

Obsah

1	Grafy	1
2	Bipartitní grafy	3
3	Souvislost grafů	5
4	Toky v sítích	8
5	Matroidy	11
6	Ramseyova věta	13
7	Rovinné grafy	15
8	Dopravní problémy	17

Seznam obrázků

1	Příklad grafu a odpovídajícího blokového grafu	7
2	Příklady rovinných a nerovinných grafů	15
3	Příklady konvexních nakreslení rovinných grafů	16
4	Hamiltonovská kružnice (schéma k důkazu)	18

1 Grafy

Definice 1.1

Orientovaný graf je dvojice $G = (E, V)$, kde prvky množiny V nazýváme *vrcholy*, a prvky množiny E *hrany*; je přitom $E \subseteq V^2$.

Úmluva. Budeme uvažovat pouze *konečné* grafy, tedy s konečnou množinou vrcholů V .

Smyčkou pak nazýváme hranu vedoucí z vrcholu do sebe sama, tedy (u, u) .

Definice 1.2

Orientovaný graf $G = (V, E)$ nazýváme *orientovaným grafem bez smyček*, je-li relace E ireflexivní.

Orientovaný graf $G = (V, E)$ nazýváme *symetrickým*, je-li relace E symetrická.

Hranu symetrického orientovaného grafu si přitom můžeme představit jako množinu nejvýše dvouprvkových podmnožin V .

Definice 1.3

Graf (neorientovaný) je dvojice $G = (V, E)$, kde E je množina dvouprvkových podmnožin V (analogie symetrického orientovaného grafu bez smyček).

Definice 1.4

Stupeň vrcholu je počet hran s vrcholem incidentních, tedy

$$s(v) = |\{e \in E | v \in e\}|.$$

Věta 1.5

Součet stupňů vrcholů libovolného grafu je roven dvojnásobku počtu jeho hran. Formálně zapsáno:

$$\forall G = (V, E) : \sum_{v \in V} s(v) = 2 \cdot |E|$$

Důkaz: zřejmý (na levé straně se každá hrana počítá dvakrát). □

Definice 1.6

Graf $G' = (V', E')$ se nazývá *podgrafem* grafu $G = (V, E)$, je-li $V' \subseteq V$ a zároveň $E' \subseteq E$.

Úplným podgrafem pak nazýváme takový podgraf, pro který navíc platí $E' = 2^{V'} \cap E$, tedy jsou v něm obsaženy všechny hrany původního grafu, spojující vrcholy z V' .

Definice 1.7

Homomorfismem grafů nazýváme zobrazení $h : G \rightarrow G'$ (tedy $h : V \rightarrow V'$ a $h : E \rightarrow E'$) takové, že $h(E) \subseteq E'$.

Poznámka. Podgrafy odpovídají prostým homomorfismům.

Definice 1.8

Sled je posloupnost navazujících uzlů a hran, tedy

$$v_1, e_1, \dots, v_n, e_n, v_{n+1},$$

kde $e_i = \{v_i, v_{i+1}\} \forall 1 \leq i \leq n, n \geq 0$. Číslo n pak nazýváme *délkou cesty*.

Cesta je sled, v němž se neopakují uzly ani hrany, tedy $e_i \neq e_j, v_i \neq v_j, \forall 1 \leq i < j \leq n$.

Je tedy dovoleno, aby splývaly první a poslední vrchol, ale ostatní ne. Takovou cestu, v níž první a poslední vrchol splývají ($v_1 = v_{n+1}$), a má více než dva vrcholy ($n > 2$), nazýváme *kružnicí*.

Tah je sled, ve kterém se mohou opakovat vrcholy, ale ne hrany.

Věta 1.9

Jestliže mezi dvěma vrcholy existuje sled, existuje mezi nimi i cesta.

Důkaz: zřejmý – stačí vyhodit „smyčky“ (kružnice, které jsou součástí sledu). □

Definice 1.10

Souvislý graf je graf, v němž existuje cesta mezi každými dvěma vrcholy.

Vzdálenost vrcholů v souvislém grafu je nejmenší délka cesty, která je spojuje; budeme ji značit $\rho(u, v)$. Takto definovaná vzdálenost je zřejmě metrikou.

Komponenta grafu je maximální souvislý podgraf grafu. Nesouvislý graf se tedy dá rozčlenit na několik komponent, z nichž každá je již souvislá.

Strom je souvislý graf bez kružnic.

Věta 1.11

Libovolný strom, který má více než jeden vrchol, má alespoň dva vrcholy stupně 1.

Důkaz: Uvažme ve stromu nejdelsí cestu $v_1 e_1 \dots v_n e_n v_{n+1}$. Zřejmě musí být $s(v_1) = s(v_{n+1}) = 1$, jinak bychom našli delší cestu nebo kružnici. □

Věta 1.12

Souvislý graf je strom, $\Leftrightarrow |V| = |E| + 1$.

Důkaz:

„ \Rightarrow “ indukci vzhledem k počtu vrcholů.

1. $n = 1$ – zřejmé.
2. $n > 1$: pak existuje vrchol stupně 1; když ho z grafu odstraníme, zřejmě neporušíme souvislost, a zbytek – úplný podgraf – je opět strom. Protože $|V'| = n - 1$, můžeme použít indukčního předpokladu a dostáváme

$$|V| = |V'| + 1 = (|E'| + 1) + 1 = |E| + 1.$$

„ \Leftarrow “ rovněž indukci:

1. $n = 1$ – zřejmé
2. $|V| = n + 1$:

- (a) buď G obsahuje vrchol stupně 1. Pak jej můžeme vypustit a získat tak graf G' na vrcholech V' . Ten splňuje rovnost $|V'| = |E'| + 1$, je tedy strom, a proto i G ke strom.
 (b) nebo G neobsahuje vrchol stupně 1. Tento případ ale nemůže nastat, protože

$$\sum_{st} v = 2 \cdot |E| \geq 2 \cdot |V| = 2 \cdot |E| + 1,$$

a to je spor. □

Definice 1.13

Les je graf bez kružnic.¹

Důsledek 1.14

Buď G les. Pak počet komponent G je roven $|V| - |E|$.

Důkaz: Každá komponenta je stromem, přičemž $|V_i| - |E_i| = 1$. □

Definice 1.15

Kostra grafu $G = (V, E)$ je strom $G' = (V, E')$, kde $E' \subseteq E$.

Věta 1.16

Libovolný souvislý graf G má kostru.

Důkaz: Sestavíme posloupnost podgrafů G_0, \dots, G_n s následujícími vlastnostmi:

- $E_0 = \emptyset, V_0 = \emptyset$
- E_{i+1} vznikne přidáním hrany e_{i+1} k E_i tak, že nevznikne kružnice
- zastavíme, jakmile $V = V_n$.

Ukážeme, že G_n je kostra, a to sporem: necht' $v \in V - V_n$, cesta spojuje v a $u \in V_n$. Lze tedy přidat hranu (u, v) , a ta nevytvoří kružnici, ani neporuší souvislost. To je spor. □

Tento algoritmus je typem tzv. hladového algoritmu – funguje na základě principu „sežer, co můžeš“. Jak ukážeme v dalším, ne vždy vede tento typ algoritmů k cíli.

2 Bipartitní grafy

Definice 2.1

Párování grafu je taková podmnožina $P \subseteq E$, že žádné dvě hrany v P neincidují.

Maximální možný počet hran párování se pak nazývá *párovací číslo* grafu.

Párování grafu s maximálním možným počtem hran nelze vždy nalézt hladovým algoritmem.

Definice 2.2

Bipartitní graf je takový graf, jehož množinu vrcholů lze rozdělit na dvě disjunktní podmnožiny V_1 a V_2 tak, že $E \cap 2^{V_1} = \emptyset$ a $E \cap 2^{V_2} = \emptyset$, tedy hrany bipartitního grafu vedou pouze z jedné z disjunktních podmnožin do druhé; značíme $G = (V_1 \cup V_2, E)$.

Věta 2.3 HALLOVA VĚTA

Bipartitní graf $G = (V \cup W, E)$ má párování velikosti $|W| \Leftrightarrow$

$$\forall X \subseteq W : |X| \leq |\{v \in V : \exists x \in X : \{v, x\} \in E\}|$$

Důkaz:

„ \Rightarrow “ zřejmé

¹Džerákova definice: „Souvislý les je strom“.

