Geometrie

zimní semestr 1991/2

Obsah

1 Afinní prostor

1.1 Pojem afinního prostoru

Definice 1.1

Nechť $\mathcal{A} \neq \emptyset$ je neprázdná množina a V je reálný vektorový prostor konečné dimenze. Nechť je dáno zobrazení $\overline{} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow V$ takové, že platí:

1. $\forall A \in \mathcal{A} \forall \vec{u} \in V \exists! B \in \mathcal{A} : \overline{AB} = \vec{u}$
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{A} : \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

Potom uspořádaná trojice $(\mathcal{A}, V, \overline{})$ se nazývá *afinní prostor,* $\mathcal{A}$ se nazývá *množina bodů,* a V zaměření afinního prostoru, které se také značí $V = Z(\mathcal{A})$.

Je-li n dimenze prostoru V, řekneme, že také afinní prostor $(\mathcal{A}, V, \overline{})$ má *dimenzi* n, a značíme $\mathcal{A}_n = (\mathcal{A}, V, \overline{})$.

Poznámka 1.2

Je-li $n = 0$, pak prostor se nazývá	*bod*
$n = 1$	*přímka*
$n = 2$	*rovina*
$n = 3$	*prostor*

Máme-li dán vektorový prostor V, můžeme definovat afinní prostor $(V, V, \overline{})$, kde $(\overline{\vec{u}, \vec{v}}) = \vec{u} - \vec{v}$ (lze definovat také jako $\vec{v} - \vec{u}$). Takový prostor nazýváme *samoafinní prostor.*

Poznámka 1.3

Budeme většinou psát $\overline{AB} = B - A = \vec{u}$ a $B = A + \vec{u}$.

Věta 1.4

Pro každé body $A, B \in \mathcal{A}$ a každé vektory $\vec{u}, \vec{v} \in Z(\mathcal{A})$ platí:

1. $\overline{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B$, tj. $\overline{AA} = \vec{0}$
2. $\overline{AB} = -\overline{BA}$
3. $(A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$
4. $Z(\mathcal{A}) = \{\overline{AB} \mid A, B \in \mathcal{A}\}$, tj. $\overline{}$ je surjekce
5. $\mathcal{A} = \{A\} \Leftrightarrow Z(\mathcal{A}) = \{\vec{0}\}$

Důkaz: Přímo z definice. Uvedeme důkaz pouze některých tvrzení.

1. $\Leftarrow$: $$\begin{array}{rcll} A = B \Rightarrow \overline{AA} + \overline{AA} & = & \overline{AA} & \mid -\overline{AA} \\ \overline{AA} + \vec{0} & = & \vec{0} & \\ \overline{AA} & = & \vec{0} & \end{array}$$ $\Rightarrow$: $\overline{AB} = \vec{0} \wedge \overline{AA} = \vec{0} \Rightarrow B + \vec{0} = A + \vec{0} \Rightarrow A = B$
2. $\overline{AA} = \vec{0} \Rightarrow \overline{AB} + \overline{BA} = \vec{0} \Rightarrow \overline{AB} = -\overline{BA}$

□

Definice 1.5

Nechť G je komutativní grupa a $M \neq \emptyset$ množina. Zobrazení $f : M \times G \longrightarrow M$ nazveme *akcí grupy G na množině M,* platí-li pro $m \in M, g_1, g_2 \in G$:

$$f(m, g_1 g_2) = f(f(m, g_1), g_2)$$

Akce G na M je *defektivní,* jestliže

$$\forall m \in M f(m, g) = m \Rightarrow g = 1_G$$

Akce G na M je *tranzitivní,* jestliže

$$\forall m_1, m_2 \in M \exists g \in G : m_2 = f(m_1, g)$$

Věta 1.6
$(V,+)$ je komutativní grupa. Operace $+ : \mathcal{A}\times V \longrightarrow \mathcal{A}$ definovaná vztahem $(A,\vec{u}) \longrightarrow A+\vec{u}$ je defektivní tranzitivní akce grupy V na množině $\mathcal{A}$.

Definice 1.7
Nechť $M \neq \emptyset$. Pak relace $\sim$ na $M \times M$ se nazývá *ekvipolence,* když pro libovolné $a, b, c, d \in M$ platí:

- $\sim$ je symetrická
- $\sim$ je tranzitivní
- $(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow (a, c) \sim (b, d)$
- $\forall a, b, c \in M \exists ! d \in M : (a, b) \sim (c, d)$

Věta 1.8
Relace $\sim$ definovaná na $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ vztahem $(A, B) \sim (C, D) \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$ je ekvipolence.

1.2 Afinní podprostory

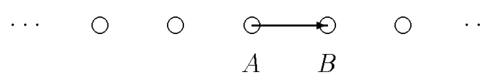
Definice 1.9
Nechť $\mathcal{A}$ je afinní prostor se zaměřením V. Nechť $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$ a $W = \{\overline{XY} \mid X, Y \in \mathcal{B}\}$. Jestliže platí:

1. W je vektorový podprostor V
2. $\forall X \in A \forall \vec{w} \in W \exists ! Y \in \mathcal{B} : \overline{XY} = \vec{w}$,

pak $\mathcal{B}$ se nazývá *afinním podprostorem* v $\mathcal{A}$ se zaměřením W.
Pokud dimenze $\mathcal{A}$ je rovna n a dimenze $\mathcal{B}$ je rovna $n-1$, pak $\mathcal{B}$ nazýváme *nadrovina*.

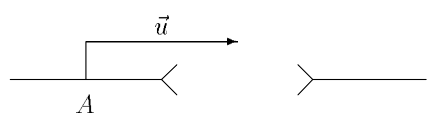
Příklad 1.10

1. Vezměme za $\mathcal{A}$ přímku, a za $\mathcal{B}$ celé body na této přímce:



Pak zaměřením $\mathcal{B}$ je $W = \{k \cdot \overline{AB} \mid k \in \mathbf{N}\}$. Je tedy splněna podmínka 2 předchozí definice, ale ne podmínka 1.

2. Nechť na přímce $\mathcal{A}$ vynecháme interval:



Pak podmínka 2 není splněna pro bod A a vektor$1\vec{u}$.

Afinní podprostor $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ je jednoznačně určen množinou bodů $\mathcal{B}$ (tedy zaměření W je dáno množinou $\mathcal{B}$).

Tvrzení 1.11
Nechť $\mathcal{B}_i$ jsou podprostory $\mathcal{A}$ pro nějakou neprázdnou množinu indexů $\forall i \in I$. Označme jejich průnik $\bigcap_{i\in I} \mathcal{B}_i$ jako $\mathcal{B}$. Je-li *bee* neprázdná množina, je afinním podprostorem v $\mathcal{A}$, a jeho zaměřením je $Z(\mathcal{B}) = \bigcup_{i\in I} Z(\mathcal{B}_i)$.

Je-li výsledný prostor $\mathcal{B}$ bodem, nazýváme jej *průsečík* prostorů $\mathcal{B}_i$, je-li přímka, říkáme jí *průsečnice.*

Definice 1.12
Nechť $M \subseteq \mathcal{A}$ je množina bodů. Označíme $\langle M\rangle$ nejmenší afinní podprostor v $\mathcal{A}$, který obsahuje všechny body množiny M. $\langle M\rangle$ se nazývá *podprostor generovaný množinou M*, nebo také *afinní obal množiny M*.

Jistě čtenáři neuniklo, že definice není zcela korektní. Je totiž třeba ukázat, že afinní podprostory obsahující množinu M mají nejmenší prvek vzhledem k množinové inkluzi. Vezměmě množinový průnik všech těchto afinních prostorů. Podle věty 1.11 je sám afinním prostorem, navíc obsahuje celou množinu M. Je tedy hledaným afinním obalem množiny M.

Příklad 1.13

Dva body A, B generují přímku $\langle\{A, B\}\rangle$, pokud $A \neq B$, nebo bod, v případě, že $A = B$.

