 1, \ldots n$. Pak v označení z Důsledku 2.3 je $A(0)$ právě množina všech permutací z S_n, které nemají žádný pevný bod. Vztah pro počet prvků množiny $A(0)$ lze přepsat případně takto:

$|A(0)| = |S_n| - \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i| + \sum\limits_{i<j} |A_i \cap A_j| - \sum\limits_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^t \sum\limits_{i_1<\ldots<i_t} |A_i \cap \ldots \cap A_{i_t}| + \ldots + (-1)^n |A_1 \cap \ldots \cap A_n|$.

Přitom pro libovolné $t = 0, \ldots, n$ a pro libovolné $i_1 < \ldots i_t$ podle Důsledku 1.3 platí:

$$|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_t}| = (n-t)!$$

přičemž takových sčítanců podle tvrzení 1.5. budu moci vytvořit $\binom{n}{t}$. Takže celkem vychází:

$|A(0)| = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \ldots + (-1)^t \binom{n}{t}(n-t)! + \ldots + (-1)^n.1 = \underbrace{n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^t}{t!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)}_{\text{konverguje k } \frac{1}{e} \text{ pro } n\to\infty}$

Obecnější úlohou by bylo určit počet všech permutací z S_n majících právě r pevných bodů. V označení z Důsledku 2.4. to znamená určit počet všech prvků z množiny $A(r)$. Propočtením příslušného vztahu postupně dostaneme

$$|A(r)| = \sum_{t=r}^{n} (-1)^{t-r} \binom{n}{t} . \binom{t}{r} .(n-t)! = \frac{n!}{r!} \sum_{t=r}^{n} (-1)^{t-r} \cdot \frac{1}{(t-r)!} =$$
$$\frac{n!}{r!} \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!}\right)$$

3 Möbiova inverzní formule

Möbiova funkce je pro libovolné $n \in N$ definována následovně:

- $\mu(1) = 1$
- $\mu(p_1 \cdot \ldots \cdot p_k) = (-1)^k$ pro $k \in N$ a libovolná vzájemně různá prvočísla $p_1, \ldots, p_k$.
- $\mu(q^2.r) = 0$ pro libovolná $q, r \in N, q > 1$.

3.1 Lemma

Pro libovolné $n \in N$ platí:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1; \text{ pro } n = 1 \\ 0; \text{ pro } n > 1 \end{cases},$$

kde suma jde přes všechny dělitele $d \in N$ čísla n.

Důkaz:

Pro $n = 1$ zřejmé. Nechť $n > 1$. Pak n lze jednoduchým způsobem zapsat ve tvaru součinu $n = p_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\varepsilon_k}$, kde $k \in N$, $p_1, \ldots, p_k$ jsou vzájemně různá prvočísla a $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in N$ Položme $n^\star = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$.

Pak z definice funkce μ plyne, že $\sum\limits_{d|n} \mu(d) = \sum\limits_{d|n^\star} \mu(d) = \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{k}{i}(-1)^i = 0$.

Podle Důsledku 1.8.(2)

3.2 Věta

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$; $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti náhodných reálných čísel. Pak

$$b_n = \sum_{d|n} a_d \textit{ pro } \forall n \in N \Longleftrightarrow a_n = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) b_d \textit{ pro } \forall n \in N$$

__Důkaz:__

Nechť platí prvotní vztah pro všechna $n \in N$. Pak do sumy v druhém vztahu můžeme dosadit z prvního vztahu, čímž dostaneme
$\sum\limits_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) b_d = \sum\limits_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) (\sum\limits_{c|d} a_c) = \dots$ položíme $e = \frac{n}{d}$, pak $d = \frac{n}{e}$; $(c|\frac{n}{e} \Leftrightarrow ce|n \Leftrightarrow e|\frac{n}{c})$

$\dots = \sum\limits_{e|n} \mu(e) \cdot \sum\limits_{c|\frac{n}{e}} a_c) = \sum\limits_{c|n} \sum\limits_{e|\frac{n}{c}} \mu(e) a_c = \sum\limits_{c|n} a_c \left(\sum\limits_{e|\frac{n}{c}} \mu(e) \right) = a_n$

neboť poslední suma v závorkách j nenulová jen pro $c = n$, podle Lematu 3.1. Tím jsme dostali druhý vztah pro všechna $n \in N$. Analogicky dosazením druhého vztahu do sumy v prvním vztahu dostaneme první vztah.

Jednou z aplikací je snadné odvození vztahů pro Eulerovu funkci.

__Definice:__

Eulerova funkce: φ je pro libovolné $n \in N$ definována vztahem

$$\varphi(n) = |\{k \in N \mid k \leq n, (k, n) = 1\}|,$$

kde (k, n) je největší společný dělitel čísel k, n.

3.3 Lemma

Pro libovolné $n \in N$ platí:

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

__Důkaz:__

Ukážeme, že předpisem $(d, c) \mapsto \frac{n}{d} \cdot e$ je definována bijekce mezi množinami

$$\{(d, c) \mid d|c \in N, d|n, c \leq d, (c, d) = 1\} \to \{e \in N \mid e \leq n\}$$

Lemma pak vyjadřuje rovnost počtu prvků těchto množin. Uvedeným předpisem je skutečně definováno zobrazení mezi těmito množinami.

Toto zobrazení je surjektivní, neboť každé $e \in N$ splňující $e \leq n$ lze psát ve tvaru $e = b.c$, kde $b = (e, n)$, $c = \frac{e}{b}$, takže položíme-li $d = \frac{n}{b}$ máme $e = \frac{n}{d} \cdot c$, přičemž jistě $d|n$, $c \leq d$, $(c, d) = 1$.

Toto zobrazení je současně také prosté, neboť při těchto podmínkách nutně $\frac{n}{d} = (e, n)$ takže takový rozklad e je jedinečný.
$e = \frac{n}{d} \cdot c, (c, d) = 1$.

3.4 Tvrzení

Pro libovolné $n \in N$ platí

$$\varphi(n) = n. \prod_{i=1}^{k} (1 - \frac{1}{p_i}),$$

kde $p_1, \dots, p_k$ jsou všechna vzájemně různá prvočísla, která dělí n.

__Poznámka:__

Pro $n = 1$ součin napravo zmizí.

Důkaz:

Definujeme-li posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ předpisy $a_n = \varphi(n)$, $b_n = n$ pro všechna $n \in N$, stane se vztah v Lematu 3.3 první z funkcí ve Větě 3.2. Podle této věty platí ovšem i druhá formule, která zde dostane tvar

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) \cdot d$$

Položíme-li zde $c = \frac{n}{d}$ dostaneme

$$\varphi(n) = \sum_{c|d} \mu(c) \frac{n}{c}$$

Položíme-li dále stejně jako v Důsledku Lematu 3.1. $n^\star = p_1, \ldots, p_k$.

Z definice funkce plyne $\varphi(n) = \sum\limits_{c|n^\star} \mu(n) \cdot \frac{n}{c}$, což rozepsáno podrobněji dává:

$$\varphi(n) = n - \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{n}{p_i . p_j} - \sum_{i<j<l} \frac{n}{p_i . p_j . p_l} + \ldots + (-1)^t \cdot \sum_{i_1 < \ldots < i_t} \frac{n}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_t} + \ldots + (-1)^k \frac{n}{p_1 \cdot \ldots \cdot p_k}$$

Což je právě dokázaný vztah po roznásobení.

4 Vytvořující funkce, generující funkce

Označme $R[x]$ algebru formálně mocninných řad nad R, x nechť je proměnná. Jejími prvky jsou všechny posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ reálných čísel, které zapisujeme formálně jako mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Tedy $R[x]$ obsahuje okruh polynomů $R[x]$ a operace lze přímo rozšířit na celé $R[x]$ týmiž předpisy:

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) + (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad \text{kde } c_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_{n-i}$$

Tím se z $R[x]$ stává okruh.

Pro tyto mocninné řady lze formálně definovat rovněž derivaci

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Na mocninnou řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ lze ovšem také pohlížet jako na řadu reálných funkcí. Z matematické analýzy víme, že její poloměr konvergence je roven $r = \frac{1}{n}$, kde $n = \lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{|a_n|}$; $(\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0)$

Je-li $n > 0$, pak na intervalu $(-r, r)$, je tato řada absolutně konvergentní, a její součet $a(x)$ je funkce, která má všechny derivace. Pak píšeme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a(x)$.

Také víme, že pak uvnitř konvergentních intervalů

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) + (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = a(x) + b(x)$$

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = a(x) \cdot b(x)$$

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = a'(x),$$

kde nalevo vystupují výše definované formální operace na mocninných řadách, zatímco vpravo jsou obvyklé sčítání, násobení a derivace příslušných reálných funkcí. Derivovaná řada má stejný poloměr konvergence jako řada původní.

Souvislost mezi pojetím algebry a analýzy. Víme-li, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má poloměr konvergence $r > 0$, pak je plně určena podle součtu $a(x)$ na intervalu $(-r, r)$ neboť $a_n = \frac{a^{(n)}.(0)}{n!}$ pro $n \in N_0$, podle uvedených poznámek o derivacích.

Z analýzy víme například, že platí:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ pro\ x \in R$$

$$log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n},\ kde\ x \in (-1, 1>$$

4.1 Tvrzení

Pro libovolné $r \in R$ a libovolné $x \in (-1, 1)$ platí

$$(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[r]_n}{n!} x^n$$

Definice:

Vytvářející funkci posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ reálných čísel rozumíme formální mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

případně její součet $a(x)$, má-li tato řada $r > 0$.

Exponenciální vytvářející funkci posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ reálných čísel rozumíme vytvářející funkci posloupnosti

$$\{\frac{a_n}{n!}\}_{n=0}^{\infty}$$

t.j. formální mocninnou řadu,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n,$$

případně její součet $a(x)$. Všimněte si, že pak $a_n = a^{(n)}(0)$ pro $n_0 \in N_0$.

Příklad:

Ve tvrzení 4.1. jsme viděli, že pro libovolné $r \in R$ je funkce $(1+x)^r$ vytvořující funkcí posloupnosti $\{(\binom{r}{n})\}_{n=0}^{\infty}$ a současně exponenciální vytvářející funkcí posloupnosti $\{[r]_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Vandenmondeova konvoluční formule:

4.2 Tvrzení

Pro libovolné $p, q \in R$ a $m \in N_0$ platí

$$\binom{p+q}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{p}{k} \binom{q}{m-k}$$

Důkaz:

Ve vztahu $(1+x)^{p+q} = (1+x)^p \cdot (1+x)^q$ rozvedeme všechny závorky podle Tvrzení 4.1.

$$(1+x)^{p+q} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{p+q}{m} x^m$$
$$(1+x)^p = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{p}{j} x^j$$
$$(1+x)^q = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{q}{j} x^j,$$

poslední dva rozvoje vynásobíme na

$(1+x)^p.(1+x)^q = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{p}{j} x^j . \sum_{j=0}^{\infty} \binom{q}{j} x^j = \sum_{m=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{m} \binom{p}{k} \binom{q}{m-k}) x^m$

Nyní zbývá porovnat koeficienty u x^m u uvedených řad.

Příklad:

Nechť $y_1, \ldots, y_n$ pro $n \in N$ jsou prvky nějaké pologrupy, takže je definován jejich součin $y_1 \cdot \ldots \cdot y_n$. Kolika způsoby je možno tento součin uzávorkovat tak, aby postup násobení tím byl jednoznačně určen?