„ \Leftarrow “ Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že G je minimální graf s touto vlastností, tedy že $G - \{e\}$ ji nespĺňuje. Ukážeme, že tento minimální graf je právě párování (kdyby tam ještě něco bylo, tak to můžeme vyhodit, a není to minimální).

V opačném případě $\exists x \in V \cup W$, $s(x) \geq 2$. Musí být $x \in V$ (jinak by totiž $s(x) \leq 1 \forall x \in V$). Uvažme nyní $V_0 = \{x \in V : s(x) = 1\}$. Je $|W| \leq |V_0| \Rightarrow G$ má párování velikosti $|W|$ a G není minimální.

(Je tady ještě jeden důkaz.) □

Věta 2.4 FROBENIUS, HALL, KÖNIG

Párovací číslo $\pi(G)$ bipartitního grafu G (tedy maximální počet disjunktních hran) je rovno sečnému číslu grafu G , tedy minimálnímu počtu vrcholů takových, že libovolná hrana inciduje s některým z nich.

Odtud také plyne Hallova věta.

Důkaz: Dokážeme pouze to, že odtud plyne Hallova věta (věta 2.3).

Nechť $G = (V \cup W, E)$ splňuje podmínku věty 2.3. Sečné číslo $|W|$ je počet vrcholů „pravé“ strany: v opačném případě existuje množina X , která je sečnou, a přitom $|X| < |W|$. Uvažme $V = X_1 \cup X_2$, kde $X_1 \subseteq V$ a $X_2 \subseteq W$, a dále $G(W - X_2) \subseteq X_1$. Platí tedy $|W| - |X_2| = |W - X_2| \leq |G(W - X_2)| \leq |X_1|$, tedy $|X| - |X_2| < |W| - |X_2|$ a to je spor. □

Poznámka 2.5

Párovací číslo je tedy dobrou charakteristikou bipartitního grafu – a sice v tom smyslu, že se snadno prokazuje pozitivním způsobem: chceme-li ukázat

$\pi(G) \geq n$ pak stačí nalézt ono párování; naopak

$\pi(G) < n$ stačí nalézt sečnu s méně než n uzly (tím tedy dokážeme, že neexistuje párování velikosti n).

Definice 2.6

Hypergraf $H(V, E, \varepsilon)$ je trojice, kde

V je obvyklá množina vrcholů,

E je množina hran,

ε je incidenční funkce $\varepsilon : E \rightarrow 2^V$.

Hrany jsou tedy „nějaké“ objekty, o kterých víme pouze to, že spojují hrany; které spojují, to popisuje incidenční funkce.

Příklad 2.1

Každý „obyčejný“ graf je hypergraf.

Dále např. je-li incidenční funkce prostá, hovoříme o prostém hypergrafu.

Pokud je $\varepsilon : E \rightarrow P_2(V)$, kde $P_2(V)$ je množina dvouprvkových podmnožin, není obvyklým grafem, pokud není prosté: pak totiž dvojici vrcholů může spojovat více než jedna hrana (tedy připouštíme tzv. násobné hrany); hovoříme pak o tzv. *multigrafu*.

Definice 2.7

Transverzál hypergrafu je prosté zobrazení $\tau : E \rightarrow V$ takové, že $\forall e \in E : \tau(e) \in \varepsilon(e)$. Můžeme tedy hovořit o systému různých reprezentantů.

Příklad 2.2

Nastává problém, kdy má hypergraf tranverzál. Totiž např.:

1. máme-li $V = \{1, 2, \dots, 6\}$ a hrany jsou $e_1 = 1, 2, 3$;² $e_2 = 1, 2, 4$; $e_3 = 1, 2, 5$; $e_4 = 3, 4, 5, 6$; $e_5 = 3, 4, 5, 6$, pak transverzál je $\tau = 1, 2, 5, 4, 3$ (přesněji opět $\tau(e_1) = 1$ atd.)
2. je-li $V = \{1, 2, 3\}$ a $e_1 = e_2 = e_3 = 1, 2$, pak transverzál neexistuje.

²Korektní zápis by byl $\varepsilon(e_1) = \{1, 2, 3\}$.

Věta 2.8

Hypergraf má transverzál, právě když pro každé $X \subseteq E$ platí $|X| \leq \left| \bigcup_{x \in X} \varepsilon(x) \right|$.

Důkaz: Převědeme hypergraf na bipartitní graf $G = (V \cup E, R)$, kde hrany bipartitního grafu jsou $\{w, e\} \in R \Leftrightarrow w \in \varepsilon(e)$. Zřejmě hypergraf má transverzál, právě když G má párování velikosti $|E|$. \square

Věta 2.9

Bud' A matice. Maximální počet nezávislých nenulových prvků matice A (tedy takových, které neleží ve stejném řádku ani sloupci) je roven minimálnímu počtu řad, které obsahují všechny nenulové prvky matice A .

Důkaz: Mějme matici A typu m/n . Uvažíme bipartitní graf, kde $V = \{1, 2, \dots, m\}$, $W = \{1, 2, \dots, n\}$, $G = (V \cup W, E)$, kde přitom $\{i, j\}$ je hrana, právě když $a_{ij} \neq 0$. Vidíme, že dostáváme Hallovu větu. \square

Definice 2.10

Maticí incidence bipartitního grafu $G = (V \cup W, E)$, kde $|V| = m$, $|W| = n$, budeme rozumět matici A typu m/n takovou, že $a_{ij} = 1$ právě když $\{v_i, w_j\} \in E$.

Poznámka 2.11

Počet všech párování velikosti n je pak roven (pro čtvercovou matici)

$$\sum_{\sigma} a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)}$$

kde sčítáme přes všechny permutace σ množiny indexů $\{1, 2, \dots, n\}$.

3 Souvislost grafů

Definice 3.1

Číslo souvislosti grafu je nejmenší počet vrcholů, jejichž odstraněním (včetně hran s nimi incidentních) vznikne nesouvislý nebo triviální ($|V| \leq 1$) graf.

Definice 3.2

Zápisem K_n budeme rozumět úplný graf na n vrcholech.

Definice 3.3

Graf je k -souvislý, právě když pro jeho číslo souvislosti platí $\sigma(G) \geq k$.

Věta 3.4 MENGEROVA

Graf je k -souvislý, právě když libovolné dva různé jeho vrcholy lze spojit alespoň k disjunktními cestami (přičemž spojené vrcholy se pro stanovení disjunktnosti nepočítají).

Důkaz:

„ \Leftarrow “ zřejmé – pokud existuje k cest spojujících dva vrcholy, musí se všechny přerušit, aby se narušila souvislost.

„ \Rightarrow “ je nechutný (neuveđen). \square

Důsledek 3.5

Graf G je 2-souvislý, právě když každé dva různé vrcholy leží na kružnici.

Definice 3.6

Množina vrcholů S *rozděluje* vrcholy u, v , pokud po odebrání množiny S se ocitnou u, v v různých komponentách grafu $G - S$.

Věta 3.7 SILNĚJŠÍ MENGEROVA (LOKÁLNÍ VARIANTA)

Bud'ťe u, v dva různé neincidentní vrcholy. Pak nejmenší počet vrcholů rozdělujících u, v je roven největšímu počtu disjunktčních cest spojujících u, v .

Poznámka 3.8

Ukážeme implikaci Věta 3.7 \Rightarrow Věta 3.4.

Mějme k -souvislý graf a v něm různé vrcholy u, v . Pokud tyto vrcholy neincidují, je tvrzení zřejmé (k přetnutí k disjunktčních cest je třeba odstranit alespoň k vrcholů).

Pokud vrcholy incidují, odstraníme hranu $e = uv$; dostaneme tak $(k - 1)$ -souvislý graf. Pak v $G - \{e\}$ existuje $k - 1$ disjunktčních cest. Hranu e jsme přitom mohli zrušit odstraněním jednoho vrcholu; podle věty 3.7 tedy existuje k disjunktčních cest (včetně hrany e).

Poznámka 3.9

Dále ukážeme implikaci Věta 3.7 \Rightarrow Věta 2.4.

Mějme $G = (V \cup W, E)$. Sestrojíme graf $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$, kde $\overline{V} = V \cup W \cup \{v, w\}$ (SCHÉMA) a $\overline{E} = E \cup \{\{v, x\}, x \in V\} \cup \{\{w, y\}, y \in W\}$.