Tvrzení 1.14

Nechť M je neprázdná množina bodů v $\mathcal{A}$. Pak podprostor $\langle M\rangle$ se dá vyjádřit jako průnik $\bigcap_{i\in I}\mathcal{B}_i$ všechn podprostorů $\mathcal{B}_i$, pro něž platí, že $M \subseteq \mathcal{B}_i$.

Definice 1.15

Nechť $\mathcal{B}_i$ jsou podprostory v A pro $i \in I \neq \emptyset$. *Součet (spojení) podprostorů* $\mathcal{B}_i$ je dáno předpisem $\sum_{i\in I}\mathcal{B}_i = \langle\bigcup_{i\in I}\mathcal{B}_i\rangle$.

Poznámka 1.16

Nechť $A \in \mathcal{A}$ je bod, $W \subseteq V$ je vektorový podprostor ve V. Zavedeme značení $\{A, W\}$ množinu bodů $\{X \mid X = A + \vec{w}, \vec{w} \in W\}$.

Věta 1.17

$\{A, W\}$ je afinní podprostor v $\mathcal{A}$. Jeho zaměřením je W.

Důkaz: Označíme si $\overline{\mathcal{B}} = \{A, W\}$. $\overline{\mathcal{B}}$ je neprázdná množina, protože obsahuje alespoň bod A. Vezměme prvek $C \in \overline{\mathcal{B}}$ a vektor $\vec{w} \in W$. $C = A + \vec{C}$ pro vhodné $\vec{c} \in W$. Potom $C + \vec{w} = (A + \vec{c}) + \vec{w} = A + (\vec{c} + \vec{w})$, což je prvkem $\overline{\mathcal{B}}$. Je tedy splněn první axiom afinního prostoru.

Nechť C, D, E jsou body $\overline{\mathcal{B}}$. Pak $C = A + \vec{c}$, $D = A + \vec{d}$ a $E = A + \vec{e}$. Tedy $\overline{CD} + \overline{DE} = (\vec{d} - \vec{c}) + (\vec{e} - \vec{d})$ a to je rovno $\vec{e} - \vec{c} = \overline{CE}$, z čehož dostáváme druhý axiom aafinního prostoru.

Dále označíme $\overline{W} = \{\overline{XY} \mid X, Y \in \overline{\mathcal{B}}\}$. Je třeba dokázat, že je vektorový prostor, a že je identický s W.

Nechť $\overline{XY} \in \overline{W}$. Pak $X = A + \vec{x}$ a $Y = A + \vec{y}$ pro vhodné vektory $\vec{x}, \vec{y} \in W$. $\overline{XY} = Y - X = \vec{y} - \vec{x}$, což je prvkem W, protože W je vektorový prostor. Proto $\overline{W} \subseteq W$.

Nechť nyní $\vec{w} \in W$. Pak v množině $\overline{\mathcal{B}}$ existuje bod B tak, že $B = A + \vec{w}$. Protože $\overline{W} \ni \overline{AB} = \vec{w}$, je i $W \subseteq \overline{W}$. □

Věta 1.18

Každý podprostor $\mathcal{B}$ v $\mathcal{A}$ se dá vyjádřit jako $\{A, Z(\mathcal{B})\}$.

Důkaz: Vezmeme libovolný prostor $\mathcal{B}$ se zaměřením $Z(\mathcal{B})$. Vybereme libovolný bod $A \in \mathcal{B}$ a označíme $\overline{\mathcal{B}} = \{A, Z(\mathcal{B})\}$. Chceme dokázat, že $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{B}}$.

Nechť $X \in \overline{\mathcal{B}}$ libovolný. Pak $X = A + \vec{w}$ pro nějaký vektor $\vec{w} \in Z(\mathcal{B})$. Protože $A \in \mathcal{B}$, můžeme použít první axiom afinního prostoru. Dostáváme, že $X = A + \vec{w} \in \mathcal{B}$. Je tedy $\overline{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B}$.

Nechť nyní $X \in \mathcal{B}$. Protože $A \in \mathcal{B}$, je $\overline{AX} \in Z(\mathcal{B})$. Bod $X = A + \overline{AX}$ je potom prvkem $\overline{\mathcal{B}}$, proto $\mathcal{B} \subseteq \overline{\mathcal{B}}$. □

Tvrzení 1.19

Buďte $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ dva afinní podprostory v $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$. Potom $Z(\mathcal{B}_1) \subseteq Z(\mathcal{B}_2)$ a $dim\,\mathcal{B}_1 \leq dim\,\mathcal{B}_2$. Pokud $dim\,\mathcal{B}_1 = dim\,\mathcal{B}_2$, pak $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$.

Věta 1.20

Nechť $\{A, W\}$ a $\{B, U\}$ jsou dva afinní podprostory v $\mathcal{A}$. Pak $\{A, W\} + \{B, U\} = \{A, U + W + L(\overline{AB})\}$

Důkaz: Jako jednoduché cvičení lze ukázat, $\{A, W\}, \{B, U\} \subseteq \{A, U + W + L(\overline{AB})\}$. Nechť dále $\mathcal{B}$ je libovolný podprostor obsahující $\{A, W\}$ i $\{B, U\}$. Pak zcela jistě platí, že $U + W + L(\overline{AB}) \subseteq Z(\mathcal{B})$. Proto i $\{A, U + W + L(\overline{AB})\} \subseteq \mathcal{B}$. Je tedy $\{A, U + W + L(\overline{AB})\}$ nejmenší z takových $\mathcal{B}$, což je vlastně $\{A, W\} + \{B, U\}$. □

Věta 1.21

Nechť $\{A, W\}$ a $\{B, U\}$ jsou afinní podprostory v $\mathcal{A}$. Pak $\{A, W\} \cap \{B, U\} \neq \emptyset \Longleftrightarrow \overline{AB} \in W + U$.

Důkaz: $\Rightarrow$: Nechť existuje $X \in \{A, W\} \cap \{B, U\}$. Pak $\overline{AX} \in W$ a $\overline{BX} \in U$. Vektor $\overline{AB}$ můžeme vyjádřit jako $\overline{AX} + \overline{XB}$, což je prvek $W + U$.

$\Leftarrow$: Nechť $\overline{AB} = \vec{w} + \vec{u}$ pro $\vec{w} \in W$ a $\vec{u} \in U$. Ukážeme, že $A + \vec{w}$ je prvkem průniku $\{A, W\}$ a $\{B, U\}$. Zřejmě je prvkem $\{A, W\}$. Zároveň platí: $A + \vec{w} = A + (\overline{ab} - \vec{u}) = (A + \overline{AB}) - \vec{u} = B - \vec{u} \in \{B, U\}$. □

Definice 1.22
O $k+1$ bodech $A_0, A_1, \ldots, A_k$ řekneme, že jsou *v obecné poloze,* jestliže prostor $\langle A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k\rangle$ má dimenzi k.

Jinými slovy to znamená, že vektory $\overline{A_0A_1}, \overline{A_0A_2}, \ldots, \overline{A_0A_k}$ jsou lineárně nezávislé, což je bezprostředním důsledkem následující věty.

Věta 1.23
$\langle A_0, A_1, \ldots, A_k\rangle = \{A_0, L(\overline{A_0A_1}, \overline{A_0A_2}), \ldots, \overline{A_0A_k})\}$

Důkaz: povedeme indukcí vzhledem k číslu k.
$k = 1 : \langle A_0, A_1\rangle = \{A_0, \{\vec{0}\}\} + \{A_1, \{\vec{0}\}\} = \{A_0, L(\overline{A_0A_1})\}$ podle věty 1.20.
Indukční krok: $\langle A_0, \ldots, A_k\rangle = \langle A_0, \ldots, A_{k-1}\rangle + \langle A_k\rangle = \{A_0, L(\overline{A_0A_1}, \ldots, \overline{A_0A_{k-1}})\}$ (podle indukčního předpokladu) $+\{A_k, \{\vec{0}\}\} = \{A_0, L(\overline{A_0A_1}, \ldots, \overline{A_0A_k})\}$ opět z věty 1.20. □

1.3 Afinní souřadná soustava

Definice 1.24
Nechť $\mathcal{A}_n$ je afinní prostor dimenze n, $P \in \mathcal{A}_n$ je libovolný bod, a $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$ je libovolná báze zaměření $Z(\mathcal{A}_n)$. Pak systém $\mathcal{R} = \langle P, \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\rangle$ se nazývá *afinní souřadná soustava (reper)* v $\mathcal{A}_n$. Bod P se nazývá počátek této afinní souřadné soustavy a $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$ její základní vektory.