Označme a_n hledaný počet těchto uzávorkování pro $n \in N$. Je jasné, že $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2$. Klademe dále $a_0 = 0$. Pro libovolné $n > 1$ lze provést $n-1$ způsoby:

$$y_1 \cdot (y_2 \cdot \ldots \cdot y_n)$$
$$\vdots$$
$$(y_1 \cdot \ldots \cdot y_k) \cdot (y_{k+1} \cdot \ldots \cdot y_n)$$
$$\vdots$$
$$(y_1 \cdot \ldots \cdot y_{n-1}) \cdot y_n$$

Přitom pro dané k lze prvních k prvků nahrazovat a_k způsoby a posledních $n-k$ prvků a_{n-k} způsoby. Celkem to dává, že

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot a_{n-k};\ pro\ n > 1$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je tedy řešením této rekurentní formule při výše uvedených hodnotách.

Vezměme vytvořující funkci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ této posloupnosti. Doufejme, že tato posloupnost bude mít hledaný poloměr konvergence a označíme $a(x)$ její součet. Poněvadž $a_0 = 0$, rekurentní funkce říká, že pro $n > 1$ je koeficient u x^n v součinu řad $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)$ roven a_n. Koeficient u x v tomto součinu je roven $a_0 \cdot a_1 + a_1 \cdot a_0$, zatímco $a_1 = 1$. Absolutní člen je roven $a_0.a_0 = 0 \Longrightarrow a_0 = 0$.

To celkem dává

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)^2 = -x + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
$$(a(x))^2 = -x + a(x)$$

Řešením této kvadratické rovnice pro $a(x)$ jsou funkce $a(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$

Ale poněvadž $a(0) = a_0 = 0$, můžeme vzít pouze

$$a(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$$

Přitom rozvoj této funkce do mocninné řady konverguje pro $x \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Poněvadž tato funkce splňuje danou kvadratickou funkci, vyhovují koeficienty jejího rozvoje stanovené rekurentní formuli. Navíc počáteční koeficienty jsou:

$$a(0) = 0, \quad \frac{a'(0)}{1!} = (\frac{1}{\sqrt{1-4x}})_{x=0} = 1$$

takže koeficienty rozvoje nalezené funkce $a(x)$ jsou skutečně řešením naší úlohy. Jsme schopní je vypočítat pomocí Tvrzení 1.4:

$$a(x) = \frac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1 - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n}{2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n-1} \cdot 2^{2n-1} \frac{[\frac{1}{2}]_n}{n!}}_{\text{hledaný koeficient } a_n} \cdot x^n$$

takže úpravou obdržíme

$$a_n = (-1)^{n-1} \cdot 2^{2n-1} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (\frac{3}{2}) \cdot \ldots \cdot (\frac{3-2n}{2})}{n!} = 2^{n-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3).(2n-1)}{(2n-1) \cdot n!} =$$

$$\frac{(2n)!}{2.(2n-1).(n!)^2} = \frac{(2n-2)!}{n.((n-1)!)^2}$$

čili

$$a_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} \text{ pro všechna } n \in N$$

5 Lineární rekurentní formule

Definice:

Buď $R[x]$ algebra formálních mocninných řad nad R. Pro libovolnou řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ v $R[x]$, v níž $a_0 \neq 0$, existuje řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ taková, že $(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \cdot (\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = 1$, tzn. taková řada, je jednotkou okruhu $R[x]$.
Skutečně uvedená podmínka žádá, aby

$$a_0.b_0 = 1, a_0.b_1 + a_1.b_0 = 0, \ldots$$

$$a_0.b_n + \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i} = 0 \text{ pro } n \in N,$$

což poněvadž $a_0 \neq 0$ je možné splnit - potřebné koeficienty b_n pro $n \in N_0$ je odtud postupně možno vypočítat.

Tento fakt zejména znamená, že pro libovolný polynom z $R[x]$ s nenulovým absolutním členem, existuje mocninná řada v $R[x]$, která je k němu inverzním prvkem. Takto je možné zapsat například racionální lomené funkce, tj. zlomky $\frac{f}{g}$, kde f, $g \in R[x]$, g s nenulovým absolutním členem chápat jako formální mocninné řady.

Fakta o rozkladech racionálních lomených funkcí na parciální zlomky:

Nechť f, $g \in R[x]$, $g \neq 0$. Nechť $g = h_1 \cdot \ldots \cdot h_m$, kde $m \in N$ a $h_1, \ldots, h_m \in R[x]$ jsou vzájemně nesoudělné polynomy. Pak existují $c, d_1, \ldots, d_m \in R[x]$ splňující $st(d_1) < st(h_1), \ldots, st(d_m) < st(h_m)$ takové, že $\frac{f}{g} = c + \frac{d_1}{h_1} + \ldots + \frac{d_m}{h_m}$.

Tyto $c, d_1, \ldots, d_m$ jsou určeny jednoznačně. Je-li $st(f) < st(g)$, pak $c = 0$. Tento fakt je zobecněním Bezoutovy věty pro polynomy a lze ho dokázat indukcí vzhledem k m.

Jsou-li všichni činitelé v rozkladu $g = h_1 \cdot \ldots \cdot h_m$ tvaru $(x-r)^k$ pro nějaká $r \in R$ a $k \in N$, je možno pak jít ještě dál. (Uvažujme C místo R)

Pak pro libovolný polynom $d \in R[x]$ splňující $st(d) < k$ existují jednoznačně určená $s_1, \ldots, s_k \in R$ taková, že $\frac{d}{(x-r)^k} = \frac{s_1}{(x-r)} + \frac{s_2}{(x-r)^2} + \ldots + \frac{s_k}{(x-r)^k}$

K tomu stačí provést rozvoj d se středem v r.

Nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ reálných čísel vyhovuje podmínce

$$a_{n+k} = q_1 a_{n+k-1} + q_2 a_{n+k-2} + \ldots + q_k a_n$$

pro $\forall n \in N_0, k \in N$ a $q_1, \ldots q_k$ jsou reálné konstanty, $q_k \neq 0$. Tato podmínka se nazývá lineární rekurentní formule k-tého řádu s konstantními koeficienty. Cílem je najít všechna řešení, tj. všechny posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ vyhovující této formuli.

Je jich nekonečno, neboť tvoří vektorový prostor dimenze k nad R. Později budeme muset přejít nad C.

Jestliže hodnoty prvních k-členů jsou předem pevně určeny, tomu se říká počáteční podmínky. Mají-li být splněny tzv. počáteční podmínky:

$$a_0 = \alpha_0, a_1 = \alpha_1, \ldots, a_{k-1} = \alpha_{k-1}$$

kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ jsou dané reálné hodnoty, pak je tím řešení $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ určeno jednoznačně. Je-li známá báze vektorového prostoru všech řešení, pak toto konkrétní řešení je její lineární kombinací. Příslušné koeficienty se určí z počátečních podmínek řešením soustavy lineárních rovnic.

Chceme tedy najít bázi vektorového prostoru všech řešení dané rekurentní formule. K této formuli definujeme její tzv. charakteristický polynom. $h(x) = x^k - q_1 x^{k-1} - q_2 x^{k-2} - \ldots - q_k$

Tento polynom lze nad C rozložit na součin lineárních polynomů

$$h(x) = (x - r_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (x - r_t)^{l_t}, \text{ kde } t \in N,\ l_1, \ldots, l_t \in N,\ l_1 + \ldots + l_t = k,\ r_1, \ldots, r_t \in C$$

vzájemně různá, $r_1 \cdot \ldots \cdot r_t \neq 0$ neboť $q_k \neq 0$.

Položíme-li dále

$$g(x) = x^k . h(\frac{1}{x}) = 1 - q_1 x - q_2 x^2 - \ldots - q_k x^k$$

Pak rozklad $h(x)$ přijde na rozklad $g(x)$:

$$g(x) = (1 - r_1 x)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (1 - r_t x)^{l_t}$$

Označíme $a(x)$ vytvářející funkci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Vidíme, že rekurentní formule říká přesně to, že v součinu $a(x).g(x)$ jsou všechny koeficienty u x^l pro všechna $l \geq k$ rovny 0, neboť daný koeficient je roven $a_l - q_1.a_{l-1} - q_2.a_{l-2} - \ldots - q_k.a_{l-k} = 0$ což znamená, že existuje polynom $f(x) \in R[x]$ stupně menšího než k, takový, že

$$a(x).g(x) = f(x), \text{ čili } a(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

neboť $g(x)$ je polynom s konstantním členem 1, takže jím lze dělit v algebře formálních mocninných řad $R[x]$. Ukážeme, jak lze zlomek vpravo rozvinout v řadu.

Vzhledem k předchozímu rozkladu $g(x)$ na součin lineárních faktorů nad C, víme podle výsledků o rozkladu na parciální zlomky, že existuje

$$s_{11}, \ldots, s_{1l_1}, \ldots, s_{t1}, \ldots s_{tl_t} \in C$$

takové, že

$$a(x) = \frac{s_{11}}{1 - r_1 x} + \ldots + \frac{s_{1l_1}}{(1 - r_1 x)^{l_1}} + \ldots + \frac{s_{t1}}{(1 - r_t x)} + \ldots + \frac{s_{tl_t}}{(1 - r_t x)^{l_t}}$$

Podle sčítanců je $l_1+\ldots+l_t=k$. Vytvářející funkce libovolného řešení rekurentní formule je tedy lineární kombinací zlomků tvaru

$$\frac{1}{(1-rx)^e},$$

kde $\underline{r}=\underline{r_i}$ pro nějaká $i=1,\ldots,t$ a $e\in\{1,\ldots,l_i\}$. Takový zlomek lze rozvinout do následující mocninné řady. Poněvadž zřejmě:

$$(1-rx)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(rx)^n$$

dostáváme

$$(1-rx)^{-e}=\left((1-rx)^{-1}\right)^e=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(rx)^n\right)^e$$

Podle definice kombinací s opakováním z Kapitoly 1. a podle Tvrzení 1.6. tedy vychází

$$(1-rx)^{-e}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{e+n-1}{n}(rx)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+e-1}{e-1}r^nx^n=\frac{1}{(e-1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}[n+e-1]_{e-1}r^nx^n$$

Vytvořující funkce všech řešení rekurentní formule jsou tedy lineární kombinací takovýchto $\sum_{n=0}^{\infty}[n+e-1]_{e-1}r^n$ mocninných řad. Protože těchto řad je k a podprostor všech řešení má dimenzi k, musí jít o všechny možné lineární kombinace. Uvědomíme-li si přitom, že $[n+e-1]_{e-1}$ jsou polynomy v n-tých stupňů $e-1$ pro všechny uvedená e, vidíme, že je lze nahradit jednoduššími polynomy n^{e-1}. Čili vytvořující funkce řešení rekurentní formule jsou právě všechny lineární kombinace řad tvaru $\sum_{n=0}^{\infty}n^{e-1}r^nx^n$, kde $r=r_i$, $i=1,\ldots,t$ a $e\in\{1,\ldots,l_i\}$. Řešení rekurentní formule jsou odpovídající lineární kombinace posloupností koeficientů $\{n^{e-1}r^n\}_{n=0}^{\infty}$.