Nyní použijeme větu 3.7 pro vrcholy v, w : maximální počet disjunktčních cest je roven párování (aby cesty neměly průnik ve V a W).

Definice 3.10

Hranové číslo souvislosti je nejmenší počet hran, jejichž odstraněním³ vznikne nesouvislý nebo triviální graf; značíme $\lambda(G)$.

Graf nazýváme *hranově k -souvislým*, pokud platí $\lambda(G) \geq k$.

Lemma 3.11

Pro graf G , číslo souvislosti $\sigma(G)$, hranové souvislosti $\lambda(G)$ a stupeň libovolného vrcholu platí

$$\sigma(G) \leq \lambda(G) \leq s(v)$$

Věta 3.12 FORD–FULKERSONOVA V LOKÁLNÍ VERZI

Pro každé dva různé vrcholy $u, v \in G$ je nejmenší počet hran rozdělujících u, v (označíme m) roven největšímu počtu hranově disjunktčních cest spojujících u, v (označíme M).

Důkaz: Nerovnost $M \leq m$ je hned vidět, opačnou dokazovat nebudeme. □

Věta 3.13 FORD–FULKERSONOVA

Graf je hranově k -souvislý, právě když každé dva vrcholy lze spojit k hranově disjunktními cestami.

Definice 3.14

Artikulací nazýváme vrchol, jehož odstraněním dostaneme nesouvislý graf.

Lemma 3.15

Graf je 2-souvislý, právě když má alespoň tři vrcholy a nemá artikulaci.

Definice 3.16

Blok je graf, který je buď izolovanou hranou, nebo je 2-souvislý.

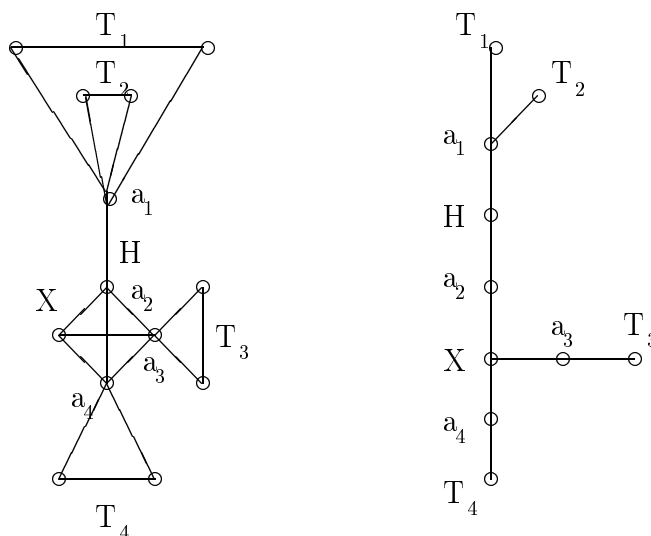
Blok grafu je maximální úplný podgraf grafu, který je blokem.

Blokový graf $B(G)$ grafu G : vrcholy jsou bloky a artikulace původního grafu, hrany jsou dvojice $\{a, B\}$, kde a je artikulace B je blok, a dále $a \in B$.

Příklad 3.1

Příklad grafu (zde souvislého) a jeho odpovídajícího blokového grafu vidíme na obrázku 1. Zde jsou přitom velkými písmeny označeny bloky grafu („trojúhelníky“ T_1, T_2, T_3, T_4 , izolovaná hrana H , a „čtverec“ X), a malými písmeny a_1, a_2, a_3, a_4 jednotlivé artikulace.

³Nyní odstraňujeme pouze hrany; vrcholy zůstávají.



Obrázek 1: Příklad grafu a odpovídajícího blokového grafu

Věta 3.17

Blokový graf souvislého grafu je strom.

Důkaz:

- Uvažme dva různé bloky B_1, B_2 . Pak zřejmě (označíme $B_i = (V_i, E_i)$) $|V_1 \cap V_2| \leq 1$. Je-li přitom tento průnik neprázdný, jedná se zřejmě o artikulaci.

Pokud je tedy průnik neprázdný, obsahuje $V_1 \cup V_2$ artikulaci a (neboť bloky jsou maximální). Nechť nyní např. $a \in V_1$. Odstraníme-li a z V_1 , pak $V_1 - \{a\}$ leží v jedné komponentě $(V_1 \cup V_2) - \{a\}$ (tedy samotné V_1 se nerozpadá, ale $V_1 \cup V_2$ ano). Odtud již $V_1 \cap V_2 = \{a\}$.

- Pro každou artikulaci a zřejmě existují bloky B_1, B_2 grafu G takové, že $V_1 \cap V_2 = \{a\}$.
- V blokovém grafu nemůže být kružnice, protože průniky bloků ležících na této kružnici by nebyly artikulace (nerozpadlo by se to).

□

Označení. Operace na grafech:

odebrání hrany	$G - e = (V, E - \{e\})$
přidání hrany	$G + e = (V, E \cup \{e\})$ (předpok. $e \notin E$)
kontrakce hrany	$G \cdot e = (V - \{u, v\} \cup \{w\}, \{\{x, y\} : \{x, y\} \cap \{u, v\} = \emptyset\} \cup \{\{w, x\} : \{v, x\} \in E \vee \{u, x\} \in E\})$, tedy zruší se hrana $e = \{u, v\}$ a vrcholy se „stáhnou v jeden“
dělení hrany	$G : e = (V \cup \{w\}, E - \{e\} \cup \{\{u, w\}, \{v, w\}\})$, hrana se „rozdělí“ novým vrcholem

□

Věta 3.18 SYNTÉZA 2-SOUVISLÝCH GRAFŮ

Graf G je 2-souvislý, právě když jej lze vytvořit z grafu K_3 („trojúhelníček“) postupným prováděním operací „+“, „:“.

Důkaz:

„ \Leftarrow “: zřejmě.

„ \Rightarrow “: Každý 2-souvislý graf vznikne (je možno získat) následujícím způsobem:

Vyjdeme z grafu G_0 , což bude kružnice (ta se dá z K_3 získat dělením). Přidáme cestu, která spojuje dva vrcholy této kružnice, ale jinak je s ní disjunktní. Dostaneme cesty C_1, C_2, \dots („přidávání uší“).

Zřejmě přitom libovolný 2-souvislý graf obsahuje nějakou kružnici G_0 .

Nechť nyní máme $G_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ a vytvoříme graf $H = G_0 \cup \bigcup_{i=1}^n C_i$, a necht' je tento graf různý od G . Protože G je souvislý, existuje hrana $\{u, v\} \in E$ taková, že $u \in H$ a přitom $v \notin H$. Dále víme, že $G - \{u\}$ je souvislý (protože G je 2-souvislý); odtud již zřejmou úvahou (diskusí, zda $\{u, v\}$ vede ven) dostaneme tvrzení „ \Rightarrow “.

□

4 Toky v sítích

Definice 4.1

Síť je (konečný) orientovaný graf $G = (V, E)$ spolu s ohodnocením hran $c : E \rightarrow \mathcal{R}^+$, které se nazývá *kapacita* hran. V síti jsou vyznačeny uzly s, t , které nazýváme *zdroj* a *stok*.

Definice 4.2

Tok velikosti C z s do t je reálná funkce $f : E \rightarrow \mathcal{R}^+$, která splňuje:

- $f(y, z) \leq c(y, z)$ pro každou hranu $\{y, z\} \in E$,
- $\sum_{e \in E^-(x)} f(e) = \sum_{e \in E^+(x)} f(e)$ pro každý vrchol $x \in V$ různý od s, t

kde přitom

- $E^-(x) = \{\{y, x\} \in E\}$
- $E^+(x) = \{\{x, z\} \in E\}$

a velikost toku je pak definována jako

$$C = \sum_{e \in E^-(t)} f(e) - \sum_{e \in E^+(t)} f(e)$$

čili všechno, co přiteče do stoku, mínus to, co ještě odteče „zpět“ do sítě.

Úloha. Základní úlohou, kterou budeme řešit, je stanovení maximálního toku z s do t v dané síti, tedy toku maximální velikosti C .

Definice 4.3

Řez mezi vrcholy s, t je taková podmnožina hran $E' \subseteq E$, že v grafu $G' = (V, E - E')$ neexistuje orientovaná cesta z s do t .