Pro každý bod $X \in \mathcal{A}_n$ existuje jednoznačně určená n-tice reálných čísel $x_1, \ldots, x_n$ taková, že $\overline{PX} = x_1\vec{e_1} + \cdots + x_n\vec{e_n}$, a tedy $X = P + x_1\vec{e_1} + \cdots + x_n\vec{e_n}$.

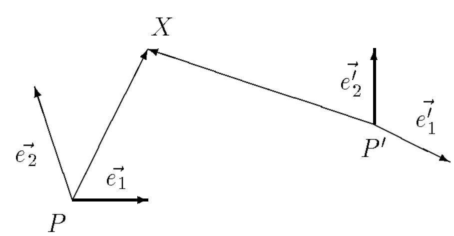
Definice 1.25
Čísla $x_1, \ldots, x_n$ z předchozí úvahy nazýváme *souřadnice bodu* X vzhledem k afinní souřadné soustavě $\mathcal{R}$ a značíme $X = [x_1, \ldots, x_n]_{\mathcal{R}}$. Bod X pak zapisujeme jako sloupcový vektor jeho souřadnic

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Zobrazení $\mathcal{R} : \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathbf{R}^n$, které každému bodu přiřadí jeho n-tici souřadnic, je bijekce.

Definice 1.26
Lze také vyjádřit souřadnice vektoru $\vec{u}$ vzhledem k reperu $\mathcal{R}$. Je-li $\vec{u} = u_1\vec{e_1} + \cdots + u_n\vec{e_n}$, pak čísla $u_1, \ldots, u_n$ nazveme jeho souřadnice a budeme zapisovat $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$.

Naše další snaha povede k odvození transformace souřadnic při přechodu od jednoho reperu k jinému. Nechť $\mathcal{R} = \langle P, \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\rangle$ a $\mathcal{R}' = \langle P', \vec{e'_1}, \ldots, \vec{e'_n}\rangle$ jsou dva repery. Nechť bod X má souřadnice $[x_1, \ldots, x_n]_{\mathcal{R}} = [x'_1, \ldots, x'_n]_{\mathcal{R}'}$. Situace v rovině může vypadat např. takto:



Ze souřadnic v reperu $\mathcal{R}'$ chceme dostat souřadnice v reperu $\mathcal{R}$. Vyjdeme ze vztahu $\overline{PX} = \overline{PP'} + \overline{P'X}$:

$$\sum_{i=1}^{n} = \sum_{i=1}^{n} b_i\vec{e_i} + \sum_{j=1}^{n} x'_j\vec{e'_j}$$

Každý vektor $\vec{e'_j}$ lze vyjádřit v reperu $\mathcal{R}$ jako $\vec{e'_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e_i}$. Celkem dostáváme následující soustavu rovnic:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & = & a_{11}x'_1 & + & a_{12}x'_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x'_n & + & b_1 \\ x_2 & = & a_{21}x'_1 & + & a_{22}x'_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x'_n & + & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ x_n & = & a_{n1}x'_1 & + & a_{n2}x'_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x'_n & + & n_2 \end{array}$$

Zapsáno pro souřadnici x_i, dostáváme $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j + b_i$. Maticový zápis je následující:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ nazveme *maticí přechodu* od reperu $\mathcal{R}$ k $\mathcal{R}'$. Vzhledem k tomu, že $[b_1, \ldots, b_n]$ jsou souřadnice bodu P' v reperu $\mathcal{R}$, můžeme psát:

$$X_{\mathcal{R}} = AX_{\mathcal{R}'} + P'_{\mathcal{R}}$$

Matice A musí být regulární, protože nemůžeme dostat lineárně závislou bázi. Považujeme-li $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ za dvě zobrazení $\mathcal{A}_n \longrightarrow \mathbf{R}^n$, je transformace podle předchozích úvah pomocí matice A a vektoru $P'_{\mathcal{R}}$ zobrazením $\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$, které odpovídá zobrazení $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}'^{-1}$.

Při přechodu opačném, tedy od souřadnic $X_{\mathcal{R}}$ k souřadnicím $X_{\mathcal{R}'}$ dostáváme rovnice:

$$X_{\mathcal{R}'} = A^{-1}X_{\mathcal{R}} - A^{-1}P'_{\mathcal{R}}$$

Pro vektory zcela zřejmě platí $u_{\mathcal{R}} = Au_{\mathcal{R}'}$.

1.4 Vyjádření podprostorů afinního prostoru

V této části budeme pracovat s pevně zadaným reperem $\langle P, \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n} \rangle$.

Definice 1.27

Nechť $\mathcal{B}_k = \{A, W\}$ je k-rozměrný podprostor v $\mathcal{A}_n$. Nechť $\vec{w_1}, \ldots, \vec{w_k}$ je libovolná báze W. Je zřejmé, že bod $X \in \mathcal{A}_n$ leží v $\mathcal{B}_k$ právě tehdy, když existují čísla $t_1, \ldots, t_k \in \mathbf{R}$ taková, že

$$X = A + t_1\vec{w_1} + \cdots + t_k\vec{w_k} \tag{1}$$

Jestliže $A = [b_1, \ldots, b_n]$ a $\vec{w_i} = (a_{1i}, \ldots, a_{ni})$ pro všechna $i = 1 \ldots k$, lze rovnice zapsat

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & = & b_1 & + & t_1a_{11} & + & \cdots & + & t_ka_{1k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x_n & = & b_n & + & t_1a_{n1} & + & \cdots & + & t_ka_{nk} \end{array} \tag{2}$$

Rovnice 1 i 2 se nazývají *parametrické vyjádření podprostoru* $\mathcal{B}_k$.

Příklad 1.28

Přímka $\{A, L(\vec{u})\}$ má parametrické vyjádření $X = A + t\vec{u}$

Věta 1.29

Budeme uvažovat soustavu $n - k$ nezávislých rovnic s n proměnnými:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-k,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{n-k,n}x_n & = & b_{n-k} \end{array} \tag{3}$$

Nechť tato soustava má řešení. Pak množina bodů $X \in \mathcal{A}_n$, jejichž souřadnice v $\mathbf{R}^n$ dostaneme jako řešení této soustavy, je afinním k-dimenzionálním podprostorem v $\mathcal{A}_n$.

Naopak, každý podprostor dimenze k v $\mathcal{A}_n$ je dán jako řešení nějaké nehomogenní soustavy rovnic.

Důkaz: Důkaz první části věty vychází z následující úvahy: Nechť $C = [c_1, \dots, c_n]$ je nějaké řešení soustavy 3 a $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ je řešení soustavy, která vznikne z 3 vynulováním všech b_i. Pak také $A + \vec{u}$ je řešením této soustavy. Protože soustava vzniklá vynulováním členů b_i má řešení $L(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k})$, které je k-dimenzionálním vektorovým podprostorem v $\mathbf{R}^n$, je prostor řešení soustavy refeqobpodpr $\{A, L(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k})\}$ afinním podprostorem v $\mathcal{A}_n$.