Tyto závěry lze formulovat jako:

5.1 Věta

Nechť je dána lineárně rekurentní formule s konstantními koeficienty. Nechť $r_1,\ldots,r_t$ jsou všechny vzájemně různé kořeny jejího charakteristického polynomu v C, nechť $e_1,\ldots,e_t$ jsou jejich násobnosti. Pak posloupnost

$$\{n^{e-1}r_i^n\}_{n=0}^{\infty} \text{ pro } i=1,\ldots,t; \quad e=1,\ldots,e_i$$

tvoří bázi vektorového prostoru všech řešení nad C této rekurentní formule. (Zde opět $0^0=1$).

Příklad:

Buď $(M,\leq)$ konstantní řetězec o $n=|M|$ prvcích. Máme určit počet a_n všech podmnožin $L\subseteq M$, které neobsahují žádné dva prvky v nichž jeden pokrývá druhý v $(M,\leq)$.

Je-li $n\geq 2$ a je-li m největší prvek v $(M,\leq)$, pak taková podmnožina L buď neobsahuje m, čili $L\subseteq M-\{m\}$, anebo obsahuje-li m, v tom případě ovšem neobsahuje prvek m' ležící v daném řetězci bezprostředně pod m takže pak $L-\{m'\}\subseteq M-\{m,m'\}$. Odvodili jsme tak, že posloupnost čísel $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ splňuje rekurentní formuli

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2};\text{ pro } n\geq 2$$

Přitom je jasné, že počáteční hodnoty jsou $a_0=1, a_1=2$ Členy této posloupnosti jsou Fibonacciho čísla.

Charakteristický polynom této rekurentní formule je x^2-x-1. Má dva reálné kořeny: $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\quad x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, takže posloupnost

$$\left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}_{n=0}^{\infty}, \left\{ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}_{n=0}^{\infty}$$

tvoří bázi vektorového prostoru všech řešení rekurentní formule. Hledaná posloupnost je jejich lineární kombinací s jistými koeficienty, pro něž z počátečních podmínek plynou rovnice

$$c_1 + c_2 = 1,$$
$$c_1 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 2,$$

jejíž řešením je

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2, \qquad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2$$

Takže dostáváme

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right) \text{ pro } n \in N_0$$

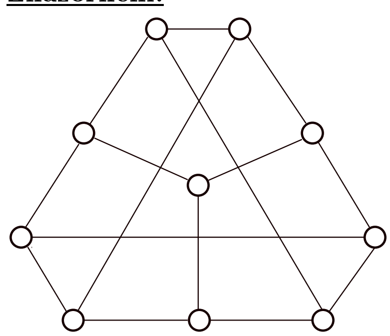
6 Grafy

Definice:

Pro libovolnou množinu M a libovolné $k \in N_0$ značíme $\binom{M}{k}$ množinu všech k-prvkových podmnožin množiny M a $\triangle_M$ diagonální relaci (identitu) na M.

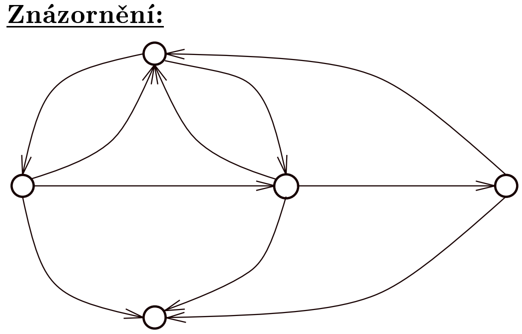
Obyčejný (netriviální) graf $G = (V, E)$ se skládá z konečné neprázdné množiny vrcholů V (někdy také uzlů) a nějaké podmnožiny $E \subseteq \binom{V}{2}$ hran.

Znázornění:

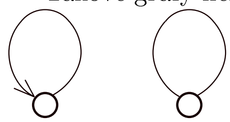


Obyčejný orientovaný graf $G = (V, E)$ se skládá z konečné množiny V vrcholů a nějaké podmnožiny $E \subseteq V \times V - \triangle_V$ orientovaných hran.

Znázornění:

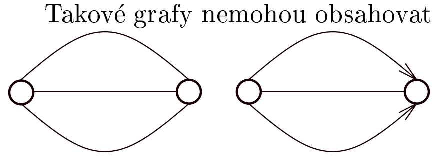


Takové grafy nemohou obsahovat smyčky.



Tomu lze odpomoci tím, že v definici grafů klademe obecněji $E \subseteq \binom{V}{1} \cup \binom{V}{2}$, tím vzniká neorientovaný graf, anebo $E \subseteq V \times V$, čímž dostaneme orientovaný graf.

Takové grafy nemohou obsahovat ani násobné hrany.



Toho lze dosáhnout za cenu komplikovanějších definic.

(Neorientovaný) multigraf. $G = (V, E, \psi)$ se skládá z konečné množiny $V \neq \emptyset$ vrcholů, konečné množiny hran E a zobrazení $\psi : E \to \binom{V}{1} \cup \binom{V}{2}$, nazývané zobrazení incidence.

Orientovaný multigraf $G = (V, E, \psi)$ se liší od předchozího tím, že zobrazení incidence je $\psi : E \to V \times V$. Zobrazení incidence přiřazuje hraně množinu, respektive uspořádanou dvojici jejich koncových vrcholů.

Všechny dále uvedené definice se budou týkat jen obyčejných grafů, eventuálně obyčejných orientovaných grafů. Mnohé výsledky by bylo možno při vhodném rozšíření dokázat i pro multigrafy a orientované grafy. Tam, kde to bude mít význam upozorníme.

Definice:

Buď $G = (V, E)$ obyčejný graf, případně obyčejný orientovaný graf. Graf $H = (W, F)$ se nazývá část grafu G, jestliže $W \subseteq V$ a $F \subseteq E$.

Část $H = (W, F)$ grafu G se nazývá faktor grafu, jestliže $W = V$.

Část $H = (W, F)$ grafu G se nazývá podgraf grafu G, jestliže je to jeho největší část s danou množinou vrcholů W, tj. jestliže $F = E \cap \binom{W}{2}$, případně $F = E \cap W^2$ u orientovaných grafů. Podgraf grafu je plně určen svou množinou vrcholů.

Definice:

Buď $G = (V, E)$ obyčejný graf. Pro každý vrchol $v \in V$ definujeme číslo

$$d_G(v) = |\{e \in E \mid v \in e\}|$$

nazýváme je stupeň vrcholu v v grafu G.

6.1 Tvrzení

Pro každý obyčejný graf $G = (V, E)$ platí:

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$$

Důkaz:

Každá hrana má dva vrcholy.

Definice:

Buď $G = (V, E)$ obyčejný orientovaný graf. Pro každý vrchol $v \in V$ definujeme číslo:

- $d_G^-(v) = |E \cap (\{v\} \times V)|$
- $d_G^+(v) = |E \cap (V \times \{v\})|$

nazývá se výstupní a vstupní stupeň vrcholů v G.

6.2 Tvrzení

Pro každý obyčejný orientovaný graf $G = (V, E)$ platí

$$\sum_{v \in V} d_G^-(v) = \sum_{v \in V} d_G^+(v) = |E|$$

Důkaz:

Každá hrana z jednoho vrcholu vychází a do jednoho vstupuje.

Definice:

Buď $G = (V, E)$ obyčejný graf. Posloupnost tvaru

$$v_0, \{v_0, v_1\}, v_1, \{v_1, v_2\}, v_2, \ldots, v_{l-1}, \{v_{l-1}, v_l\}, v_l,$$

kde $l \in N_0$, $v_0, v_1, \ldots, v_l \in V$, $\{v_0, v_1\}, \ldots, \{v_{l-1}, v_l\} \in E$ se nazývá sled v grafu G délky l z vrcholu v_0 do v_l.

- Jsou-li všechny hrany $\{v_0, v_1\}, \ldots, \{v_{l-1}, v_l\}$ vzájemně různé, nazývá se tah v G.
- Jsou-li všechny vrcholy $v_0, v_1, \ldots v_l$ vzájemně různé, je to cesta v G.
- Jestliže $l \in N$ a $v_0 = v_l$, pak takový sled nebo tah se nazývá uzavřený. Cesta nemůže být uzavřená.
- Máme-li uzavřený tah, v němž jsou jinak všechny vrcholy tj. $v_1 \ldots v_l$ vzájemně různé, jde o kružnici v G.

Vrcholy a hrany každého sledu v G určují jistou část v grafu G. V tomto smyslu platí:

6.3 Tvrzení

Buď $G = (V, E)$ obyčejný graf, $u, v \in V$. Pak libovolný sled v G z u do v obsahuje nějakou cestu z u do v.

Definice:

Obyčejný graf se nazývá souvislý, jestliže pro libovolné dva vrcholy u, v v G existuje sled v G z u do v.

Definice:

Buď $G = (V, E)$ obyčejný graf. Definujme na množině V relaci dosažitelnosti: $\sim_G$ předpisem:
Pro libovolné $u, v \in V$ $u \sim_G v$ právě když existuje sled v G z u do v.

Pak $\sim_G$ je ekvivalence na V. Vzniká rozklad $V/\sim_G$. Podgrafy grafu G určené jednotlivými třídami tohoto rozkladu se nazývají komponenty grafu G. Jsou to souvislé grafy a graf G sám je jejich disjunktním sjednocením.

Jestliže v definicích, které předcházely Tvrzení 6.3 uvažujeme obyčejný orientovaný graf G a nahradíme v nich všechny hrany $\{v_0, v_1\} \ldots \{v_{l-1}, v_l\}$ orientovanými hranami $(v_0, v_1) \ldots (v_{l-1}, v_l)$ dostaneme definici těchto pojmů: orientovaný sled, orientovaný tah, orientovaná cesta a dále uzavřený orientovaný sled nebo tah a cyklus.

7 Stromy

7.1 Věta

Pro libovolný obyčejný graf $G = (V, E)$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

1. pro libovolné dva vrcholy $u, v \in V$ existuje jediná cesta v G z u do v.
2. graf G je souvislý a neobsahuje žádnou kružnici.
3. graf G je souvislý a $|V| = |E| + 1$

Důkaz:

1. $\Rightarrow$ 2.
   Existence cest zaručuje souvislost grafu G a jejich jednoznačnost vylučuje přítomnost kružnice v grafu G.

2. $\Rightarrow$ 3.
   Indukcí vzhledem k $|V|$.

   Pro $|V| = 1$ jasné.
   Nechť $|V| > 1$. Pak ze souvislosti grafu G plyne, že existuje nějaká hrana $\{x, y\} \in E$. Ukážeme, že pak pro část $G' = (V, E - \{\{x, y\}\})$ grafu G platí, že graf G' má právě dvě souvislé komponenty. Skutečně, kdyby G' byl souvislý graf, znamenalo by to existenci nějaké cesty v G' z x do y. Tato cesta by spolu s hranou $\{x, y\}$ vytvořila kružnici v celém grafu G. Takže graf G' není souvislý a navíc vrcholy x, y leží v různých komponentách grafu G': $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$ a $\overline{\overline{G}} = (\overline{\overline{V}}, \overline{\overline{E}})$. Máme ukázat, že $V = \overline{V} \cup \overline{\overline{V}}$. Pak pro každé z $w \in V$ uvažujme nejkratší ze všech cest v grafu G vedoucích z w do x nebo do y. Taková cesta ještě neobsahuje hranu $\{x, y\}$, jinak by ji bylo možné zkrátit takže je to cesta v G' a tedy $w \in \overline{V}$ nebo $w \in \overline{\overline{V}}$. Čili graf G' má dvě souvislé komponenty $\overline{G}$ a $\overline{\overline{G}}$, které sami zase neobsahují žádnou kružnici. Podle indukčního předpokladu tedy: $|\overline{V}| = |\overline{E}| + 1$ a $|\overline{\overline{V}}| = |\overline{\overline{E}}| + 1$. Odtud celkem

   $$|V| = |\overline{V}| + |\overline{\overline{V}}| = |\overline{E}| + 1 + |\overline{\overline{E}}| + 1 = |E| + 1, \text{ kvůli hraně } \{x, y\}$$

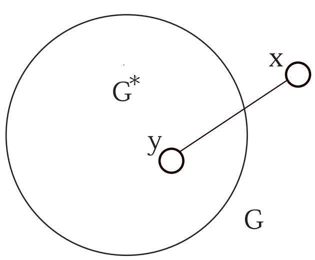
3. $\Rightarrow$ 1.
   Indukcí vzhledem k $|V|$.