Kapacitou řezu přitom rozumíme číslo $\sum_{e \in E'} c(e)$.

Věta 4.4 FORD-FULKERSONOVA VĚTA O MAXIMÁLNÍM TOKU

Bud' G síť c kapacitou c . Pak maximální velikost toku z s do t je rovna minimální kapacitě řezu mezi s a t .

Důkaz: Díky Pasekovi je silně zašmodrchaný.

Nechť f je maximální tok, M je jeho velikost. Vezměme $A, B \subseteq V$ a označme $f(A, B) = \sum f(a, b)$, kde sčítáme přes $a \in A, b \in B, (a, b) \in E$. Zřejmě je $f(V, x) - f(x, V) = 0$ pro $s \neq x \neq t$ a dále $M = f(V, t) - f(t, V)$.

Zvolme nyní $S, T \subseteq V$ tak, že $s \in S, t \in T, S \cap T = \emptyset, S \cup T = V$. Nyní

$$\begin{aligned} M &= \sum_{x \in T} f(V, x) - f(x, V) = f(V, T) - f(T, V) = f(S \cup T, T) - f(T, S \cup T) \\ &= f(S, T) + f(T, T) - f(T, S) - f(T, T) \\ &= f(S, T) - f(T, S) \leq f(S, T) \leq c(S, T) \end{aligned}$$

□

Důkaz: První část dle Paseky.

Nechť E' je minimální řez mezi s, t s kapacitou m . Definujme si množinu S jako množinu všech vrcholů $x \in V$ takových, že v grafu $(V, E - E')$ existuje orientovaná cesta z s do x . (Zřejmě $s \in S, t \notin S$.) Položme dále $T = V - S$; je tedy $t \in T$.

Zřejmě $E' = \{(x, y) \in E : x \in S, y \in T\}$: pokud totiž $x \in S, y \in T$, existuje orientovaná cesta z s do x a neexistuje cesta z s do y , tedy $(x, y) \notin E - E'$, a tedy $(x, y) \in E'$.

Naopak pokud $(x, y) \in E'$, pak existuje orientovaná cesta v grafu $(V, E - E')$ z s do x (jinak bychom mohli hranu (x, y) z E' odstranit). Zároveň neexistuje taková cesta z s do y . Celkem $y \in T$.

Je tedy $M \leq c(S, T) = m$. □

Poznámka. Pro další postup důkazu budeme potřebovat některé pomocné pojmy a tvrzení, která si nyní uvedeme.

Definice 4.5

Pro orientovaný graf $G = (V, E)$ zavedeme graf $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$ tak, že $\tilde{E} = \{\{x, y\} : (x, y) \in E\}$, tedy graf, v němž hrany pozbývají orientace.

Cesty v grafu \tilde{G} nazýváme *polocesty* v G . Je-li přitom $C = \{s = x_0, x_1, \dots, x_n = t\}$ polocesta z s do t , pak označíme $C^+ = \{(x_i, x_{i+1}) \in E\}$ (tedy hrany, které v polocestě procházíme po směru), $C^- = \{(x_{i+1}, x_i) \in E\}$ (tedy hrany, které procházíme protisměrně).

Definice 4.6

Je-li f tok, pak čísla $c(x_i, x_{i+1}) - f(x_i, x_{i+1})$ pro $(x_i, x_{i+1}) \in C^+$, resp. $f(x_i, x_{i+1})$ pro $(x_i, x_{i+1}) \in C^-$, nazýváme *rezervy* na polocestě.

Znamená to, že na hraně, kterou v polocestě procházíme po směru, považujeme za rezervu zbytek do plné kapacity (tedy reziduální kapacitu, kterou můžeme hranu nasytit, to, co můžeme přidat), v protisměru pak to, co na hraně teče (tedy to, co můžeme odebrat – odklonit).

Definice 4.7

Minimální z rezerv na C se nazývá *rezerva* polocesty C .

Je-li rezerva polocesty C kladná, nazývá se *rezervní polocestou*.

Věta 4.8

Maximální tok nepřipouští rezervní polocestu.

Důkaz: Sporem.

Předpokládejme, že jsme našli maximální tok f , a současně že existuje polocesta C s rezervou $\delta > 0$.

Definujme nový tok g takto:

$$\begin{aligned} g(x_i, x_{i+1}) &= f(x_i, x_{i+1}) + \delta && \text{pro } (x_i, x_{i+1}) \in C^+ \\ g(x_{i+1}, x_i) &= f(x_i, x_{i+1}) - \delta && \text{pro } (x_{i+1}, x_i) \in C^- \\ g(e) &= f(e) && \text{pro } e \notin C \end{aligned}$$

Zřejmě g je tok, přitom jeho kapacita $m + \delta$ je větší, a to je spor s maximalitou toku f . □

Lemma 4.9

Nyní si nadefinujeme množinu S jako množinu všech vrcholů $x \in V$, do nichž vede rezervní polocesta ze s , s přidaným vrcholem s ; dále $T = V - S$. Zřejmě je $s \in S, t \in T$.

Platí: pro každou hranu $(x, y) \in E$ takovou, že $x \in S, y \in T$, je $f(x, y) = c(x, y)$.

Důkaz: je zřejmý – v opačném případě by existovala rezervní polocesta z s do y , což je v rozporu se zavedením množin S, T .

Analogicky je pak $f(y, x) = 0$ pro $x \in S, y \in T$. □

Důkaz: Přikročíme nyní ke zbytku důkazu věty 4.4.

Máme $M = \sum_{x \in S, y \in T} c(x, y) = c(E')$, kde přitom $E' = \{(x, y) \in E, x \in S, y \in T\}$ je řez mezi s a t .

Totíž, je-li P orientovaná cesta z s do t , stačí uvažovat největší i takové, že $z_i \in S$, kde $P = \{s = z_0, z_1, \dots, z_n = t\}$. Zřejmě je $i < n$, protože $t \notin S$. Speciálně pak $z_{i+1} \in T$. Tedy celkem $M \geq \sum_{x \in S, y \in T} c(x, y) \geq m$. □

Poznámka. Toto je zřejmě konec Pasekových zmatků.

Poznámka. Řez lze rovněž definovat jako množinu hran $\{(x, y) \in E, x \in S, y \in T\}$, kde pro množiny S, T platí $s \in S \subseteq V, t \in T \subseteq V$, a přitom $S \cap T = \emptyset, S \cup T = V$.

Věta 4.10

Pro celočíselnou kapacitu $(f : E \rightarrow \mathcal{N})$ je maximální tok rovněž celočíselný.

Důkaz: Maximální tok nalezneme tak, že začneme z nějakého toku (např. z nulového toku, který existuje zřejmě v každé síti), nalezneme pro něj rezervní polocestu, tok zvětšíme o její rezervu, a postup opakujeme.

Je-li výchozí tok celočíselný a kapacita celočíselná, neustále dostáváme celočíselný tok. Po konečném počtu kroků dojdeme k maximálnímu toku, který je také celočíselný. \square

Poznámka 4.11

Snadno se ukáže, že pro racionální kapacity je podobně i maximální tok racionální (stačí kapacity hran vynásobit jejich nejmenším společným násobkem a převést tak na celočíselné).

Ford-Fulkersonův algoritmus tedy v konečném počtu kroků zastaví.

Tvrzení. Při iracionálních kapacitách hran algoritmus nemusí zastavit, ani nemusí konvergovat k maximálnímu toku.⁴

Věta 4.12

Bud' G konečný graf, s, t jeho vrcholy, m nejmenší velikost hranového řezu mezi s, t , M největší počet hranové disjunktních cest spojujících s a t . Pak platí $M = m$.

Důkaz: Bud' $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$ orientovaný graf, kde $\tilde{E} = \{(x, y) : \{x, y\} \in E(G)\}$. Definujme $c : \tilde{E} \rightarrow \mathcal{R}^+$ tak, že $c(e) = 1$ pro každé $e \in \tilde{E}$.

Nechť \tilde{m} je minimální kapacita řezu \tilde{E} , \tilde{M} je maximální tok v \tilde{G} mezi s, t .

Protože evidentně $\tilde{M} \leq \tilde{m}$, zbývá ověřit $\tilde{m} \leq \tilde{M}$.