Pro prostor $\mathcal{B}_k = \{A, W\}$ najdeme nejprve homogenní soustavu rovnic, jejímž řešením je vektorový prostor W, a potom ji zhomogenizujeme dosazením libovolného bodu z $\mathcal{B}_k$. □

Definice 1.30

Nehomogenní soustava rovnic 3 se nazývá *neparametrické (obecné) vyjádření podprostoru $\mathcal{B}_k$.*

Poznámka 1.31

Příklady obecných vyjádření některých typů podprostorů:

- *přímka v rovině:* $ax + by + c = 0$ pro $ab \neq 0$
- *rovina v prostoru:* $ax + by + cz + d = 0$ pro $abc \neq 0$
- *obecná nadrovina:* $a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0 = 0$ pro $\prod_{i=1}^n a_i \neq 0$
- *přímka v třírozměrném prostoru:* $\left.\begin{array}{ccccccccc} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & + & d_1 & = & 0 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & + & d_2 & = & 0 \end{array}\right\}$ nezávislé rovnice
- *Důsledek:* Každý podprostor dimenze k je průnikem $n-k$ nadrovin. Tyto nadroviny jsou řešeními jednotlivých rovnic v obecném vyjádření podprostoru, které je složeno právě z $n-k$ rovnic.
- Afinní k-rozměrný podprostor lze vyjádřit jako afinní obal $k+1$ bodů v obecné poloze: $\langle A_0, \dots, A_k \rangle$

Věta 1.32

Bod $X \in \langle A_0, \dots, A_k \rangle$ právě tehdy, když existují čísla $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ taková, že $X = \lambda_0 A_0 + \dots + \lambda_k A_k$ a $\lambda_0 + \dots + \lambda_k = 1$

Důkaz: Prostor $\langle A_0, \dots, A_k \rangle$ lze zapsat jako $\{A_0, L(\overline{A_0A_1}, \overline{A_0A_2}, \dots, \overline{A_0A_k})\}$. V tomto prostoru lze bod X vyjádřit $X = A_0 + t_1\overline{A_0A_1} + \dots + t_k\overline{A_0A_k}$. Tedy $X = A_0 + t_1(A_1 - A_0) + \dots + t_k(A_k - A_0)$. Můžeme nyní použít distributivní zákon, a dostaneme

$$X = \underbrace{(1 - t_1 - \dots - t_k)}_{\lambda_0} A_0 + \underbrace{t_1}_{\lambda_1} A_1 + \dots + \underbrace{t_k}_{\lambda_k} A_k$$

□

Poznámka 1.33

Geometrický význam předcházející věty je ten, že pro $\lambda_i = \frac{1}{k+1}$ bod X těžištěm bodů $A_0, \dots, A_k$.

Čísla $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ se někdy nazývají *barycentrické souřadnice bodu X* vzhledem k bodům $A_0, \dots, A_k$.

Věta 1.34

Nechť $A_0 = [a_{01}, \dots, a_{0n}], \dots, A_k = [a_{k1}, \dots, a_{kn}]$ jsou body v obecné poloze. Pak $[x_1, \dots, x_n] = X \in \langle A_0, \dots, A_k \rangle$ právě tehdy, když matice

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n & 1 \\ a_{01} & \cdots & a_{0n} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} & 1 \end{pmatrix}$$

má hodnost $k+1$ (má $k+2$ řádků).

Důkaz: Protože $\langle A_0, \dots, A_k \rangle = \{A_0, L(\overline{A_0A_1}, \dots, \overline{A_0A_k})\}$, vektor $\overline{A_0X}$ musí být lineární kombinací vektorů $\overline{A_0A_i}$ pro $i = 1 \dots k$. Proto

$$\begin{array}{c} \overline{A_0X} \\ \overline{A_1A_0} \\ \vdots \\ \overline{A_kA_0} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 - a_{01} & \cdots & x_n - a_{0n} \\ a_{11} - a_{01} & \cdots & a_{1n} - a_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} - a_{01} & \cdots & a_{kn} - a_{0n} \end{pmatrix}$$

Tato matice s $k+1$ řádky má tedy jistě hodnost k. Přidáme nyní jeden sloupec a jeden řádek tak, aby se tento nový řádek nedal dostat lineární kombinací ostatních. Výsledná matice

$$\begin{pmatrix} x_1 - a_{01} & \cdots & x_n - a_{0n} & 0 \\ a_{11} - a_{01} & \cdots & a_{1n} - a_{0n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ a_{k1} - a_{01} & \cdots & a_{kn} - a_{0n} & 0 \\ a_{01} & \cdots & a_{0n} & 1 \end{pmatrix}$$

má proto hodnost $k+1$. Přičtením posledního řádku ke všem ostatním dostáváme požadovanou matici. □

Důsledek 1.35

Pro nadrovinu $\langle A_0, \ldots, A_{n-1} \rangle$ zvláště platí, že bod X je jejím prvkem právě tehdy, když

$$\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n & 1 \\ a_{01} & \cdots & a_{0n} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Příklad 1.36

Máme-li dva body $A = [a_1, a_2]$ a $B = [b_1, b_2]$ v rovině, pak bod $X = [x, y]$ leží na přímce určené body A, B právě tehdy, když

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

1.5 Vzájemné polohy podprostorů afinního prostoru

Definice 1.37

Dva afinní podprostory $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ budeme nazývat *rovnoběžné,* jestliže buď $Z(\mathcal{B}_1) \subseteq Z(\mathcal{B}_2)$ nebo $Z(\mathcal{B}_2) \subseteq Z(\mathcal{B}_1)$. Píšeme $\mathcal{B}_1 || \mathcal{B}_2$.

Poznámka 1.38

Podle této definice

- podprostor je rovnoběžný s každým svým podprostorem
- bod je rovnoběžný s každým podprostorem

Věta 1.39

Nechť $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ jsou dva podprostory v $\mathcal{A}_n$. Pak platí:

1. Z $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$ plyne $\mathcal{B}_{||} \mathcal{B}_2$.
2. Bodem A afinního prostoru $\mathcal{A}_n$ prochází právě jeden podprostor $\mathcal{C}$ rovnoběžný s daným prostorem $\mathcal{B}$ se stejnou dimenzí jako $\mathcal{B}$.
3. Z $\mathcal{B}_1 || \mathcal{B}_2$ vyplývá, že $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$ nebo $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_1$ nebo $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$.

Důkaz: jednotlivých částí věty:

1. Plyne přímo z definice.
2. Nechť $\mathcal{C} = \{A, Z(\mathcal{B})\}$. Ten je jistě rovnoběžný s $\mathcal{B}$ a stejné dimenze. Je třeba ukázat, že je jediný takový. Nechť tedy $\mathcal{C}' = \{A, W\}$ má též požadované vlastnosti. Musí být buď $W \subseteq Z(\mathcal{B})$ nebo $Z(\mathcal{B}) \subseteq W$. Jelikož se jedná o vektorové prostory stejné dimenze, v obou případech nastane rovnost $W = Z(\mathcal{B})$.
3. Důkaz povedem sporem. Nechť $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ jsou rovnoběžné, a zároveň $\mathcal{B}_1 \not\subseteq \mathcal{B}_2 \wedge \mathcal{B}_2 \not\subseteq \mathcal{B}_1 \wedge \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \neq \emptyset$. Pak existuje bod A z průniku prostorů $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$. Zřejmě $\mathcal{B}_1 = \{A, Z(\mathcal{B}_1)\}$ a $\mathcal{B}_2 = \{A, Z(\mathcal{B}_2)\}$. Protože je buď $Z(\mathcal{B}_1) \subseteq Z(\mathcal{B}_2)$ nebo $Z(\mathcal{B}_2) \subseteq Z(\mathcal{B}_1)$, dostáváme $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$ resp. $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_1$, což je spor.