   Pro $|V| = 1$ jasné.
   Nechť $|V| > 1$. Pak ze souvislosti grafu G plyne, že každý vrchol ve V má stupeň alespoň 1. Odtud porovnáním vztahu $|V| = |E| + 1$ s Tvrzením 6.1:

   $$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E| = 2|V| - 2$$

   vyplývá, že ve V musí existovat alespoň dva vrcholy stupně právě 1. Buď $x \in V$ takový vrchol, z něhož vychází jediná hrana, řekněme $\{x, y\}$. Pak graf $G^* = (V - \{x\}, E - \{\{x, y\}\})$ je jistě souvislý a navíc splňuje

   $$|V - \{x\}| = |V| - 1 = |E| = |E - \{\{x, y\}\}| + 1$$



   Podle indukčního předpokladu libovolné dva vrcholy grafu G^* jsou spojeny jedinou cestou v G^*. Lehce je vidět, že pak totéž platí i pro celý graf G.

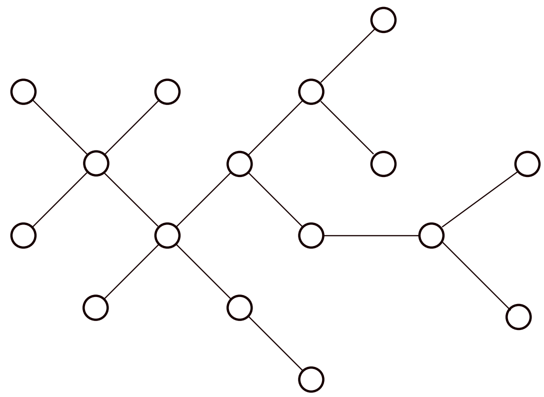
Definice:

Obyčejný graf $G = (V, E)$ splňující ekvivalentní podmínky z Věty 7.1 se nazývá strom.

Poznámka:

V důkazu jsme lehce viděli, že každý strom s $|V| > 2$ má alespoň dva vrcholy stupně jedna.

Znázornění:



Definice:

Buď $G = (V, E)$ obyčejný graf. Libovolný faktor $H = (V, F)$ grafu G, který je stromem se nazývá kostra grafu G.

7.2 Tvrzení

Libovolný souvislý obyčejný graf $G = (V, E)$ obsahuje nějakou kostru.

Důkaz:

Indukcí vzhledem k počtu kružnic v G.
Neobsahuje-li G žádnou kružnici, pak je sám kostrou. V opačném případě vezměme nějakou hranu $\{x, y\}$ ležící na nějaké kružnici grafu G a uvažme jeho část $G' = (V, E - \{\{x, y\}\})$. Graf G' zůstane zřejmě souvislý a podle indukčního předpokladu obsahuje nějakou kostru, která je i kostrou grafu G.

7.3 Důsledek

Pro libovolný souvislý obyčejný graf $G = (V, E)$ platí:

$$|V| \leq |E| + 1$$

Rovnost nastává právě tehdy, když G je strom.

Důkaz:

Buď $G = (V, E)$ strom. Pak podle Tvrzení 6.1. a Věty 7.1. platí:

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E| = 2|V| - 2, \text{ neboli } \sum_{v \in V} (d_G(v) - 1) = |V| - 2$$

Viděli jsme také, že $d_G(v) \geq 1$ pro všechna $v \in V$, pokud $|V| \geq 2$.

Ukážeme, že jsou to nejen nutné, ale i dostačující podmínky pro existenci stromu na dané množině vrcholů, jsou-li předepsány stupně těchto vrcholů. Určíme dokonce jejich počet.

7.4 Tvrzení

Buď $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ konečná množina o n prvcích, $n \geq 2$, a nechť $d_i \in N$ pro $i = 1, \ldots n$ jsou libovolná čísla splňující $\sum\limits_{i=1}^{n} (d_i - 1) = n - 2$.

Potom počet všech stromů $G = (V, E)$, tj. počet všech podmnožin $E \subseteq \binom{V}{2}$, takových že $G = (V, E)$ je strom, splňujících $d_G(v_i) = d_i$, pro $i = 1, \ldots, n$ je roven číslu

$$\binom{n-2}{d_1 - 1, \ldots, d_n - 1}$$

Důkaz:

Indukcí vzhledem k n.
Pro $n = 2$ nutně $d_1 = d_2 = 1$, existuje jediný strom a $\binom{0}{0,0} = 1$.
Nechť $n > 2$. Označme hledaný počet stromů $t(n, d_1, \ldots, d_n)$. Z podmínky pro čísla $d_1, \ldots, d_n$ plyne existence $l \in \{1, \ldots, n\}$ takového, že $d_l = 1$. Vhodným přečíslováním prvků z V lze docílit toho, že $d_n = 1$. Ukážeme, že pak platí

$$t(n, d_1, \ldots, d_n) = \sum t(n-1, d_1, \ldots, d_j - 1, \ldots, d_{n-1}),$$

kde suma napravo jde přes všechna $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, pro něž $d_j \geq 2$.

Skutečně, uvažme libovolný strom $G = (V, E)$ splňující $d_G(v_i) = d_i$ pro $i = 1, \ldots, n$. Pak $d_G(v_n) = d_n = 1$ a tedy $\{v_j, v_n\} \in E$ pro jediné $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ Pak pro ně ovšem $d_j = d_G(v_j) \geq 2$, aby byl G souvislý graf.

Pak $G_j = (V - \{v_n\}, E - \{\{v_j, v_n\}\})$ je strom s množinou vrcholů $V - \{v_n\}$ splňující

$$\begin{aligned} d_G(v_i) &= d_i & &\text{pro } i = 1, \ldots, n-1, i \neq j \\ d_{G_j}(v_j) &= d_j - 1 \end{aligned}$$

Toto j a strom G_j mohou ovšem jinak být zcela libovolné. Tím je ověřen uvedený rekurentní vztah pro $t(n, d_1, \ldots, d_n)$. Nyní stačí dosadit sčítance napravo podle indukčního předpokladu a s použitím Tvrzení 1.13.

7.5 Důsledek (Caleyho formule)

Počet všech stromů $G = (V, E)$ s danou množinou vrcholů V mající $|V| = n$ vrcholů, $|V| \geq 2$ je roven číslu n^{n-2}.

Důkaz:

Plyne okamžitě z Tvrzení 7.4 a jemu předcházejícího komentáře s použitím Důsledku 1.12.

8 Cesty a minimální kostry

Definice:

Ohodnocený neorientovaný nebo orientovaný graf $G = (V, E, q)$ se skládá z grafu (V, E) příslušného typu a nějakého zobrazení $q : E \to R$, ohodnocení jeho hran.

Problém nejkratší cesty

Definice:

Buď $G = (V, E, q)$ ohodnocený obyčejný orientovaný graf. Nechť $v_0, e_1, v_1, \ldots, e_l, v_l$, kde $v_i \in V$ a $e_i \in (v_{i-1}, v_i)$ pro $i = 1, \ldots, l$ jsou hrany z E, je nějaký orientovaný sled v G.

Potom délkou tohoto sledu rozumíme číslo $q(e_1) + \ldots + q(e_l)$.

Buď nyní $G = (V, E, q)$ nezáporně ohodnocený obyčejný orientovaný graf, tzn. že $q(e) \geq 0$ pro všechny $e \in E$. Pak pro libovolné vrcholy $u, v \in V$ pro něž existuje orientovaný sled v G z u do v v grafu G nazveme vzdálenost délkou tohoto nejkratšího sledu. Je jasné, že takovým sledem bude cesta.

Pokud takový sled neexistuje, klademe vzdálenost rovnu ∞.

Vzdálenost vrcholu od sebe sama klademe rovnu 0.

Dijkstrův algoritmus

Je dán nezáporně ohodnocený obyčejný orientovaný graf $G = (V, E, q)$ a jeho vrchol $u \in V$. Pro všechny $v \in V$ máme najít vzdálenost d_v z u do v v G.
Výpočet probíhá v jednotlivých krocích indexovaných pomocí $i = 1, 2, \ldots$. V průběhu

výpočtu seřadíme vrcholy z V do posloupnosti $v_1, v_2, \ldots$ a určíme vzdálenost d_{v_i}.
Během celého výpočtu budeme potřebovat ještě pomocnou funkci $f : V \to R \cup \{\infty\}$, která se však bude průběžně měnit.

1. Na začátku nastavíme $f(u) = 0$ a $f(\omega) = \infty$ pro všechny vrcholy $\omega \in V - \{u\}$.
2. V i-tém kroku vybereme jako v_i takový vrchol z množiny $V - \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$, na němž funkce $f(v_i)$ nabývá nejmenší hodnoty a položíme d_{v_i} rovno této hodnotě, tzn. $d_{v_i} = f(v_i)$.
   - Je-li $d_{v_i} < \infty$, potom změníme funkci f na vrcholech $\omega \in V - \{v_1, \ldots, v_i\}$, pro něž $(v_i, \omega) \in E$ a $d_{v_i} + q((v_i, \omega)) < f(\omega)$, předpisem $f(\omega) = d_{v_i} + q((v_i, \omega))$.
3. Postup z bodu 2. opakujeme až do vyčerpání množiny V.

8.1 Věta

Hodnoty d_v pro $v \in V$ vypočtené uvedeným algoritmem jsou vzdálenosti z $u \in V$ do jednotlivých $v \in V$.

Následující Lemma se lehce ověří po jednotlivých krocích uvedeného algoritmu.

Lemma

V kterémkoliv okamžiku výpočtu pro kterýkoliv vrchol $v \in V$, pro nějž $f(v) < \infty$, platí, že $f(v)$ je délka nějaké cesty v G z u do v.

Důkaz: (Věty 8.1)

Indukcí vzhledem k i.
Je jasné, že algoritmus určí $v_1 = u$ a $d_{v_1} = 0$. Uvažujme i-tý krok algoritmu pro některé $i > 1$ a předpokládejme, že pro všechna $j < i$ je $d_{v_i j}$ vzdálenost z u do v_j v G. Ukážeme, že totéž pak platí i pro d_{v_i}. Připusťme, že to není pravda. Jestliže $f(v_i) = \infty$, pak to znamená, že vzdálenost z u do v_i je konečná, čili existuje cesta z u do v_i. Jestliže $f(v_i) \in R$, pak podle Lemmatu je $f(v_i)$ délka nějaké cesty v G z u do v_i, ale nejde o nejkratší cestu. V obou případech tedy existuje nejkratší cesta v G z u do v_i a má délku menší než $f(v_i)$. Označme tuto cestu C a její délku $d(C)$. Nechť $(x, y) \in E$ je první hrana na této cestě od u taková, že $x \in \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}, y \notin \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$. Pak počáteční úsek cesty C od u do x je nejkratší cestou v G z u do x a má tudíž délku d_x podle indukčního předpokladu. Kromě toho po ukončení $i-1$ kroku nutně $f(y) \leq d_x + q((x, y))$. Hodnota vpravo je ovšem délkou počátečního úseku cesty C od u do y a nepřevýší délku $d(C)$ vzhledem k nezápornosti ohodnocení.