Odstaníme-li v G hrany (x, y) takové, že $(x, y) \in E'$ nebo $(y, x) \in E$, dostaneme řez v G . Tedy $\tilde{m} \leq m$ (ve skutečnosti dokonce platí rovnost); zejména dále $\tilde{m} \leq M \leq \tilde{M}'$.

Do t vede \tilde{M} různých hran e , $f(e) = 1$; máme \tilde{M} různých počátečních uzlů yěchto hran, a pro každý uzel x existuje hrana (y, x) , $f(y, x) = 1$. \square

Věta 4.13

Nechť $G = (V, E)$ je síť s kapacitou c , nechť z, s jsou zvolené vrcholy (zdroj, stok), a nechť je dána funkce $k : V - \{z, s\} \rightarrow \mathcal{R}^+$ (propustnost vrcholů).

Potom maximální velikost toku f ze z do s omezeného kapacitou c a propustností k , tj. $\sum_{(v, v') \in E} f(v, v') \leq k(v)$, pro $z \neq v \neq s$ je roven minimální velikosti čísla $\sum_{e \in E'} c(e) + \sum_{v \in V'} k(v)$, kde minimum se týká všech množin $V' \subseteq V, E' \subseteq E$, pro něž v grafu $(G - E') - V'$ neexistuje orientovaná cesta ze z do s . (Množinu $V' \cup E'$ nazýváme *vrcholově–hranový řez* mezi z a s .)

Důkaz: Sestrojíme novou síť $G^* = (V^*, E^*)$ s kapacitou c^* a uzly z^*, s^* takto:

- $V^* = V \times \{0, 1\}$,
- $E^* = \{(x, i), (y, j) : ((x, y) \in E, i = 0, j = 1) \vee (x = y, i = 1, j = 0)\}$, tedy původní hranu (x, y) nahradíme hranou $((x, 0), (y, 1))$, a původní vrchol x nahradíme hranou $((x, 1), (x, 0))$,
- $c^*((x, 0), (y, 1)) = c(x, y)$,
- $c^*((x, 1), (x, 0)) = k(x)$, tedy ve shodě se zavedením hran („to, co teklo v G vrcholem, teče v G^* hranou“),
- $z^* = (z, 0), s^* = (s, 1)$.

Snadno se ukáže, že si vzájemně odpovídají hranové řezy v G^* a hranově–vrcholové řezy v G , a stejně tak kapacita c^* odpovídá kapacitě c spolu s propustností k . Odtud již je tvrzení věty zřejmé. \square

⁴Je to vůbec možné?

5 Matroidy

Definice 5.1

Matroid je konečný prostý hypergraf (M, \mathcal{M}) tak, že:

1. \mathcal{M} je neprázdný dědičný systém, tedy pokud $X \in \mathcal{M}$ a $Y \subseteq X$, je také $Y \in \mathcal{M}$
2. pro $X, Y \in \mathcal{M}$ takové, že $|X| < |Y|$, existuje $x \in Y - X$ tak, že $X \cup \{x\} \in \mathcal{M}$ (vlastnost výměny – analogie např. s bázemi lineárních prostorů).

Příklad 5.1

1. Mějme $M = \{1, 2, \dots, n\}$ a $\mathcal{M} = \{X \subseteq M : |X| \leq k\}$ pro pevné $k, 0 \leq k \leq n$. Pak (M, \mathcal{M}) je tzv. k -uniformní matroid; pro $k = n$ hovoříme o diskretním matroidu, pro $k = 0$ dostáváme triviální matroid.
2. Mějme matici typu m/n , $A = (a_{ij})_{m,n}$. Vezmeme $M = \{1, 2, \dots, m\}$ a řekneme, že $X \in \mathcal{M}$, právě když řádky a_i jsou pro všechna $i \in X$ lineárně nezávislé. To co dostaneme, je opět matroid – jedná se o tzv. vektorový matroid.

Příklad 5.2

Nechť G je konečný neorientovaný graf bez smyček, $G = (V, E)$, $E \neq \emptyset$. Zavedeme \mathcal{M} jako systém podmnožin E takový, že $X \in \mathcal{M}$, právě když (V, X) je les. Pak (E, \mathcal{M}) je matroid.

Tvrzení dokážeme:

1. Dědičnost je zřejmá.
2. Les o n vrcholech a k komponentách má $n - k$ hran. Tedy pokud $X, Y \in \mathcal{M}$, $|X| < |Y|$, pak les (V, X) má méně hran, než (V, Y) , tedy existuje hrana $e \in Y - X$, která spojuje různé komponenty X . Tedy $X \cup \{e\} \in \mathcal{M}$.

Tento matroid se nazývá grafový matroid.

Lemma 5.2

Bud' (M, \mathcal{M}) matroid, $A \subseteq M$. Pak všechny maximální podmnožiny A patřící do \mathcal{M} mají stejný počet prvků.

Důkaz: Nechť množiny $X, Y \subseteq A$, $X, Y \in \mathcal{M}$, jsou maximální. Nechť např. $|X| < |Y|$. Pak existuje $x \in Y - X$ tak, že $X \cup \{x\} \in \mathcal{M}$, $X \cup \{x\} \subseteq A$, a to je spor s maximalitou X . \square

Věta 5.3

Konečný prostý hypergraf (M, \mathcal{M}) je matroid, právě když platí podmínka z lemmatu 5.2.

Důkaz:

„ \Rightarrow “: viz lemma 5.2.

„ \Leftarrow “: Nechť platí podmínka lemmatu 5.2. Mějme $X, Y \in \mathcal{M}$, $|X| < |Y|$. Položme $A = X \cup Y$.

Bud' $X \subseteq X' \subseteq A$ tak, že X' je maximální taková, že $X' \in \mathcal{M}$. Pak $|X'| \geq |Y| > |X|$, tedy existuje $x \in X' - X$. Platí $x \in Y$, $X \cup \{x\} \in \mathcal{M}$. Tím je tvrzení dokázáno. \square

Definice 5.4

Prvky množiny \mathcal{M} nazýváme *nezávislé* množiny matroidu (M, \mathcal{M}) ; velikost maximální nezávislé podmnožiny množiny A nazýváme *řád* množiny A ; značíme $r(A)$.

Funkci $r : \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{N}$ nazýváme *pořádkovou funkcí* matroidu.

Příklad 5.3

1. U vektorového matroidu je řádem hodnost příslušné submatice.
2. U grafového matroidu je to počet uzlů snižený o počet komponent příslušného podgrafu.

Definice 5.5

Báze matroidu (M, \mathcal{M}) je maximální nezávislá podmnožina \mathcal{M} .

Věta 5.6

Pořádková funkce matroidu (M, \mathcal{M}) má tyto vlastnosti:

1. $r(\emptyset) = 0$; $r(A) \leq 1$ pro $|A| \leq 1$,
2. $r(A) \leq r(B)$ pro $A \subseteq B$ (monotónnost),
3. $r(A \cup B) + r(A \cap B) \leq r(A) + r(B)$ (semimodularita).

Důkaz: První dvě tvrzení jsou zřejmá, zastavíme se pouze u semimodularity.

Buď $Z \subseteq A \cap B$ taková, že $r(Z) = |Z| = r(A \cap B)$. Buď dále X maximální nezávislá podmnožina $A \cup B$ tak, že $X \supseteq Z$. Pak

$$|X| = r(X) = r(A \cup B) = |X \cap A| + |X \cap B| - |X \cap A \cap B| \leq r(A) + r(B) - r(A \cap B)$$

a tím je tvrzení dokázáno. □

Poznámka. Pro každé X platí zřejmě $r(X) < |X|$.

Věta 5.7

Buď $r : \mathcal{P}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{N}$ funkce, splňující vlastnosti, vyjmenované ve větě 5.6. Pak existuje právě jeden matroid (M, \mathcal{M}) s pořádkovou funkcí r .

Důkaz: Ukážeme, že $\mathcal{M} = \{\mathcal{X} \subseteq \mathcal{M} : |\mathcal{X}| = \nabla(\mathcal{X})\}$ je hledaný matroid.