□

Věta 1.40
Nechť $\mathcal{B}$ je podprostor a $\mathcal{N}$ je nadrovina v $\mathcal{A}_n$. Pak platí:

1. $\mathcal{B} \cap \mathcal{N} = \emptyset \Longleftarrow \mathcal{B} || \mathcal{N}$
2. $\mathcal{B} \not\| \mathcal{N} \Longleftarrow dim(\mathcal{B} \cap \mathcal{N}) = dim\, \mathcal{B} - 1$

Důkaz: jednotlivých částí věty:

1. Důkaz povedeme sporem. Nechť platí předpoklad, ale $\mathcal{B}$ a $\mathcal{N}$ nejsou rovnoběžné. Potom existuje vektor $\overline{AB}$ ze zaměření prostoru $\mathcal{B}$, který není prvkem zaměření nadroviny $\mathcal{N}$. Zároveň body A, B jsou vybrány z prostoru $\mathcal{B}$. Tedy $Z(\mathcal{A}_n) = Z(\mathcal{N}) + L(\overline{AB})$ je přímý součet. Každý vektor v $Z(\mathcal{A}_n)$ se proto dá zapsat jednoznačně jako součet vektorů z $L(\overline{AB})$ a $Z(\mathcal{B})$.

   Vezmeme nyní libovolný bod $O \in \mathcal{N}$. Vektor $\overline{OA}$ se dá rozložit na součet vektorů $\vec{u} \in Z(\mathcal{N})$ a $\vec{v} \in L(\overline{AB})$: $\overline{OA} = \vec{u} + \vec{v}$. Nechť tedy $\vec{u} = \overline{OX}$ pro vhodné $X \in \mathcal{N}$, a $\vec{v} = \overline{UA}$ pro vhodné $U \in \langle A, B\rangle$. Platí: $\overline{OA} = \overline{OX} + \overline{UA}$, ale zároveň $\overline{OA} = \overline{OX} + \overline{XA}$ (axiom afinního prostoru). Je tedy $X = U$. Tento bod leží zároveň v nadrovině $\mathcal{N}$ a v podprostoru $\mathcal{B}$, což je spor s předpokladem.

2. $dim(\mathcal{B} \cap \mathcal{N}) = dim(Z(\mathcal{B}) \cap Z(\mathcal{N})) = dim(Z(\mathcal{B})) + \underbrace{dim(Z(\mathcal{N}))}_{n-1} - \underbrace{dim(Z(\mathcal{B}) + Z(\mathcal{N}))}_{n} = dim(\mathcal{B}) + n - 1 - n =$

   $dim(\mathcal{B}) - 1$

□

Definice 1.41
Dva afinní podprostory $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ v $\mathcal{A}_n$ nazveme *různoběžné,* jestliže $\mathcal{B}_1 \not\| \mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \neq \emptyset$. Tyto prostory nazveme *mimoběžné,* pokud $\mathcal{B}_1 \not\| \mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$.

Věta 1.42
Nechť $\mathcal{B}_1 = \{A, W\}, \mathcal{B}_2 = \{B, U\}$ jsou podprostory v $\mathcal{A}_n$. Pak platí:

1. $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \vee \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_1$

$$\Updownarrow$$
$$(W + U = W \vee W + U = U) \wedge \overline{AB} \in W + U$$
$$\Updownarrow$$
$$dim(W + U + L(\overline{AB})) = \max(dim\, W, dim\, U)$$

2. $\mathcal{B}_1 || \mathcal{B}_2 \wedge \mathcal{B}1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$

$$\Updownarrow$$
$$(W + U = W \vee W + U = U) \wedge \overline{AB} \notin W + U$$
$$\Updownarrow$$
$$dim(W + U) = \max(dim\, W, dim\, U), dim(W + U + L(\overline{AB})) = dim(W + U) + 1$$

3. $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ různoběžné

$$\Updownarrow$$
$$(W + U \neq W \wedge W + U \neq U) \wedge \overline{AB} \in W + U$$
$$\Updownarrow$$
$$dim(W + U) > \max(dim\, W, dim\, U), dim(W + U + L(\overline{AB})) = dim(W + U)$$

4. $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2$ mimoběžné

$$\Updownarrow$$
$$(W + U \neq W \wedge W + U \neq U) \wedge \overline{AB} \notin W + U$$
$$\Updownarrow$$
$$dim(W + U) > \max(dim\, W, dim\, U), dim(W + U + L(\overline{AB})) = dim(W + U) + 1$$

Důkaz: plyne bezprostředně z předchozích definic a vět. □

Vzájemnou polohu dvou podprostorů $\mathcal{B}_1 = \{A, L(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k)\}$ a $\mathcal{B}_2 = \{B, L(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_l)\}$ zjistíme tak, že vytvoříme matici z řádků tvořených souřadnicemi vektorů v tomto tvaru:

$$\begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vdots \\ \vec{w}_k \\ \vec{u}_1 \\ \vdots \\ \vec{u}_l \\ \hline \overline{AB} \end{pmatrix}$$

Převedením této matice na schodovitý tvar získáme hodnost této matice. Zjistíme tak dimenzi vektorového prostoru $W + U$, a podle posledního řádku také hodnost prostoru $W + U + L(\overline{AB})$. Výsledek konfrontujeme z předchozí větou.

Věta 1.43

Nechť $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ jsou mimoběžné podprostory v $\mathcal{A}_n$. Pak $1 \le dim\, \mathcal{B}_i \le n-2$ pro $i = 1, 2$.

Důkaz: $1 \le dim\, \mathcal{B}_i$, protže jinak by byly rovnoběžné.

Nechť $\mathcal{B}_1 \not\parallel \mathcal{B}_2$. Potom

$$Z(\mathcal{B}_1) \supset Z(\mathcal{B}_1) \cap Z(\mathcal{B}_2) \subset Z(\mathcal{B}_2). \tag{4}$$

Inkluze je v obou případechostrá, jinak by byly podprostory $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ rovnoběžné. Proto platí: $dim(Z(\mathcal{B}_1) \cap Z(\mathcal{B}_2)) < dim\, Z(\mathcal{B}_2)$, a tedy

$$dim\, Z(\mathcal{B}_2) - dim(Z(\mathcal{B}_1) \cap Z(\mathcal{B}_2)) \begin{array}{l} > 0 \\ \ge 1 \end{array}. \tag{5}$$

Z mimoběžnosti podprostorů dále plyne, že $n \ge dim(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2) = dim(Z(\mathcal{B}_1) + Z(\mathcal{B}_2)) + 1 = dim\, Z(\mathcal{B}_1) + dim\, Z(\mathcal{B}_2) - dim(Z(\mathcal{B}_1) \cap Z(\mathcal{B}_2)) + 1$. Do pravé strany poslední nerovnosti můžeme dosadit nerovnost 5, a dostaneme tak: $n \ge dim\, Z(\mathcal{B}_1) + 2$, z čehož dostáváme požadovanou nerovnost $n - 2 \ge dim\, Z(\mathcal{B}_1)$.

Jestliže vyjdeme z levé strany výrazu 4, tedy pro $Z(\mathcal{B}_1)$, dostaneme symetricky nerovnost $n - 2 \ge dim\, Z(\mathcal{B}_2)$. □

Definice 1.44

Nechť p, q jsou dvě mimoběžné přímky v $\mathcal{A}_n, (n \ge 3)$. Pak přímka, která je různoběžná s p i q, se nazývá *příčka mimoběžek* p, q.

Věta 1.45

Nechť $p = \{A, l(\vec{u})\}$ a $q = \{B, L(\vec{v})\}$ jsou mimoběžky a vektor $\vec{w} \in L(\vec{u}, \vec{v}, \overline{AB})$ je nenulový. Je-li $\vec{w} \in L(\vec{u}, \vec{v})$, pak příčka mimoběžek p, q rovnoběžná s $\vec{w}$ neexistuje. Naopak, není-li $\vec{w} \in L(\vec{u}, \vec{v})$, pak existuje právě jedna příčka mimoběžek p, q rovnoběžná s $\vec{w}$.