Dostáváme tak $f(y) \leq d(C) < f(v_i)$, což je spor s volbou vrcholu v_i v i-tém kroku.

Nalezení nejkratších cest

Máme-li k dispozici záznam výpočtu, jsme schopní pro každý vrchol najít některou nejkratší cestu z u do v, existuje-li.
Postupujeme pro $i = 1, 2, \ldots$. Nejkratší cesta v G z u do $v_1 = u$ se skládá z jediného vrcholu u.

Je-li $i > 1$, pak $d_{v_i} = f(v_i)$ v i-tém kroku výpočtu.

Jestliže $f(v_i) \in R$, pak $f(v_i)$ muselo být změněno v některém z předchozích kroků.

Nechť se to stalo naposledy v k-tém kroku. Pak $f(v_i) = d_{v_k} + q((v_k, v_i))$. To znamená, že nejkratší cesta v G z u do v_k prodloužena o hranu (v_k, v_i) a vrchol v_i dá nejkratší cestu v G z u do v_i. Jestliže $f(v_i) = \infty$, cesta neexistuje.

Problém minimální kostry

Buď $G = (V, E, q)$ ohodnocený obyčejný (neorientovaný) graf (souvislý). Pak podle Tvrzení 7.2 graf (V, E) obsahuje jistě nějakou kostru. Kostra (V, F) grafu (V, E), pro niž číslo $\sum\limits_{e \in F} q(e)$ je nejmenší, se nazývá minimální kostra grafu G.

Algoritmus minimální kostry

Je dán ohodnocený obyčejný neorientovaný souvislý graf $G = (V, E, q)$.
Máme najít některou minimální kostru grafu G.

Položme $n = |V|$. Výpočet probíhá v jednotlivých krocích, v nichž postupně konstruujeme podmnožiny $E_0 \subseteq E_1 \subseteq \ldots \subseteq E_{n-1}$ takto:

Na začátku položíme $E_0 = \emptyset$.
V i-tém kroku pro $i = 1, \ldots, n-1$ sestrojíme množinu E_i pomocí množiny E_{i-1} následovně:

Mezi všemi hranami $e \in E, e = \{x, y\}$, takovými, že vrcholy x, y leží v různých komponentách grafu (V, E_{i-1}), vybereme tu hranu e, pro niž hodnota $q(e)$ je nejmenší. Pak položíme $E_i = E_{i-1} \cup \{e\}$

Proveditelnost:

Poněvadž graf (V, E) je souvislý, graf $(V, 0)$ má n komponent a přidáním jedné hrany spojující dvě komponenty se jejich počet sníží o 1, lze všechny tyto kroky provést.

8.2 Věta

Graf (V, E_{n-1}) s množinou hran nalezenou v posledním kroku uvedeného algoritmu je minimální kostra grafu G.

Uvedený algoritmus lze přeformulovat:

Kluskalův algoritmus

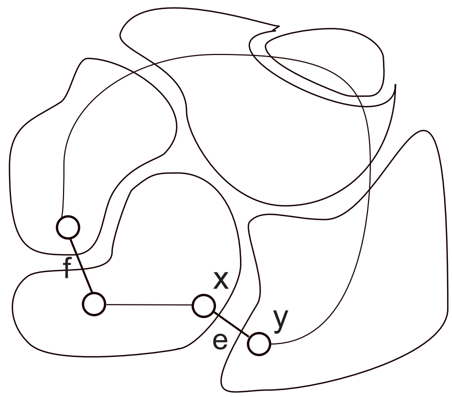
Na začátku uspořádáme hrany v E podle ohodnocení, t.j. zapíšeme $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$, kde $m = |E|$ tak, aby $q(e_1) \leq \ldots \leq q(e_m)$. V i-tém kroku pak klademe $E_i = E_{i-1} \cup \{e_r\}$, kde r je nejmenší index takový, že koncové vrcholy e_r leží v různých komponentách grafu (V, E_{i-1}). Přitom je jasné, že $r > s$ pro všechna s taková, že $e_s \in E_{i-1}$. Tento postup je výpočetně jednodušší.

<u>Důkaz:</u> (Věty 8.2)

Graf (V, E_{n-1}) je strom, neboť je souvislý (neboť má jednu komponentu) a má n vrcholů a $n-1$ hran, tedy splňuje podmínky (3) Věty 7.1. Čili je to kostra grafu G, zbývá dokázat, že jde o minimální kostru.

K tomuto účelu ukážeme, že v průběhu celého výpočtu, t.j. pro každé $i = 0, 1, \ldots, n-1$ existuje minimální kostra (V, F_i) grafu G taková, že $E_i \subseteq F_i$. Postupujeme indukcí.

Jistě existuje nějaká minimální kostra (V, F_0) grafu G a na začátku jistě $E_0 = \emptyset \subseteq F_0$. Uvažujme i-tý krok algoritmu pro nějaké $i = 1, \ldots, n-1$. Předpokládejme, že existuje minimální kostra (V, F_{i-1}) grafu G taková, že $E_{i-1} \subseteq F_{i-1}$. Jestliže přidávaná hrana e, pro níž $E_i = E_{i-1} \cup \{e\}$ splňuje $e \in F_{i-1}$, pak $E_i \subseteq F_{i-1}$ a $F_i = F_{i-1}$. V opačném případě graf $(V, F_{i-1} \cup \{e\})$ podle Důsledku 7.3 není strom a tedy obsahuje kružnici, která ovšem musí procházet hranou e.



Hrany mezi komponentami existují, protože $E_{i-1} \subseteq F_{i-1}$

Zbývající část této kružnice propojuje ty dvě komponenty grafu(V, E_{i-1}), které spojovala hrana e. Odtud plyne, že na této části kružnice musí ležet alespoň jedna hrana f přímo spojující některé dvě různé komponenty grafu (V, E_{i-1}). Položíme $F_i = (F_{i-1} - \{f\}) \cup \{e\}$. Pak graf (V, F_i) zůstává souvislý a podle Důsledku 7.3 je to strom, čili kostra grafu G. Přitom ze způsobu volby hrany e v i-tém kroku výpočtu plyne, že $q(e) \leq q(f)$, takže (V, F_i) je zase minimální kostra grafu G. Navíc $E_i \subseteq F_i$. Zejména nakonec $E_{n-1} \subseteq F_{n-1}$, čili (V, E_{n-1}) je rovna minimální kostře (V, F_{n-1}).

Analogicky je možno definovat maximální kostru grafu. Příslušné analogie uvedeného algoritmu se pak nazývá hladový algoritmus *(greedy)*.

9 Eulerovské grafy

Definice:

Uzavřený tah v obyčejném souvislém grafu $G = (V, E)$ délky $|E|$, tj. uzavřený tah procházející každou z hranou v E právě jednou, se nazývá eulerovský uzavřený tah.

Souvislý graf obsahující eulerovský uzavřený tah se nazývá eulerovský graf. Graf pozůstávající z jediného vrcholu a žádné hrany se nazývá triviální graf.

9.1 Věta

Netriviální souvislý obyčejný graf $G = (V, E)$ je eulerovský, právě když všechny vrcholy z V jsou sudého stupně.

Důkaz:

Je-li graf G eulerovský, je evidentní, že všechny vrcholy z V musí být sudého stupně.

Nechť naopak všechny vrcholy z V jsou sudého stupně. Nejprve sestrojíme v G jakýkoliv uzavřený tah. Zvolíme libovolný vrchol $v_0 \in V$, a poněvadž G je netriviální a souvislý, musí existovat nějaká hrana $\{v_0, v_1\} \in E$. V i-tém kroku $i = 1, 2, \ldots$ máme již vybránu hranu $\{v_{i-1}, v_i\}$ a je-li $v_i \neq v_0$, poněvadž vrchol v_i je sudého stupně, jsme schopní najít hranu $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ kterou jsme dosud neprošli.

Takto lze pokračovat, dokud pro některé $k \in N$ nenastane $v_k = v_0$. Tak najdeme v G uzavřený tah $v_0, \{v_0, v_1\}, v_1, \ldots, v_k$. Dále ukážeme, že každý uzavřený tah v G, který není eulerovský, lze prodloužit. Skutečně, v tom případě musí existovat hrana $\{w_0, w_1\}$, kterou tento tah neprochází. Kvůli souvislosti grafu G ale lze zvolit hranu $\{w_0, w_1\}$ tak, že w_0 tento tah prochází.

Nyní týmž způsobem jako výše sestrojíme v G uzavřený tah $w_0, \{w_0, w_1\}, \ldots, w_l$. Přitom kvůli sudosti stupňů vrcholů z V jsme navíc schopní se vyhnout hranám, které jsme prošli v předchozím tahu.

Vložíme-li nyní tento nový tah se místo některého z výskytů vrcholů w_0 v předchozím tahu, vytvoříme delší uzavřený tah. Takovýmto prodlužováním posléze sestrojíme eulerovský uzavřený tah.

Poznámka:

Věta 9.1. platí beze změny i pro multigrafy a lze ji právě tak snadno dokázat, ale u stupňů vrcholů je nutno vzít v úvah násobnost hran a smyčky počítat dvakrát.

Definice:

Uzavřený orientovaný tah v obyčejném souvislém orientovaném grafu se nazývá eulerovský uzavřený orientovaný tah. Souvislý orientovaný graf obsahující takový tah se nazývá eulerovský orientovaný graf. Takový graf je jistě silně souvislý.

Definice:

Obyčejný orientovaný graf $G = (V, E)$ se nazývá vyvážený graf, jestliže pro stupeň každého vrcholu $v \in V$ platí $d_G^-(v) = d_G^+(v)$.

9.2 Věta

Netriviální souvislý orientovaný graf $G = (V, E)$ je eulerovský, právě když je vyvážený.

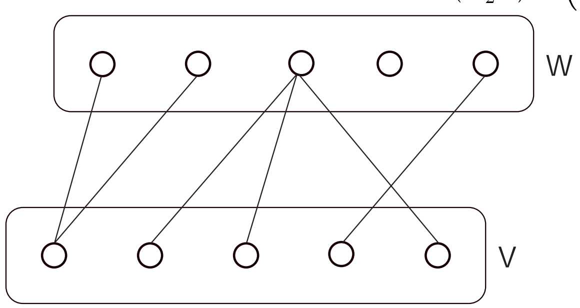
Důkaz:

Obdoba důkazu Věty 9.1.

10 Bipartitní Grafy

Definice:

Bipartitní graf $G = (V, W, E)$ se skládá ze dvou konečných množin V a W vrcholů splňujících $V \cap W = \emptyset$ a nějaké podmnožiny $E \subseteq \binom{V \cup W}{2} - \left(\binom{V}{2} \cup \binom{W}{2}\right)$ hran.