1. Nejprve prokážeme dědičnost, tedy pokud $Y \in \mathcal{M}$, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, je také $X \in \mathcal{M}$. Postupujeme sporem:

Nechť $r(X) < |X|$. Pak

$$r(Y) = r(X \cup (Y - X)) \leq r(X) + r(Y - X) - r(\emptyset) < |X| + |Y - X| = |Y|$$

a to je spor s tím, že $Y \in \mathcal{M}$.

2. Vlastnost výměny. Nechť $X, Y \in \mathcal{M}$, $|X| < |Y|$. Předpokládejme, že $r(X \cup \{x\}) = r(X) = |X|$ pro každé $x \in Y - X$, tedy že neexistuje „prvek na výměnu“.

Buďte nyní x, y libovolné různé $x, y \in Y - X$. Máme

$$r(X \cup \{x, y\}) = r((X \cup \{x\}) \cup (X \cup \{y\})) \leq r(X \cup \{x\}) + r(X \cup \{y\}) - r(X) = r(X)$$

Postupně tedy dojedeme k tomu, že $r(Y) = r(X)$, a to je spor. □

Problém. Budeme se nyní zabývat následující úlohou.

Mějme množinu $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, matroid (X, \mathcal{M}) a tzv. *váhovou* funkci $c : X \rightarrow \mathcal{R}_0^+$. Naším cílem je nalézt množinu $M \in \mathcal{M}$ tak, že $c(M) = \sum_{x \in M} c(x)$ je maximální.

Na tento problém se dá převést například nalezení kostry grafu, maximálního párování aj.

Algoritmus 5.1 HLADOVÝ ALGORITMUS

Tento algoritmus pro hledání maximální množiny probíhá stylem „sežer, co můžeš“ (odtud název).

1. $A_0 = \emptyset$
2. $A_{i+1} = A_i \cup \{a\}$ tak, že:
 - 2.1. $a \notin A_i$
 - 2.2. $A_{i+1} \in \mathcal{M}$

2.3. $c(a)$ nabývá maximální hodnoty pro prvky a splňující podmínky 2.1, 2.2.

3. algoritmus končí, nelze-li provést bod 2.

Věta 5.8

Bud' $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(M)$ dědičný systém podmnožin. Pak následující dvě podmínky jsou ekvivalentní:

1. Hladový algoritmus řeší problém maximální množiny pro každou váhovou funkci c .
2. \mathcal{M} je matroid.

Důkaz:

„2 \Rightarrow 1“: Mějme matroid \mathcal{M} a množinu \mathcal{B} bází \mathcal{M} . Nechť dále B_O je optimální řešení, zatímco B_H je řešení vzešlé z hladového algoritmu. Můžeme předpokládat, že $B_O, B_H \in \mathcal{B}$.

Uspořádejme si nyní tato řešení podle klesajících vah, $B_O = \{x_0, \dots, x_n\}$, $B_H = \{y_0, \dots, y_n\}$. Ukážeme, že $c(x_i) \leq c(y_i)$ (odkud již vyplyne tvrzení), a to indukcí vzhledem k i .

1. Pro $i = 1$ je tvrzení zřejmé – do A_1 se v hladovém algoritmu vybírá prvek s maximální vahou.
2. Indukční krok dokážeme sporem: předpokládejme naopak, že pro nějaké i je $c(x_i) > c(y_i)$, a současně $c(x_j) \leq c(y_j)$ pro každé $j < i$.

Položme $Y = \{x \in M : c(x) \geq c(x_i)\}$.

Zřejmě $\{x_0, \dots, x_i\} \in \mathcal{M}$, a proto $r(Y) \geq i$ (poněvadž je $\{x_0, \dots, x_i\} \subseteq Y$). Dále víme, že $\{y_0, \dots, y_{i-1}\}$ je maximální nezávislá množina. Hladový algoritmus přidal y_i , ale poněvadž platí axiom o výměně, je také $\{y_0, \dots, y_{i-1}, x_i\} \in \mathcal{M}$; má přitom větší váhu, a to je spor s hladovostí hladového algoritmu.

„1 \Rightarrow 2“: Předpokládejme, že existuje $Y \subseteq M$, $A, B \subseteq Y$ nezávislé, a že $|A| > |B|$. Zvolme a, b tak, že $b \cdot |B - A| < a \cdot |A - B|$, $0 < a < b$. Definujme dále

$$c(x) = \begin{cases} a, & X \in A - B; \\ b, & X \in B; \\ c, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Optimální řešení má zřejmě váhu alespoň $a \cdot |A - B| + b \cdot |A \cap B|$ (množina A je větší). Hladový algoritmus ale bere prvky z B , a pak skončí, neboť B je maximální (dále již přidává něco mimo Y , a tam je váhová funkce nulová).

□

6 Ramseyova věta

Příklad 6.1

Na úvod si připomeneme známou úlohu, kdy se na kontinuální besídce probudí šest opilců, a máme ukázat, že mezi nimi existují alespoň tři, kteří se všichni navzájem znají, nebo alespoň tři, kteří se všichni navzájem neznají. (Relace známosti je symetrická.)

Není obtížné provést důkaz elementárními metodami; uvidíme, že je zajímavé zabývat se něčím obecnějším.

Označení. Zavedeme si některé symboly, týkající se tzv. barvení množin.

- Jako $[n]$ označíme množinu všech jednoprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, n\}$; jako $[n]^2$ množinu dvouprvkových podmnožin atd.
- r -obarvení množiny S nazveme zobrazení $\varrho : S \rightarrow [r]$.
- Množina $A \subseteq S$ je *homogenní* (*monochromatická*), pokud zúžené zobrazení ϱ/A je konstantní.
- Řekneme, že $n \rightarrow (l)$, pokud pro každé 2-obarvení ϱ množiny $[n]^2$ existuje $H \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, $|H| = l$, a přitom $[H]^2$ je homogenní.
- Podobně $n \rightarrow (l)^k$, pokud pro každé 2-obarvení množiny $[n]^k$ existuje $H \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, $|H| = l$ tak, že $[H]^k$ je homogenní.⁵

⁵Místo $n \rightarrow (l)$ se tedy dá psát $n \rightarrow (l)^2$.

- Dále $n \rightarrow (l)_r^k$, pokud pro každé zobrazení $f : [n]^k \rightarrow [r]$ existuje $H \subseteq [n]$, $|H| \leq l$ tak, že na $[H]^k$ je f konstantní.

Problém. Po tomto zavedení se ptáme: existuje pro dané číslo l nějaké n tak, že $n \rightarrow (l)$? To zřejmě platí; jaké je však nejmenší takové n (označme ho $R(l)$)? Vidíme, že např. $R(2) = 2$, $R(3) = 6$.

Úlohy.

1. Pro jaká n platí, že pro každé rozdělení množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ do r skupin existuje vždy skupina o alespoň l prvcích? (Tuto otázku řeší Dirichletův princip: $n \geq r \cdot (l - 1) + 1$.)
2. Pro jaké n platí, že pro každé rozdělení množiny dvouprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ do r skupin existuje vždy množina $H \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ o alespoň l prvcích tak, že každá dvouprvková podmnožina utvořená z prvků množiny H patří do jedné ze skupin?

Věta 6.1 RAMSEYOVA

Pro každé $l, r, k \in \mathcal{N}$ existuje $n \in \mathcal{N}$ takové, že $n \rightarrow (l)_r^k$.

Nejmenší takové vyhovující n pak označíme $R(l, r, k)$ a nazveme jej *Ramseyovým* číslem.

Věta 6.2 NEKONEČNÁ RAMSEYOVA

Pro každé $r \in \mathcal{N}$ platí: $\omega \rightarrow (\omega)_r^2$, kde $\omega = \text{ord } \mathcal{N}$.

Jinými slovy, pro každé zobrazení $f : [\mathcal{N}]^2 \rightarrow [r]$ existuje homogenní nekonečná podmnožina $H \subseteq \mathcal{N}$.

Důkaz: Sestrojíme nekonečný systém množin S_i takto:

1. $S_1 = \mathcal{N}$.
2. Máme-li množinu S_i , zvolíme libovolně $x_i \in S_i$.
3. Máme-li nyní $x_i \in S_i$, položíme $T_j = \{x \in S_i : x_i \neq x, f(x_i, x) = j\}$ pro $j = 1, 2, \dots, r$ (rozdělíme podle barvy dvojic).

Takto jsme rozdělili nekonečnou množinu $S_i - \{x_i\}$ na konečně mnoho částí: proto existuje j takové, že množina T_j je nekonečná. Položme nyní $S_{i+1} = T_j$.