Důkaz: Označme $X \in p, Y \in q$ průsečíky nějaké příčky p, q s přímkami p a q. Můžeme předpokládat: $X = A + x\vec{u}, Y = B + y\vec{v}$ pr vhodná $x, y \in \mathbf{R}$. Dále vyjádříme vektor $\vec{w}$ takto: $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\overline{AB}$. To jistě lze, protože $\vec{w} \in L(\vec{u}, \vec{v}, \overline{AB})$. Navíc čísla a, b, c jsou dána jednoznačně, protože vektory $\vec{u}, \vec{v}, \overline{AB}$ jsou lineárně nezávislé.

Je-li naše příčka rovnoběžná se směrem $\vec{w}$, můžeme psát $\overline{XY} = d\vec{w} = ad\vec{u} + bd\vec{v} + cd\overline{AB}$. Vektor $\overline{XY}$ lze vyjádřit také pomocí bodů X, Y: $\overline{XY} = Y - X = B - A + y\vec{v} - x\vec{u} = -x\vec{u} + y\vec{v} + \overline{AB}$. Dostali jsme dvě vyjádření pro vektor $\overline{XY}$ jako součet vektorů $\vec{u}, \vec{v}, \overline{AB}$, které však musí být jednoznačné. Proto $ad = -x, bd = y, cd = 1$. Kdyby $\vec{w} \in L(\vec{u}, \vec{v})$, bylo by $c = 0$, a dostali bychom spor. Tedy v tomto případě neexistuje příčka. Je-li naopak $c \ne 0$, jsou již všechna další vyjádření dána jednoznačně, a tedy existuje právě jedna příčka. □

Věta 1.46

Nechť $p = \{A, L(\vec{u})\}$ a $q = \{B, L(\vec{v})\}$ jsou mimoběžky v $\mathcal{A}_n$ a bod $M \in p + q$. Pak platí:

1. Je-li $M \in p$ nebo $M \in q$, pak existuje nekonečně mnoho příček p, q procházejících bodem M.
2. Leží-li M v rovině $\alpha : p \subseteq \alpha \wedge \alpha || q$ nebo v rovině $\beta : q \subseteq \beta \wedge \beta || p$, pak neexistuje příčka p, qprocházející bodem M.
3. V ostatních případech existuje právě jedna příčka p, q procházející bodem M.

Důkaz: Průsečíky příčky procházející bodem M s přímkami p, q si vyjádříme jako $P = A + x\vec{u}$ a $Q = B + y\vec{v}$. Víme, že $\overline{PM} = k\overline{PQ}$ pro nějaké k. Aritmetickými úpravami dostaneme vyjádření bodu M: $M = A + k\overline{AB} + (1-k)x\vec{u} + ky\vec{v}$, které musí bod M splňovat, aby jím vedla příčka p, q. Bod M se dá vyjádřit obecně jako $M = A + a\overline{AB} + b\vec{u} + c\vec{v}$.

Je-li bod M na přímce p, potom $a = c = 0$, a tedy $k = 0$. Pak $P = M$ a číslo y můžeme zvolit libovolně, je tedy nekonečně mnoho příček procházejících M. Ze symetrie dostáváme stejný výsledek pro $M \in q$.

Je-li bod M v rovině α, pak $a = 0, b \neq 0 \neq c$. Protože $a = 0$, musí i $k = 0$, a tedy $c = 0$, což je spor. Neexistuje tedy příčka procházející bodem M. Případ $M \in \beta$ je opět symetrický.

Ve všech ostatních případech spočítáme $k = a, y = c/k, x = b/(1-k)$. Zde k není rovno 0 ani 1 (bylo by $M \in p$ resp. $M \in q$), proto dostaneme vždy jednoznačný výsledek. □

1.6 Svazek přímek, svazek rovin

Definice 1.47

Svazkem přímek v rovině rozumíme množinu všech přímek, které buď procházejíc jedním pevným bodem nebo jsou všechny rovnoběžné. První případ nazveme *svazkem prvního druhu,* druhý *svazkem druhého druhu.*

Svazek přímek je jednoznačně určen dvěmi přímkami. Následující věta říká, jak pomocí dvou přímek můžeme celý svazek parametrizovat.

Věta 1.48

Jsou dány dvě přímky $p_1 \equiv L_1(x,y) = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ a $p_2 \equiv L_2(x,y) = a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Jsou-li různoběžné, pak přímka p patří do jimi určeného svazku 1. druhu právě tehdy, když $p \equiv \lambda_1 L_1(x,y) + \lambda_2 L_2(x,y) = 0$ pro $\lambda_1^2 + \lambda_1^2 > 0$. Jsou-li přímky p_1, p_2 rovnoběžné, pak p patří do svazku 2. druhu jimi určeného právě tehdy, když $p \equiv \lambda_1 L_1(x,y) + \lambda_2 L_2(x,y) = 0$ pro λ_1, λ_2, která nejsou řešením soustavy

$$\begin{array}{ccccc} a_1\lambda_1 & + & a_2\lambda_2 & = & 0 \\ b_1\lambda_1 & + & b_2\lambda_2 & = & 0 \end{array} \tag{6}$$

Důkaz: provedeme zvlášť pro svazek 1. a 2. druhu.

Svazek 1. druhu: Nechť $p \equiv \lambda_2 L_1(x,y) + \lambda_2 L_2(x,y) = 0$. Potom $p \equiv (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)x + (\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)y + (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2) = 0$ je rovnice přímky za předpokladu, že alespoň jeden z koeficientů u x, y je nenulový. To je v našem případě splněno právě tehdy, když buď λ_1 nebo λ_2 je nenulové. Tato přímka prochází společným bode p_1, p_2.

Naopak, nechť p je libovolná přímka patřící do svazku 1. druhu určeného p_1, p_2. Tuto přímku je možné parametrizovat pomocí jediného bodu P. Přímka p je pad dána jako spojnice bodu P s průsečíkem $p_1 \cap p_2$. Nechť $L_1(P) = -\lambda_2$ a $L_2(P) = \lambda_1$. Ukážeme, že $L(x,y) = \lambda_1 L_1(x,y) + \lambda_2 L_2(x,y) = L_2(P)L_1(x,y) - L_1(P)L_2(x,y) = 0$ je rovnice přímky p. Dosadíme do ní dva body přímky p: $L(p_1 \cap p_2) = L_2(P)0 + L_1(P)0 = 0$, $L(P) = \lambda_1\lambda_2 - \lambda_2\lambda_1 = 0$.

Svazek 2. druhu: Podmínka 6 nám zřejmě zaručuje, že $\lambda_1 L_1(x,y) + \lambda_2 L_2(x,y) = 0$ je právě rovnice přímky. Je třeba ukázat, že jsou-li p_1, p_2 rovnoběžné, pak je i p s nimi rovnoběžná. Stačí si ale uvědomit, že hodnost obou následující matice je rovna 1:

$$h\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 & \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \end{pmatrix} = 1$$

Zbytek důkazu, tedy nalezení rovnice tvaru $\lambda_1 L_1(x,y) + \lambda_2 L_2(x,y) = 0$ pro každou přímku ze svazku 2. druhu. se provede analogicky případu svazku 1. druhu. □

Definice 1.49

Svazkem rovin 1. druhu v třírozměrném prostoru rozumíme množinu rovin, které procházejí danou přímkou p. *Svazkem rovin 2. druhu* je množina rovin, které jsou rovnoběžné.

I v třírozměrném prostoru je svazek rovin jednoznačně určen dvěmi rovinami.