To znamená, že pro každou hranu $e \in E$ je

$$e \cap V \neq \emptyset \neq e \cap W$$

Definice:

Buď $G = (V, W, E)$ bipartitní graf. Podmnožinu $F \subseteq E$ nazýváme párování v grafu G, jestliže hrany v F jsou vzájemně disjunktní, tj. žádné dvě hrany v F nevycházejí z téhož vrcholu. Číslo $|F|$ nazýváme velikostí párování F, je shora omezené číslem $min\{|V|, |W|\}$.

Pro libovolný vrchol $v \in V$ v G značme

$$\triangle_G(v) = \{w \in W | \{v, w\} \in E\}$$

a pro libovolnou podmnožinu $A \subseteq V$ značíme

$$\triangle_G(A) = \bigcup_{v \in A} \triangle_G(v)$$

Analogické označení zaveďme i pro vrcholy $w \in W$ a podmnožinu $B \subseteq W$.

Základním výsledkem je Hallova věta:

10.1 Věta (Hallova)

Bipartitní graf $G = (V, W, E)$ obsahuje párování velikosti $|V|$, právě když pro každou podmnožinu $A \subseteq V$ je splněno

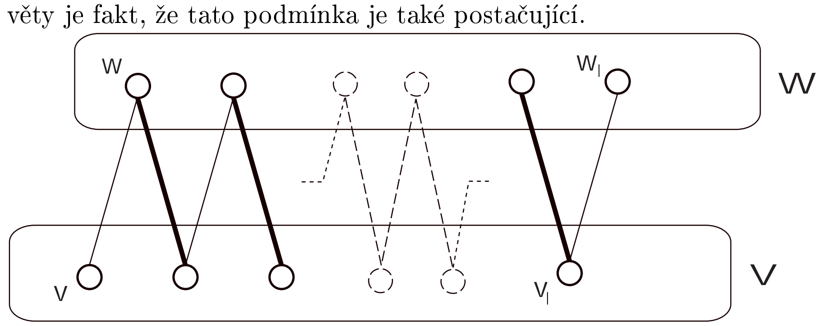
$$|A| \leq |\triangle_G (A)|$$

Poznámka:

Je-li tato podmínka splněna, pak zejména $|V| \leq |\triangle_G (V)| \leq |W|$, čili $|V| = min\{|V|, |W|\}$.

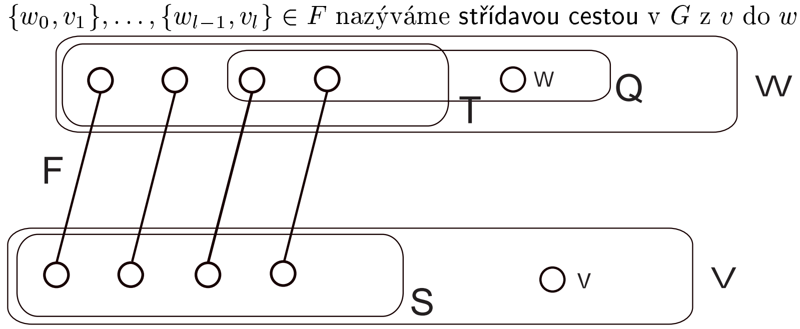
Důkaz:

Uvedená podmínka je evidentně nutná. Je-li totiž F párování v G velikosti $|V|$ a označíme-li $H = (V, W, F)$, pak pro každou podmnožinu $A \subseteq V$ je $|A| = |\triangle_H (A)| \leq |\triangle_G (A)|$. Jádrem věty je fakt, že tato podmínka je také postačující.



Definujme nejprve následující pomocný pojem:

Mějme nějaké párování F v bipartitním grafu G a dva vrcholy $v \in V, w \in W$. Libovolnou cestu v G tvaru $v = v_0, \{v_0, w_0\}, w_0, \{w_0, v_1\}, v_1, \{v_1, w_1\}, \ldots, v_l, \{v_l, w_l\}, w_l = w$, kde $l \in N_0$, $v_0, v_1, \ldots, v_l \in V$, $w_0, w_1, \ldots, w_l \in W$, $\{v_0, w_0\}, \{v_1, w_1\}, \ldots, \{v_l, w_l\} \in E - F$, $\{w_0, v_1\}, \ldots, \{w_{l-1}, v_l\} \in F$ nazýváme střídavou cestou v G z v do w vzhledem k párování F.



Mějme nyní nějaké párování F v grafu v G. Předpokládejme, že pro jeho velikost platí $|F| < |V|$. Označme $S = V \cap (\bigcup F)$ a $T = W \cap (\bigcup F)$. Takže existuje vrchol $v \in V - S$. Označme ještě $H = (V, W, F), \overline{H} = (V, W, E - F)$. Označme Q množinu všech těch vrcholů $w \in W$, pro něž existuje střídavá cesta v G z v do w vzhledem k F.

Ukážeme, že $Q \not\subseteq T$.

Připusťme, že $Q \subseteq T$. Označme $P = \triangle_H(Q)$. Pak $P \subseteq S$ a $\triangle_H(P) = Q$ neboť F je párování a dále $\triangle_{\overline{H}}(P) \subseteq Q$, neboť pro každý vrchol $\overline{w} \in \triangle_{\overline{H}}(P)$ existují vrcholy $\widetilde{v} \in P, \widetilde{w} \in Q$ takové, že $\{\widetilde{v}, \overline{w}\} \in E - F$, $\{\widetilde{w}, \widetilde{v}\} \in F$. Pak jakákoliv střídavá cesta v G z v do $\widetilde{w}$ vzhledem k F prodloužena o úsek $\{\widetilde{w}, \widetilde{v}\}, \widetilde{v}, \{\widetilde{v}, \overline{w}\}, \overline{w}$ dá střídavou cestu v G z v do $\overline{w}$ vzhledem k F. Takže skutečně $\overline{w} \in Q$.

Dohromady to znamená, že $\triangle_G(P) = Q$. Navíc máme $\triangle_G(\{v\}) \subseteq Q$, neboť pro každý vrchol $\overline{\overline{w}} \in \triangle_G(\{v\})$ je $\{v, \overline{\overline{w}}\} \in E - F$, takže $v, \{v, \overline{\overline{w}}\}, \overline{\overline{w}}$ je střídavá cesta v G vzhledem k F. Dohromady to dává, že $\triangle_G(P \cup \{v\}) = Q$. Takže skutečně $Q \not\subseteq T$.Tedy bude existovat vrchol $w \in Q - T$ a střídavá cesta v G z v do w vzhledem k F.

Rozepíšeme-li tuto cestu stejně jako výše, je jasné že $F' = F - \{\{w_0, w_1\}, \ldots, \{w_l, v_l\}\} \cup \{\{v_0, w_0\}, \ldots, \{v_l, w_l\}\}$ je párování v G velikosti $|F'| = |F| + 1$. Takto krok za krokem dospějeme k původní velikosti $|V|$.

Ovšem $|P| = |Q|$ a $v \notin P$, čili $|\triangle_G (P \cup \{v\})| = |P| < |P \cup \{v\}|$, což je SPOR s předpokladem věty.

Definice:

Buď $G = (V, W, E)$ bipartitní graf. Podmnožina $U \subseteq V \cup W$ se nazývá sečna grafu G, jestliže pro každou hranu $e \in E$ je $e \cap U \neq \emptyset$. Číslo $|U|$ se nazývá velikost sečny.

10.2 Königova věta

Pro každý bipartitní graf $G = (V, W, E)$ je maximální velikost párování v G rovna minimální velikosti sečny v G.

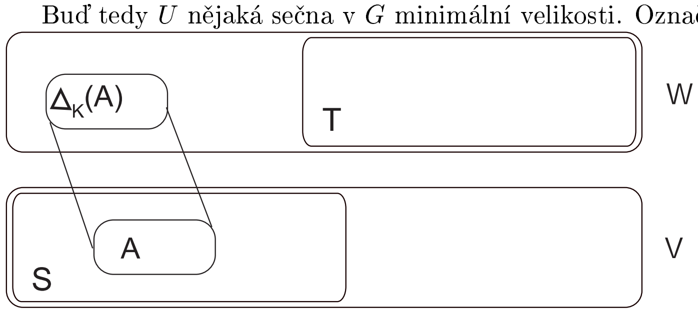
Poznámka:

Jedná se o první případ věty, kterou řadíme k tzv. charakteristickým větám.

Důkaz:

Buď F libovolné párování v G a buď U libovolná sečna v G. Pak pro libovolnou hranu $e \in F$ je $e \cap U \neq \emptyset$ a poněvadž hrany v F jsou disjunktní, odtud nutně $|F| \leq |U|$. Zbývá ukázat, že pro některé párování F a některou sečnu $u \in G$ zde nastává rovnost.

Buď tedy U nějaká sečna v G minimální velikosti. Označme $S = V \cap U$ a $T = W \cap U$.



Uvažujme bipartitní grafy $K = (S, W - T, C)$ a $L = (V - S, T, D)$, kde C a D jsou podmnožiny všech těchto hran z E, jejichž koncové vrcholy leží v uvedených podmnožinách vrcholů V a W. Přesvědčme se, že pro libovolnou podmnožinu $A \subseteq S$ je splněno $|A| \leq |\triangle_K(A)|$. Skutečně, je vidět, že množina $(U - A) \cup \triangle_K(A)$ je také sečna v grafu G. Přitom kdyby $|A| > |\triangle_K(A)|$, šlo by o sečnu menší velikosti než U což není možné. To podle Hallovy věty 10.1 znamená, že v grafu K existuje párování P, velikosti $|S|$. Analogicky se ukáže, že v grafu L existuje párování Q velikosti $|T|$. Je jasné, že pak $F = P \cup Q$ je párování v G velikosti $|F| = |P| + |Q| = |S| + |T| = |U|$.

Definice:

Buď A libovolná obdélníková matice (nad R). Řadou matice A rozumíme kterýkoliv její řádek nebo sloupec. Libovolný soubor prvků matice A nazýváme nezávislým, jestliže žádné dva prvky tohoto souboru neleží ve stejné řadě matice A. Přeformulováním Věty 10.2 do "řeči matic" dostaneme:

10.3 Věta

Pro libovolnou obdélníkovou matici A je maximální velikost nezávislého souboru nenulových prvků v A rovna minimálnímu počtu řad obsahující všechny nenulové prvky matice A.

Důkaz:

Stačí aplikovat Větu 10.2. na bipartitní graf $G = (I, J, E)$, kde I a J jsou množiny všech řádků a sloupců matic A, přičemž řádek a sloupec tvoří hranu v E právě když v jejich průsečíku leží nenulový prvek.

Příklad:

V matici $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \wr\mathbf{1} & 0 & 0 & \wr 0 \\ \widetilde{\mathbf{1}} & \widetilde{1} & \wr\widetilde{0} & \widetilde{1} & \widetilde{0} & \wr\widetilde{1} \\ 0 & 0 & \wr 1 & 0 & 0 & \wr\mathbf{1} \\ \widetilde{0} & \widetilde{\mathbf{1}} & \wr\widetilde{1} & \widetilde{0} & \widetilde{1} & \wr\widetilde{0} \\ 0 & 0 & \wr 1 & 0 & 0 & \wr 1 \end{pmatrix}$

4 tučně vysázené prvky tvoří nezávislý soubor a 4 řady vyznačené vlnovkou obsahují všechny nenulové prvky.

11 Toky v sítích

Definice:

Síť $Q = (V, E, s, t, c)$ se skládá z obyčejného orientovaného grafu (V, E) s nezáporným ohodnocením hran $c : E \to R$ nazývaným kapacita hran a ze dvou různých vybraných vrcholů $s, t \in V$, kde s je zdroj a t spotřebič.