Díky konstrukci množin je $f(x_i, x_j) = f(x_i, x_k)$, pokud $i < j, k$. Vytvoříme dále zobrazení $f^* : \{x_1, x_2, \dots\} \rightarrow [r]$ tak, že $f^*(x_i) = f(x_i, x_j)$ pro $i < j$ (tedy taková barva, jako ty, co z něho vedou). Odtud již zjistíme, že existuje nekonečná množina $H \subseteq \{x_1, x_2, \dots\}$, kde f^*/H je konstantní. Je to tedy hledaná homogenní množina.

□

Věta 6.3 RAMSEYOVA (1930)

Pro každé $l \in \mathcal{N}$ existuje $n \in \mathcal{N}$ takové, že $n \rightarrow (l)$.

Důkaz: Ukážeme, že $2^{2^{l-1}} - 1 \rightarrow (l)$.

Vytvoříme tedy množinu S_1 o $2^{2^{l-1}} - 1$ prvcích a zobrazení $f : [S_1]^2 \rightarrow [2]$. Dále induktivně:

1. Zvolíme libovolně $x_i \in S_i$.
2. Vezmeme $T_j = \{x \in S_i : x \neq x_i, f(x_i, x) = j\}$ pro $j = 1, 2$, jako S_{i+1} zvolíme větší z množin T_1, T_2 . Protože je $|T_1| + |T_2| = |S_i| - 1$, máme celkem $|S_{i+1}| \geq \frac{|S_i| - 1}{2}$, a v tom je již skrytý potřebný indukční krok.

□

Věta 6.4 VAN DER WAERDENOVA (1927)

Rozdělíme-li množinu přirozených čísel na dvě skupiny, pak alespoň jedna z nich obsahuje libovolně dlouhé aritmetické posloupnosti.

Poznámka 6.5 PARIS–HARRINGTONOVA VĚTA

Pro každé $l, k, r \in \mathcal{N}$ existuje $n \in \mathcal{N}$ takové, že $n \xrightarrow{*} (l)_r^k$, kde $\xrightarrow{*}$ znamená, že homogenní množina H navíc splňuje $|H| > \min(H)$.

Tato věta není dokazatelná v teorii čísel (Peanova aritmetika); v teorii množin ano. Totiž, funkce $H(x+1, x, x) : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ hrozně rychle roste.

Pro měření, jak rychle rostou funkce $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$, existuje tzv. Ackermanova hierarchie:

- $F_0(x) = x + 1$
- $F_{n+1}(x) = F_n^{x+1}(x)$, kde „exponent“ představuje $x + 1$ iterací.

Je tedy $F_1(x) = 2x + 1$, dále $F_2(x) \approx 2^x$, $F_3(x) \approx 2^{2^{\dots^2}}$, kde v exponentu máme x „pater“.

- Pro nekonečná čísla pak máme: $F_\omega(x) = F_x(x)$; pro limitní číslo α opět máme $F_{\alpha+1}(x) = F_\alpha^{x+1}(x)$.

Nyní vyslovíme šokující tvrzení: je totiž $H \approx F_{\varepsilon_0}$ ⁶...

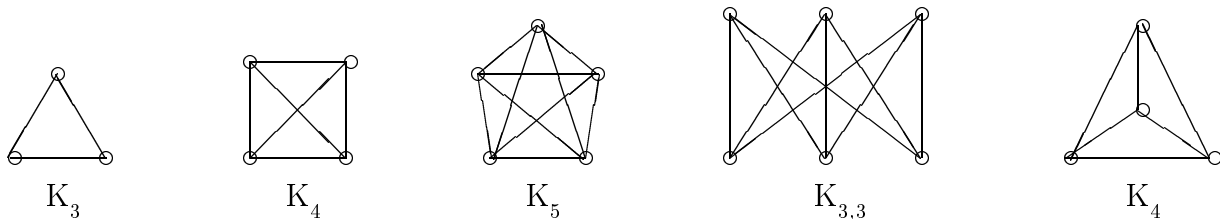
7 Rovinné grafy

Definice 7.1

Graf se nazývá *rovinný*, pokud ho lze nakreslit v rovině tak, že se jeho hrany neprotínají (tj. dotýkají se jen ve vrcholech).

Příklad 7.1

Graf K_3 (úplný graf na třech vrcholech) zřejmě rovinný je; graf K_4 rovněž (stačí zvolit vhodný způsob nakreslení). Oproti tomu graf K_5 již rovinný není, stejně jako graf $K_{3,3}$. Všechny tyto příklady nám zachycuje obrázek 2.



Obrázek 2: Příklady rovinných a nerovinných grafů

Definice 7.2

Dělení grafu je libovolný graf, který vznikne z původního konečným počtem operací dělení hrany.

Věta 7.3

Je-li graf H dělením grafu G , pak H je rovinný, právě když je rovinný i graf G .

Věta 7.4 KURATOWSKÉHO

Graf je rovinný, právě když neobsahuje žádné dělení grafu K_5 ani $K_{3,3}$.

Definice 7.5

Přímočaré rovinné nakreslení grafu znamená, že hrany jsou zobrazeny jako úsečky.

Poznámka 7.6

Dá se ukázat, že každý rovinný graf má rovinné (přímočaré) nakreslení.

⁶Zde samozřejmě $\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\dots^{\omega}}}$, kde máme ω „pater“.

Definice 7.7

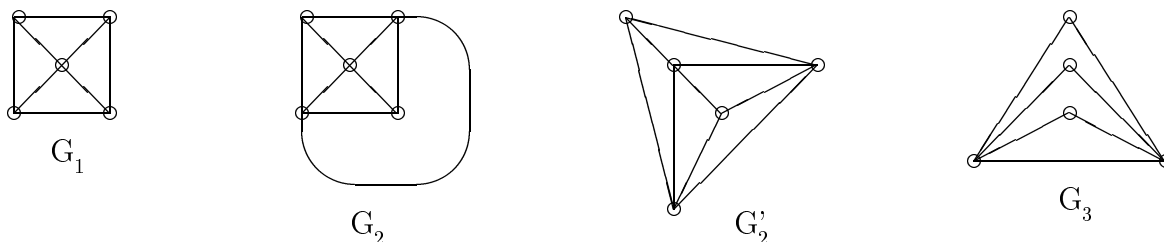
Stěna: Odebereme-li z roviny všechny hrany rovinného grafu (tj. rozřežeme ji podél hran), rozpadne se rovina na *stěny* rovinného grafu.

Definice 7.8

Konvexní nakreslení rovinného grafu je takové, které je přímočaré, a navíc všechny omezené stěny jsou konvexní.

Poznámka 7.9

Zřejmě ne každý rovinný graf má konvexní nakreslení. Tak na obrázku 3 vidíme postupně graf G_1 , který zřejmě



Obrázek 3: Příklady konvexních nakreslení rovinných grafů

má konvexní nakreslení, dále graf G_2 a jeho konvexní nakreslení G_2' , a konečně graf G_3 , který nelze konvexně nakreslit.

Poznámka 7.10

Platí, že každý 3-souvislý graf lze konvexně nakreslit.

Definice 7.11

Graf H je *minor* grafu G , právě když G obsahuje dělení grafu H ; značíme $H \leq G$.

Poznámka 7.12

Kuratowského větu lze tedy stručně zapsat takto: graf G je rovinný, právě když $K_5, K_{3,3} \not\leq G$.

Věta 7.13 WAGNEROVA HYPOTÉZA (1940)

Libovolná třída grafů uzavřená vzhledem k minorům má konečnou bázi.

Zde pojem uzavřenosti je zřejmý; bázi rozumíme množinu „zakázaných“ grafů (které do třídy nepatří). Tak například rovinné grafy mají bázi $\{K_5, K_{3,3}\}$.

Wagnerovu hypotézu dokázali Robertson a Seymour v roce 1984.

Definice 7.14

Graf k danému grafu *duální* sestrojíme tak, že za uzly vezmeme oblasti (stěny) původního grafu, a spojíme hranou ty, které se dotýkají.

Duální graf duálního grafu je totožný s výchozím grafem, právě když je rovinný.