Věta 1.50

Jsou dány dvě roviny $p_1 \equiv L_1(x,y,z) = a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ a $p_2 \equiv L_2(x,y,z) = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Jsou-li různoběžné, pak rovina p patří do jimi určeného svazku 1. druhu právě tehdy, když $p \equiv \lambda_1 L_1(x,y,z) + \lambda_2 L_2(x,y,z) = 0$

pro $\lambda_1^2 + \lambda_1^2 > 0$. Jsou-li roviny p_1, p_2 rovnoběžné, pak p patří do svazku 2. druhu jimi určeného právě tehdy, když $p \equiv \lambda_1 L_1(x,y,z) + \lambda_2 L_2(x,y,z) = 0$ pro λ_1, λ_2, která nejsou řešením soustavy

$$\begin{array}{rcrcl} a_1\lambda_1 & + & a_2\lambda_2 & = & 0 \\ b_1\lambda_1 & + & b_2\lambda_2 & = & 0 \\ c_1\lambda_1 & + & c_2\lambda_2 & = & 0 \end{array} \tag{7}$$

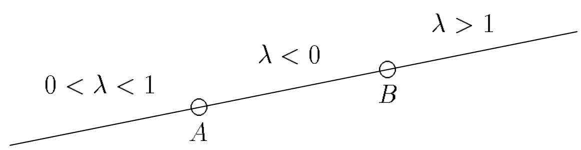
Důkaz: Provede se naprosto analogicky důkazu věty 1.48. □

Poznámka 1.51
Lze takto analogicky zavést svazky nadrovin v prostoru libovolné dimenze. Musíme však rozlišovat od *trsu rovin,* což je množina rovin procházejících jedním pevným bodem.

1.7 Afinní zobrazení

Definice 1.52
Buďte $A, B, C \in \mathcal{A}_n$ tři různé kolineární body (tzn. ležící na jedné přímce). Jednoznačně dané číslo λ takové, že $\overline{AC} = \lambda\overline{BC}$ $(\lambda \neq 0, 1)$ nazýváme *dělící poměr bodu* C vzhledem k bodům A, B a zapisujeme $\lambda = (C; A, B)$.

Podle dělícího poměru můžeme poznat, jak je bod C vzhledem k bodům A, B na přímce umístěn:



Vezmeme-li v úvahu i případy $\lambda = 0, 1$ (tedy $C = A$ resp. $C = B$), je zobrazení bodů na přímce AB na reálnou osu dané dělícím poměrem bijekce.

Věta 1.53
Nechť A, B, C jsou tři kolineární body a $\lambda = (C; A, B)$. Pak platí:

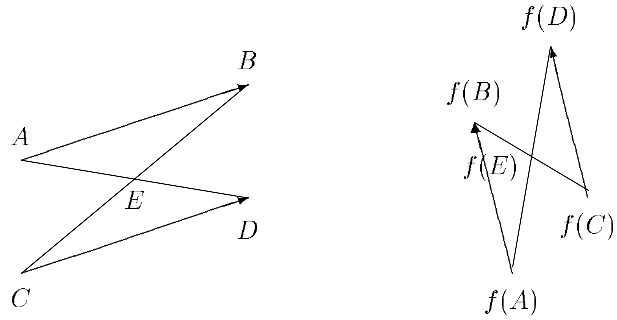
$$\begin{array}{rcl} (C;B,A) & = & \dfrac{1}{\lambda} \\ (B;A,C) & = & 1-\lambda \\ (B;C,A) & = & \dfrac{1}{1-\lambda} \\ (A;C,B) & = & \dfrac{\lambda}{\lambda-1} \\ (A;B,C) & = & \dfrac{\lambda-1}{\lambda} \end{array}$$

Důkaz: prostým dosazením. □

Definice 1.54
Zobrazení $f : \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{A}'_m$ se nazývá *afinní zobrazení,* jestliže splňuje následující podmínku:

> Pro každé tři různé kolineární body $A, B, C \in \mathcal{A}_n$ platí, že buď $f(A) = f(B) = f(C)$ nebo $f(A), f(B), f(C)$ jsou tři různé kolineární body a $(C; A, B) = (f(C); f(A), f(B))$.

Poznámka 1.55
S afinním zobrazením f budeme dále sdružovat zobrazení $\varphi_f : Z(\mathcal{A}_n) \longrightarrow Z(\mathcal{A}'_m)$ dané právě zobrazením bodů podle f. Tedy $\varphi_f(\vec{u}) = \varphi_f(\overline{AB}) \stackrel{df.}{=} \overline{f(A)f(B)} \in Z(\mathcal{A}'_m)$. Abychom mohli tuto definici použít, je třeba dokázat, že nezáleží na výběru reprezentantů A, B pro vektor $\vec{u}$. Jinými slovy, je nutno ověřit, že jestliže $\overline{AB} = \overline{CD}$, pak také $\overline{f(A)f(A)} = \overline{f(C)f(D)}$. To nám však jistě zaručí afinita. Jsou-li totiž vektory $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$ totožné, pak $ACDB$ je rovnoběžník. Ten se zobrazí opět na rovnoběžník $f(A)f(C)f(D)f(B)$:



Stačí si totiž uvědomit, že bod E jako průsečík diagonál v rovnoběžníku tyto diagonály půlí. Protože dělící poměr zůstane zachován, bude i v rovnoběžníku $f(A)f(C)f(D)f(B)$ bod $f(E)$ půlit diagonály.

Věta 1.56

Zobrazení φ_f je lineární.

Důkaz: Je třeba ukázat, že φ_f zachovává operace sčítání vektorů a násobení vektorů skalárem:

$\varphi_f(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi_f(\overline{AB}+\overline{BC}) = \varphi_f(\overline{AC}) = \overline{f(A)f(B)} = \overline{f(A)f(B)}+\overline{f(B)f(C)} = \varphi_f(\overline{AB})+\varphi_f(\overline{BC}) = \varphi_f(\vec{u})+\varphi_f(\vec{v})$

Nechť $\vec{v} = k\vec{u}$ a $\vec{u} = \overline{AB}$. Pak existuje právě jeden bod $C \in \langle A, B\rangle$ tak, že $\vec{v} = \overline{AC}$. Tedy $\overline{AC} = k\overline{AB}$ a můžeme psát $k = (A; C, B)$. Protože f je afinní, pak $k = (f(A); f(C), f(B))$, tedy $\overline{f(A)f(C)} = k\overline{f(A)f(B)}$. Bude tedy $\varphi_f(k\vec{u}) = k\varphi_f(\vec{u})$. Pokud A, B, C se zobrazí do jediného bodu, je podmínka splněna triviálně. □

Zobrazení φ_f nazýváme *asociované (přidružené) lineární zobrazení k afinnímu zobrazení* f.

Afinita zobrazení f a linearita zobrazení φ_f jsou ekvivalentní podmínky. Může se proto uvádět i jiná definice afinního zobrazení (o které se později dá dokázat, že zachovává dělící poměr):

Definice 1.57

Zobrazení $f : \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{A}'_m$ se nazývá *afinní,* jestliže platí:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_n \times \mathcal{A}_n & \xrightarrow{f\times f} & \mathcal{A}'_m \times \mathcal{A}'_m \\ \downarrow_{\mathcal{A}_n} & & \downarrow_{\mathcal{A}'_m} \\ Z(\mathcal{A}_n) & \xrightarrow{\varphi_f} & Z(\mathcal{A}'_m) \end{array}$$

a φ_f je lineární.

Nechť obrazem bodu P je $f(P)$ a nechť je dáno asociované zobrazení φ_f. Pak libovolný bod X umíme zobrazit: $f(X) = f(P) + \varphi_f(\overline{PX})$. Je tedy afinní zobrazení jednoznačně určeno obrazem jednoho bodu a svým asociovaným lineárním zobrazením.

Obrazem podprostoru $\mathcal{B} = \{A, W\}$ musí být opět podprostor $f(\mathcal{B}) = \{f(A), \varphi_f(W)\}$.

Věta 1.58

Afinní zobrazení zachovává rovnoběžnost podprostorů (přestože jejich dimenze se mohou měnit).

Důkaz: vyplývá z toho, že lineární zobrazení φ_f zachovává inkluzi vektorových podprostorů. □

Věta 1.59

Nechť $P_0, \ldots, P_n$ jsou body v obecné poloze v $\mathcal{A}_n$. Nechť $P'_0, \ldots, P'_n$ jsou libovolné body z $\mathcal{A}'_m$. Pak existuje právě jedno afinní zobrazení $F : \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{A}'_m$ takové, že $f(P_i) = P'_i$.