Definice:

Tok v síti je libovolné zobrazení $f : E \to R$ splňující podmínky:

1. pro každé $e \in E$: $\quad 0 \leq f(e) \leq c(e)$ - kapacitní omezení
2. pro každé $v \in V - \{s, t\}$: $\quad \sum_{(u,v)\in E} f((u, v)) = \sum_{(v,w)\in E} f((v, w))$ - podmínky kontinuity

Jde o matematické vyjádření pohybu daného média v síti, jehož množství je v souladu s propustností hran, a které se ve vnitřních vrcholech sítě neztrácí ani nevzniká.

Definice:

Velikost toku f v síti Q je číslo

$$|f| = \overbrace{\sum_{(u,t)\in E} f((u, t))}^{\text{to co teče dovnitř}} - \overbrace{\sum_{(t,w)\in E} f((t, w))}^{\text{to co teče ven}}$$

- čisté množství média přitékajícího ke spotřebiči t.

Je-li f tok v síti Q, pak pro libovolné dvě podmnožiny $A, B \subseteq V$ značíme

$$f(A, B) = \sum_{\substack{(u,w)\in E \\ u\in A, w\in B}} f((u, w))$$

11.1 Tvrzení

Buď $Q = (V, E, s, t, c)$ síť a f tok v síti Q. Pak pro libovolné dvě podmnožiny $S, T \subseteq V$ takové, že $S \cap T = \emptyset$, $S \cup T = V$ a $s \in S$, $t \in T$ platí

$$|f| = f(S, T) - f(T, S)$$

Důkaz:

Podmínky kontinuity lze v uvedeném značení přepsat ve tvaru:

pro každé $v \in V - \{s, t\} : f(V, \{v\}) = f(\{v\}, V)$ a definice toku zní:

$$|f| = f(V, \{t\}) - f(\{t\}, V)$$

Sečtením podmínek kontinuity pro všechna $v \in T - \{t\}$ a odečtením velikosti toku dostaneme:

$$f(V, T) = f(T, V) + |f|.$$

Poněvadž $V = S \cup T$, $S \cap T = \emptyset$, vychází odtud

$$|f| = f(S \cup T, T) - f(T, S \cup T) = f(S, T) + f(T, T) - f(T, S) - f(T, T) = f(S, T) - f(T, S)$$

Z tvrzení 11.1. zejména plyne, že velikost toku f v síti Q je také rovna:

$$|f| = f(\{s\}, V) - f(V, \{s\}) = \sum_{(s,w)\in E} f((s,w)) - \sum_{(u,s)\in E} f((u,s))$$

- čisté množství média vytékajícího ze zdroje s.

Cvičení:

V dané síti Q najít tok maximální velikosti.

Poznámka:

Kapacitní omezení i podmínky kontinuity jsou lineární vazebné podmínky. Množina všech toků f v síti Q, jakožto podmnožina R^E, je neprázdná — nulový tok vždy existuje, je to uzavřená množina a kvůli kapacitním omezením je to i ohraničená množina, čili celkem kompaktní množina. Proto lineární funkce f na ní vždy nabývá maxima - tok maximální velikosti existuje v každé síti. Tato velikost je nezáporná.

Definice:

Buď $Q = (V, E, s, t, c)$ síť. Nechť $u, w \in V$. Posloupnost tvaru $u = v_0, e_1, v_1, \dots, e_l, v_l = w$, kde $l \in N_0$, $v_0, v_1, \dots, v_l \in V$ jsou vzájemně různé vrcholy a $e_1, \dots, e_l \in E$ a pro každé $i \in \{1, \dots, l\}$ platí buď $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ nebo $e_i = (v_i, v_{i-1})$, se nazývá polocesta v Q z u do w.

Je-li f tok v síti Q a platí-li pro všechna $i \in \{1, \dots, l\}$ navíc

$$f(e_i) < c(e_i) \text{ pokud } e_i = (v_{i-1}, v_i),$$

$$f(e_i) > 0 \text{ pokud } e_i = (v_i, v_{i-1}),$$

pak tato polocesta se nazývá rezervní polocesta pro f v Q z u do w. Přitom kladná čísla

$$c(e_i) - f(e_i) \text{ pro } e_i = (v_{i-1}, v_i)$$
$$f(e_i) \text{ pro } e_i = (v_i, v_{i-1}), i = 1, \dots, l,$$

se nazývají rezervy na této polocestě, nejmenší z nich je rezervou této polocesty.

11.2 Tvrzení

Buď f tok v síti $Q = (V, E, s, t, c)$. Existuje-li rezervní polocesta pro f v Q ze zdroje s do spotřebiče t, pak velikost toku f lze zvětšit o rezervu této polocesty.

Důkaz:

Máme-li rezervní polocestu tvaru $s = v_0, e_1, v_1, \dots, e_l, v_l = t$ a je li r rezerva této polocesty, pak zobrazení $g : E \to R$ definované předpisem

- $g(e_i) = f(e_i) + r$; pokud $e_i = (v_{i-1}, v_i)$
- $g(e_i) = f(e_i) - r$; pokud $e_i = (v_i, v_{i-1}), i = 1, \dots, l$
- $g(e) = f(e)$ pro $e \in E - \{e_1, \dots, e_l\}$

je jistě tok v síti Q velikosti $|g| = |f| + r$.

Definice:

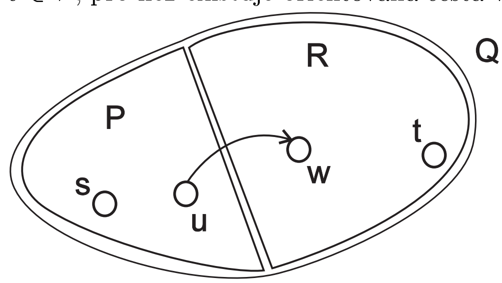
Buď $Q = (V, E, s, t, c)$ síť. Podmnožina $F \subseteq E$ se nazývá řez sítí Q, jestliže v grafu $(V, E - F)$ neexistuje orientovaná cesta ze zdroje s do spotřebiče t. Číslo $c(F) = \sum_{e\in F} c(e)$ se nazývá kapacita řezu F.

Následuje Fordova-Fulhersonova věta, jenž je jednou z nejdůležitějších charakteristických vět.

11.3 Věta (Fordova-Fulhersonova)

Pro libovolnou síť $Q = (V, E, s, t, c)$ je maximální velikost toku v Q rovna minimální kapacitě řezu v Q.

Důkaz:
Buď f libovolný tok v síti Q a buď F libovolný řez v Q. Buď P množina všech těchto vrcholů $v \in V$, pro něž existuje orientovaná cesta v grafu $(V, E - F)$ ze zdroje s do v.



Pak jistě $s \in P$. Položme $R = V - P$. Pak ovšem $t \in R$, neboť F je řez v Q. Všimněme si, že $\{(u, w) \in E \mid u \in P, w \in R\} \subseteq F$ (– množina všech hran z P do R je pod řezem F), neboť kdyby $(u, w) \in E - F$, pro některá $u \in P$, $w \in R$, šlo by o některou orientovanou cestu v $(V, E - F)$ z s do u prodloužit hranou (u, w) na orientovanou cestu z s do w, což nelze, neboť $w \notin P$. Odtud s využitím Tvrzení 11.1 vyplývá

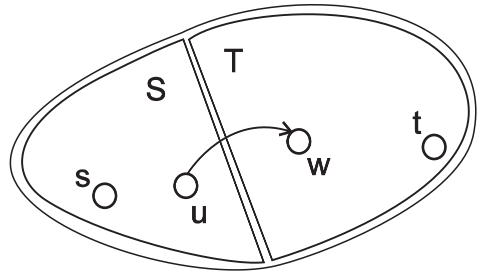
$$|f| = f(P, R) - f(R, P) \leq f(P, R) = \sum_{\substack{(u,w) \in E \\ u \in P, w \in R}} f((u, w)) \leq \sum_{e \in F} f(e) \leq \sum_{e \in F} c(e) = c(F)$$

Ukázali jsme tedy, že pro libovolný tok f a libovolný řez F v Q platí $|f| \leq c(F)$. Zbývá najít nějaký tok a nějaký řez, pro něž zde nastane rovnost.

Nechť tedy f je nějaký tok v síti Q maximální velikosti. Pak podle Tvrzení 11.2 neexistuje rezervní polocesta pro f v Q ze s do t. Označme S množinu všech těch vrcholů $v \in V$, pro něž existuje rezervní polocesta pro f v Q ze zdroje s do v. Pak jistě $s \in S$. Označme $T = V - S$. Pak ovšem $t \in T$. Položme

$$F = \{(u, w) \in E \mid u \in S, w \in T\}$$

.



Je jasné, že F je řez v síti Q, neboť každá orientovaná cesta v (V, E) z s do t musí projít některou hranou v F. Všimněme si dále, že platí: $f((u, w) = c((u, w))$, pro libovolná $u \in S$, $w \in T$ taková, že $(w, u) \in E$. $f((w, u)) = 0$ pro libovolná $u \in S$, $w \in T$, taková, že $(w, u) \in E$, neboť v opačném případě by pro některé $u \in S$, $s \in T$ šlo některou rezervní polocestu pro f v Q z s do prodloužit na rezervní polocestu z s do w, což nelze, neboť $w \notin S$.

Tato dvě pozorování lze přepsat ve tvaru

$$f(S, T) = \sum_{e \in F} f(e) = \sum_{e \in F} c(e) = c(F)$$

$$f(T, S) = 0$$

takže s použitím Tvrzení 11.1 vychází $|f| = f(S, T) - f(T, S) = c(F)$, což jsme potřebovali najít.

11.4 Důsledek

Tok f v síti $Q = (V, E, s, t, c)$ je maximální velikosti, právě když neexistuje rezervní polocesta pro f v Q z s do t.

Důkaz:

Existuje-li taková rezervní polocesta, pak podle Tvrzení 11.2 lze velikost toku f zvýšit. Pokud taková rezervní polocesta neexistuje, pak týmž způsobem jako ve druhé části důkazu Věty 11.3 sestrojíme řez F sítí Q splňující $|f| = c(F)$. Odtud nutně plyne, že f je tok v Q maximální velikosti.

Z Tvrzení 11.2 a z Důsledku 11.4 plyne následující postup pro nalezení toku maximální velikosti v $Q = (V, E, s, t, c)$:
Začneme s nulovým tokem, který poté v jednotlivých krocích zvětšujeme: nemá-li tok v danou chvíli maximální velikost, jsme schopni pro něj v Q najít rezervní polocestu z s do t, podél které pak velikost toku zvětšíme o rezervu této cesty, ...

Je-li kapacita hran sítě Q celočíselná, tedy $c : E \to Z^+$, pak velikost toku vzroste o nějaké číslo z N, takže po konečném počtu kroků dospějeme k toku maximální velikosti. Totéž platí pro Q.

Vše co následuje do konce kapitoly s vyjímkou Důsledku 11.5 se v roce 1997–98 neprobíralo. Takže pokud vás tlačí čas, klidně to přeskočte.

Definice:

Obyčejný graf $G = (V, E)$ se nazývá pravidelný, jestliže stupně $d_G(v)$ jsou stejné pro všechny vrcholy $v \in V$. Stupeň pravidelného grafu G je pak společná hodnota všech stupňů $d_G(v)$ pro $v \in V$.