Věta 7.15 EULERŮV VZOREC

Bud' $G = (V, E)$ rovinný graf, který je souvislý a má f stěn. Pak platí:

$$|V| - |E| + f = 2$$

Důkaz: vedeme indukci vzhledem k počtu hran.

1. Pokud $|E| = 0$, musí být (vzhledem k souvislosti) $|V| = 1$ a $f = 1$, tvrzení tedy platí.
2. Pokud $|E| \geq 1$, můžeme uvažovat dva případy:
 - (a) G je strom. Pak $f = 1$, $|E| = |V| - 1$ a tvrzení je zřejmé.
 - (b) V opačném případě existuje hrana e , obsažená v kružnici. Vytvoříme graf $G' = G - e$, který je zřejmě rovněž souvislý. Protože má méně hran, víme z indukčního předpokladu, že $|V'| - |E'| + f' = 2$. Přidáním hrany e zřejmě přidáme jednu stěnu, a tedy tvrzení platí i pro graf G .

□

8 Dopravní problémy

Problém nejkratší cesty. Pro danou síť s daným ohodnocením $c : E \rightarrow \mathcal{R}^+$ a pro dané vrcholy a, b nalezněte (orientovanou) cestu, jejíž délka je minimální.

Algoritmus 8.1

Tento algoritmus je založený na principu optimálnosti: je-li a_1, \dots, a_n minimální cesta z a_1 do a_n , pak také pro každé $j < n$ je a_1, \dots, a_j minimální cesta z a_1 do a_j .

1. Přiřadíme každému vrcholu $x \neq a$ dočasně $d(x) = \infty$, vrcholu a trvale $t(a) = 0$.
2. Je-li z poslední vrchol, kterému byla přiřazena trvalá hodnota $t(z)$, pak přiřadíme každému z' , pro nějž $(z, z') \in E$, novou dočasnou hodnotu $d(z') = \min(d(z'), c(z, z') + t(z))$.
3. Položíme $t(z') = d(z')$ pro vrchol z' s nejmenším $d(z')$; pokud jich existuje více, zvolíme libovolný.
4. Opakujeme kroky 2 a 3, dokud vrchol b nedostane trvalou hodnotu.

Důkaz: Korektnost algoritmu: chceme ukázat, že pro každé x udává hodnota $t(x)$ ohodnocenou délku nejkratší cesty z a do x .

Důkaz provedeme indukcí po nejkratší cestě:

1. Pro $x = a$ tvrzení zřejmě platí.
2. Nechť tvrzení platí pro množinu vrcholů tak, že vrchol a_{i+1} je na cestě prvním vrcholem bez trvalé hodnoty. Máme přitom cestu $a = a_1, a_2, \dots, a_n = x$. Pak ale $d(a_{i+1}) \leq \text{ohodnocení cesty } a_1, \dots, a_n < d'(x) \leq d(x)$ (pokud současně předpokládáme, že pro x tvrzení neplatí). To je však spor s tím, že x měl být vrchol s nejmenší hodnotou $d(x)$ (našli jsme a_{i+1}).

□

Eulerovské grafy.

Definice 8.1

Tah je (uzavřený) sled, ve kterém se neopakují hrany.

Graf je *eulerovský*, pokud jej lze nakreslit jedním tahem.⁷

Věta 8.2

Graf je eulerovský, právě když je souvislý a každý vrchol je sudého stupně.

Důkaz:

„ \Rightarrow “ zřejmé.

„ \Leftarrow “ Uvažujme tah $v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, e_n, v_n$ maximální délky. Ukážeme:

1. $v_0 = v_n$,
2. $\{e_i, i = 1, 2, \dots, n\} = E$.

Přistupme tedy k důkazu:

1. Sporem: necht' $v_0 \neq v_n$. Pak v_n inciduje s hranou, která do tahu nepatří (vrchol v_n má sudý stupeň, a zde „přispívá“ lichým), a to je spor, poněvadž přidáním této hrany prodloužíme tah.
2. Opět sporem: necht' existuje hrana, která do tahu nepatří. Vrcholy, se kterými inciduje, jsou však sudého stupně; musí tedy z nich kromě této hrany vycházet ještě druhá hrana. Tyto druhé hrany také někde vedou, opět do uzlů sudého stupně. Zřejmě tak v konečném počtu kroků nalezneme kružnici, o kterou můžeme tah prodloužit.

□

⁷Znamená to, že podle této definice považujeme za eulerovský jen ten graf, který lze nakreslit *uzavřeným* tahem; známý domeček tady pro nás eulerovský nebude.

Hamiltonovské grafy.

Definice 8.3

Hamiltonovská kružnice je taková kružnice, která obsahuje všechny vrcholy. Graf se pak nazývá *hamiltonovský*, pokud obsahuje hamiltonovskou kružnici.

Poznámka 8.4

Jedná se tedy o problém navštívení všech vrcholů (policejti obcházejí všechny křižovatky).

Známa je také *úloha obchodního cestujícího*, kdy v ohodnoceném grafu hledáme hamiltonovskou kružnici co nejmenší délky.

Definice 8.5

Operace em uzávěru grafu: mějme graf $G = (V, E)$, $|V| = n$. Pokud existují vrcholy $v, v' \in V$ takové, že $\{v, v'\} \notin E$ a $s(v) + s(v') \geq n$, vytvoříme $G_{v,v'} = G + \{v, v'\}$.

Lemma 8.6

Pro každý graf $G = (V, E)$ existuje právě jeden graf H , který vznikne z grafu G výše uvedenou operací, a který již touto operací nejde dále upravit.

Důkaz: Předpokládejme, že vzniknou H, H' neupravitelné různě; přitom graf H vznikl přidáním e_1, \dots, e_m , H' vznikl přidáním e'_1, \dots, e'_m . Nechť nyní k je nejmenší číslo takové, že $\{e_1, \dots, e_k\} = \{e'_1, \dots, e'_k\}$ a dále $e_{k+1} \in \{e'_1, \dots, e'_m\}$. Graf vzniklý přidáním e_1, \dots, e_k označíme \tilde{H} , nechť dále $e_{k+1} = \{x, y\}$. Pak je $s_{\tilde{H}}(x) + s_{\tilde{H}}(y) \geq n$, a proto také $s_{H'}(x) + s_{H'}(y) \geq n$ (protože $\tilde{H} \subseteq H'$), a to je spor s tím, že e_{k+1} není v druhém grafu. \square

Věta 8.7

Graf G je hamiltonovský, právě když je hamiltonovský jeho uzávěr.

Důkaz:

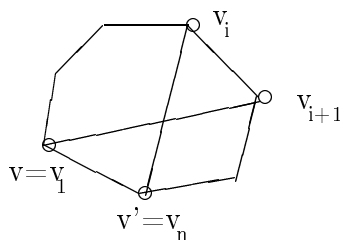
„ \Rightarrow “ zřejmé.

„ \Leftarrow “ Předpokládejme, že $G_{v,v'}$ je hamiltonovský, zatímco G není.

V G je cesta $v = v_1, e_1, v_2, \dots, e_n, v_n = v'$, která je „hamiltonovská“, tj. vrcholy vyčerpají všechny vrcholy G . Vytvoříme nyní dvě množiny

- $X = \{i : \{v_i, v_{i+1}\} \in E\}$,
- $Y = \{i : \{v_i, v'\} \in E\}$.

Nechť nyní $n \notin X \cup Y$. (Situaci nám zachycuje schéma na obrázku 4.) To se ale nemůže stát, poněvadž tak bych



Obrázek 4: Hamiltonovská kružnice (schéma k důkazu)

měl hamiltonovskou kružnici $v_1, \dots, v_i, v_n = v', v_{n-1}, \dots, v_{i+1}, v$. Tedy opravdu $X \cap Y = \emptyset$, což ale znamená, že $s(v) + s(v') = |X| + |Y|$.

\square

Důsledek 8.8

Bud' G graf takový, že $s(x) + s(y) \geq |V|$ pro všechny neincidující vrcholy $x, y \in V$. Pak G je hamiltonovský.

Důsledek 8.9

Libovolný graf s vlastností $s(x) \geq \frac{|V|}{2}$ pro každé $x \in V$ je hamiltonovský.

Poznámka 8.10

Důsledek 8.8 plyne z věty 8.7; uzávěrem je úplný graf. Důsledek 8.9 však není důsledkem důsledku 8.8.