Buď $G = (V, W, E)$ bipartitní graf. Pak $(V \cup W, E)$ je obyčejný graf. To určuje příslušné pojmy pro obyčejné grafy na bipartitní grafy. Zejména dostáváme pojem pravidelného bipartitního grafu. Poněvadž pro bipartitní graf platí:

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = |E| = \sum_{w \in W} d_G(w)$$

pro pravidelný bipartitní graf nenulového stupně odkud plyne $|V| = |W|$.

Cvičení:

Dokažte, že v libovolném pravidelném bipartitním grafu $G = (V, W, E)$ nenulového stupně existuje párování velikostí $|V| = |W|$.

Důkaz:

Buď k stupeň grafu G. Nechť $A \subseteq V$ je libovolná podmnožina.

Nechť: $C = \{e \in E \mid e \cap A \neq 0\}, \quad D = \{e \in E \mid e \cap \triangle_G(A) \neq 0\}$.

Zřejmě $C \subseteq D$. Odtud $|C| \leq |D|$. Přitom $|C| = k \cdot |A|$ a $|D| = k| \triangle_G(A)|$ odtud $|A| \leq | \triangle_G(A)|$.

Podle Hallovy věty bývá častěji formulována v termínech takzvaných množinových systémů. Buď M konečná množina. Nechť $\{S_i \mid i \in I\}$ je konečný systém podmnožin množiny M. Dvojice $\underline{\overline{H}} = (M, \{S_i \mid i \in I\})$ se nazývá množinový systém. Libovolný soubor $\{a_i \mid i \in I\}$ prvků z M takových, že $a_i \in S_i$ pro každé $i \in I$ a $a_i \neq a_j$ pro $i \neq j$ se nazývá transverzála množinového systému $\underline{\overline{H}}$.

11.5 Důsledek

V síti $Q = (V, E, c, t, i)$ s celočíselnými kapacitami existuje tok f maximální velikosti, jehož všechny složky jsou celočíselné, tj. je $f : E \to Z$.

Důkaz:

V průběhu celého výpočtu podle uvedeného postupu zůstanou složky toku celočíselné.

Poznámka:

Všechny výsledky této kapitoly platí i pro obecnější sítě definované na orientovaných multigrafech.

12 Souvislost grafu

Hledáme jemnější kritéria pro posouzení souvislosti obyčejného neorientovaného grafu.

Definice:

Buď $G = (V, E)$ obyčejný graf. Pro libovolné podmnožiny $W \subseteq V$ a $F \subseteq E$ definujeme graf $G - W$ to jest podgraf grafu G určený množinou vrcholů $V - W$, $G - F = (V, E - F)$

Vrcholová souvislost

(Vrcholová) souvislost $\kappa(G)$ obyčejného grafu $G = (V, E)$ se definuje jako nejmenší možná velikost takové podmnožiny $W \subseteq V$, pro niž graf $G - W$ buď není souvislý, anebo má jediný vrchol. Pro nějaké $k \in N_0$, že G je vrcholově k-souvislý, jestliže $k \leq \kappa(G)$.

Hranová souvislost

Hranová souvislost $\lambda(G)$ obyčejného grafu $G = (V, E)$ se definuje jako nejmenší možná velikost takové podmnožiny $F \subseteq E$, pro níž graf $G - F$ buď není souvislý, anebo má jediný vrchol. Pro nějaké $h \in N_0$, řekneme, že graf G je hranově h-souvislý, jestliže $h \leq \lambda(G)$.

Pro graf G mající jediný vrchol je $\kappa(G) = 0 = \lambda(G)$.
Pro úplný graf $G = (V, \binom{V}{2})$ na množině V je $\kappa(G) = |V| - 1 = \lambda(G)$.

12.1 Tvrzení

Pro každý obyčejný graf $G = (V, E)$ platí:

$$\kappa(G) \leq \lambda(G)$$

Důkaz:

Jistě není těžký $\heartsuit$.

Definice:

Buď $G = (V, E)$ obyčejný graf. Řekneme, že hrany z podmnožiny $F \subseteq E$ rozdělují dva různé vrcholy $p, q \in V$, jestliže tyto vrcholy leží v různých komponentách grafu $G - F$. Řekneme, že dva sledy v grafu G z p do q jsou hranově disjunktní, jestliže nemají žádnou společnou hranu.

Následující Fordova-Fulhersonova věta je dalším příkladem charakteristické věty.

12.2 Fordova-Fulhersonova věta

V obyčejném grafu $G = (V, E)$ je nejmenší počet hran rozdělující dva různé vrcholy $p, q \in V$ roven největšímu počtu vzájemně hranově disjunktních cest v G vedoucích z p do q.

Důkaz:

Každá podmnožina $F \subseteq E$ rozdělující vrcholy p, q musí obsahovat alespoň jednu hranu z každé cesty v G vedoucí z p do q. Odtud plyne, že takových vzájemně disjunktních cest nemůže být víc než $|F|$.

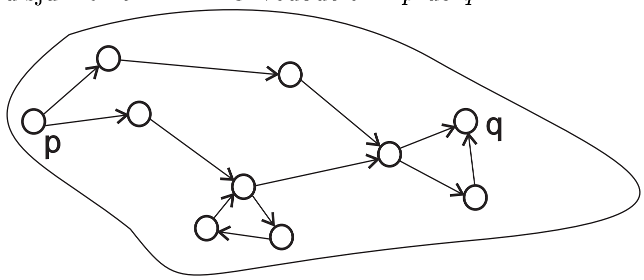
Zbývá najít příklad podmnožiny $F \subseteq E$ rozdělující p, q k níž vskutku existuje $|F|$ hranově disjunktních cest v G z p do q.

Definujme síť

$$Q = (V, D, p, q, c), \text{ kde } D = \{(x, y) \in V^2 \mid \{x, y\} \in E\}, c(d) = 1 \text{ pro všechny } d \in D.$$

Tj. každou neorientovanou hranu v E jsme nahradili dvojicí protisměrně orientovaných hran a kapacitu jsme vzali identicky 1. Podle Věty 11.3. z Důsledku 11.5. existuje celočíselný tok f a řez H v síti Q takové, že $|f| = c(H)$. Ovšem z definice c plyne, že: $c(H) = |H|$.

Položíme $F = \{\{x,y\} \in \binom{V}{2} \mid (x,y) \in H \text{ nebo } (y,x) \in H\}$ Pak $F \subseteq E$ rozděluje vrcholy p, q neboť H je řez v Q, přičemž $|F| \leq |H| = |f|$ stačí tedy už jen najít $|f|$ hranově disjunktních cest v G vedoucích z p do q.



Ovšem z předchozího toku f, z jednotlivých kapacit hran sítě Q a z podmínek kontinuity plyne, že mezi hranami $d \in D$. pro něž $f(d) \neq 0$, tj. $f(d) = c(d) = 1$ jsme schopní postupně (jeden za druhým) vyhledat $|f|$ hranově disjunktních orientovaných tahů v (V, D) z p do q. Zavedením orientace dostaneme $|f|$ hranově disjunktních sledů v G z p do q.

Nakonec na základě Tvrzení 6.3. lze z těchto sledů vybrat cesty.

12.3 Důsledek

Obyčejný graf $G = (V, E)$ mající alespoň dva vrcholy je hranově k-souvislý pro některé $k \in N$, právě když pro libovolné dva vrcholy $p, q \in V$ existuje nejméně k hranově disjunktních cest v G z p do q.

Důkaz:

Se provede přímým využitím Věty 12.2.

Poznámka:

Buď $G = (V, E)$ obyčejný graf. Dva vrcholy $p, q \in V$ se nazývají sousední, jestliže $\{p, q\}$ je hrana v E.

Definice:

Řekneme, že vrcholy z podmnožiny $W \subseteq V$ rozdělují dva různé vrcholy $p, q \in V - W$, jestliže tyto dva vrcholy leží v různých komponentách grafu $G - W$.
Řekneme, že dvě cesty v grafu G z p do q se neprotínají, nemají-li kromě p a q společný vrchol, ani společnou hranu.

Další charakteristická je tzv. Mengerova věta.

12.4 Mengerova věta

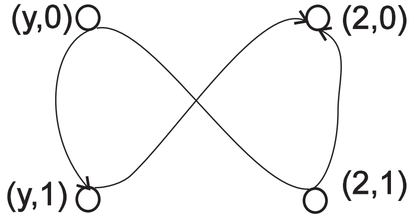
V obyčejném grafu $G = (V, E)$ je nejmenší počet vrcholů z V rozdělující dva různé nesourodé vrcholy $p, q \in V$ roven největšímu počtu vzájemně se neprotínajících cest v G vedoucích z p do q.

Důkaz:

Je podobný důkazu Věty 12.2, generuje se ale složitější síť

$$Q = (V \times \{0, 1\}, B \cup D, (p, 1), (q, 0), c)$$

kde $B = \{((x, 0), (x, 1)) \mid x \in V\}$, $\quad D = \{((y, 1), (z, 0)) \mid \{y, z\} \in E\}$
tj. každá hrana $\{y, z\} \in E$ přejde v systém hran přičemž c klademe identicky roven 1 na $B \cup D$.



12.5 Důsledek

Obyčejný graf $G = (V, E)$ mající alespoň dva vrcholy je (vrcholově) k-souvislý pro některé $k \in N$, právě když pro libovolné dva vrcholy $p, q \in V$ existuje nejméně k vzájemně se neprotínajících cest v G z p do q.

Důkaz:

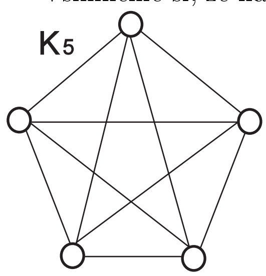
se provede použitím Věty 12.4. Je nutné si uvědomit, že pro dva souvislé vrcholy k-souvislého grafu G spojení hran z grafu $G - \{e\}$ je $(k-1)$ souvislý.

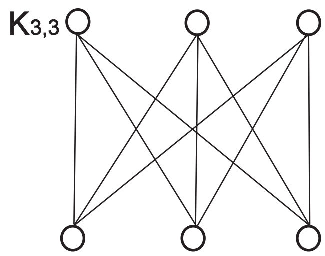
13 Rovinné grafy

Definice:

Obyčejný graf, který je možno nakreslit v rovině, tak že žádné dva oblouky nahrazující různé hrany se neprotínají, ale nanejvýš se dotýkají ve společných koncových vrcholech, nazýváme rovinný graf.

Všimněme si, že následující dva grafy nejsou rovinné.





Řekneme, že g, f H vznikl z obyčejného grafu $G = (V, E)$ dělením hran $\{u, v\} \in E$ jestliže

$$H = (V\{w\}, (E - \{\{y, v\} \cup \{u, w\}, \{w, v\}\}) \text{ pro nějaké } w \notin V$$

Řekneme, že graf H je dělením grafu G, jestliže existují grafy $H_0, H_1, \ldots H_n$ kde $n \in N_0$, takové, že $G = K_0$, $K_n = H$ a pro každé $i = 1, \ldots n$ graf K vznikl z grafu K_{i-1} dělením některé jeho formy.

13.1 Kuratovského věta

Obyčejný graf G je rovinný, právě když neobsahuje jako součást nějaké dělení grafu K_5 nebo $K_{3,3}$.

Důkaz:

viz Nešetřil: Kombinatorika I - grafy

Index