Důkaz: Protože $P_0, \ldots, P_n$ jsou v obecné poloze, jsou vektory $\overline{P_0P_1}, \overline{P_0P_2}, \ldots, \overline{P_0P_n}$ lineárně nezávislé. Potom existuje právě jedno zobrazení $\varphi : Z(\mathcal{A}_n) \longrightarrow Z(\mathcal{A}'_m)$ takové, že $\varphi(\overline{P_0P_i}) = \overline{P'_0P'_i}$. Najdeme nyní právě jedno zobrazení f, jehož asociovaným lineárním zobrazením je φ a které zobrazuje body P_i na P'_i. To můžeme zadat např. předpisem: $f(X) = P'_0 + \varphi(\overline{P_0X})$. □

Vynasnažíme se nyní najít nějakou jednoznačnou reprezentaci afinních zobrazení. Nechť $f : \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{A}'_m$ je afinní zobrazení. Nechť $\mathcal{R} = \langle P, \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\rangle$ je reper $\mathcal{A}_n$ a $\mathcal{S} = \langle Q, \vec{d_1}, \ldots, \vec{d_m}\rangle$ je reper $\mathcal{A}'_m$. Budeme zobrazovat bod $\mathcal{A}_n \ni X = [x_1, \ldots, x_n]$ do bodu $[y_1, \ldots, y_m] = Y \in \mathcal{A}'_m$. Je tedy $X = P + \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e_i}$ a $f(X) = Y = Q + \sum_{j=1}^{m} y_i\vec{d_i}$.

Bod $f(X)$ si můžeme rozepsat také pomocí zobrazení f a φ_f: $f(X) = f(P) + \sum_{i=1}^n x_i \varphi_f(\vec{e_i}) = Q + \sum_{j=1}^m b_j \vec{d_j} + \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^m a_{ij} \vec{d_j}$. Dostáváme tak soustavu rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc} y_1 & = & a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & + & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ y_m & = & a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & + & b_m \end{array} \tag{8}$$

Pro každou souřadnici y_j tedy platí: $y_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}x_j + b_i$. Maticový zápis těchto rovnic:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{9}$$

Zobrazení f je tedy jednoznačně zadáno maticí $A(m/n)$ a vektorem (b): $f(X)_{\mathcal{S}} = AX_{\mathcal{R}} + (b)$. Zkusme do tohoto vztahu dosadit bod P: $f(P) = AP_{\mathcal{R}} + (b) = A(0)_{\mathcal{R}} + (b) = (0) + (b) = (b)$. Vektor (b) je vlastně vektor souřadnic obrazu bodu P v reperu $\mathcal{S}$. Budeme tedy psát $f(P)_{\mathcal{S}}$ místo (b).

Zkusíme také vyjádřit zobrazení φ_f pomocí matice A a vektoru $f(P)_{\mathcal{S}}$: $\varphi_f(\vec{u}) = \varphi_f(\overline{XY}) = f(Y) - f(X) = AY_{\mathcal{R}} + f(P)_{\mathcal{S}} - AX_{\mathcal{R}} - f(P)_{\mathcal{S}} = A(Y_{\mathcal{R}} - X_{\mathcal{R}}) = A(\vec{u})$. Zjistili jsme tedy, že A je matice lineárního zobrazení φ_f.

Jednoznačné zadání afinního zobrazení je možné pomocí obrazu jednoho bodu a asociovaného lineárního zobrazení. Nyní již také víme, že nejlepší způsob zadání je obraz počátku souřadné soustavy prostoru, ze kterého zobrazujeme, a matice asociovaného lineárního zobrazení.

Při zobrazení prostoru $\mathcal{A}_n$ na sebe je matice A čtvercová. Je-li regulární, je odpovídající afinní zobrazení bijekcí, a nazýváme jej *afinní transformací prostoru* $\mathcal{A}_n$. Např. transformace souřadnic do jiné souřadné soustavy je afinní transformací prostoru souřadnic $\mathbf{R}^n$ na sebe.

2 Euklidovský bodový prostor

V této kapitole se budou hojně vyskytovat další pojmy z lineární algebry. Proto je zde ve stručnosti připomeneme. Jedná se o *Euklidovský vektorový prostor.*

Zavedeme operaci *skalárního součinu* $(,) : V \times V \longrightarrow \mathbf{R}$ a budeme značit $(\vec{u}, \vec{v})$ skalární součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$. O vektorech $\vec{u}, \vec{v}$ řekneme, že jsou kolmé, pokud $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ a značíme $\vec{u} \perp \vec{v}$. Báze $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ je *ortogonální,* pokud $\vec{e_i} \perp \vec{e_j}$ pro $i \neq j$. Tato báze je *ortonormální,* pokud jsou všechny vektory normované (tedy $(\vec{e_i}, \vec{e_i}) = 1$). Podmínku ortonormality můžeme jednoduše zapsat tak, že $(\vec{e_i}, \vec{e_j}) = \delta_{ij}$, když (δ_{ij}) považujeme za jednotkovou matici.

Pro každé dva vektory $\vec{u}, \vec{v}$ platí, že $(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$, jestliže $(u_1, \ldots, u_n)$ a $(v_1, \ldots, v_n)$ jsou jejich souřadnice vzhledem k ortonormální bázi.

Je-li $W \subseteq V$, pak $W^\perp$ je označení pro tzv. *ortonormální doplněk prostoru* W v prostoru V. Dá se pak psát $V = W \dot{+} W^\perp$, kde $\dot{+}$ je tzv. *přímý součet prostorů.*

V euklidovských vektorových prostorech platí také důležitá *Cauchyho nerovnost:* $|(\vec{u}, \vec{v})| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$, kde $\|\vec{u}\|$ je označení pro $\sqrt{(\vec{u}, \vec{u})}$.

2.1 Euklidovský bodový prostor a kartézská souřadná soustava

Definice 2.1

Euklidovský bodový prostor je afinní prostor, jehož zaměření je euklidovský vektorový prostor. Budeme jej značit $\mathcal{E}_n$.

Definice 2.2

Vzdáleností dvou bodů A, B v $\mathcal{E}_n$ rozumíme číslo $|AB| = \|\overline{AB}\|$.

Věta 2.3

Pro každé tři body $A, B, C \in \mathcal{E}_n$ platí:

1. $|AB| = |BA|$

2. $|AB| \geq 0$
3. $|AB| = 0 \Longleftrightarrow A = B$
4. $|AB| + |BC| \geq |AC|$ (tzv. trojúhelníková nerovnost)

Důkaz: plyne z vlastností vektorového součinu. □

Definice 2.4
Kartézská souřadná soustava Euklidovského bodového prostoru je takový jeho reper, jehož bázové vektory tvoří ortonormální bázi v příslušném zaměření.

Snadno se dá odvodit, že vzdálenost dvou bodů $A = [a_1, \ldots, a_n]_{\mathcal{R}}$ a $B = [b_1, \ldots, b_n]_{\mathcal{R}}$ se dá spočítat podle jejich souřadnic v každé kartézské souřadné soustavě $\mathcal{R}$ takto: $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$.

Mějme nyní dvě kartézské souřadné soustavy $\mathcal{R} = \langle P; \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n} \rangle$ a $\mathcal{S} = \langle Q; \vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n} \rangle$. Uvažujme rovnici přechodu od reperu $\mathcal{R}$ k reperu $\mathcal{S}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{S}} + \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}_{\mathcal{R}},$$

kde $[x_1, \ldots, x_n]_{\mathcal{R}} = [y_1, \ldots, y_n]_{\mathcal{S}}$ jsou souřadnice jednoho bodu v obou reperech.

V rovnici pro vektory pouze vynecháme přičtení sloupcového vektoru dávajícího souřadnice bodu Q v reperu $\mathcal{R}$:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{\mathcal{S}},$$

kde $(u_1, \ldots, u_n)_{\mathcal{R}} = (v_1, \ldots, v_n)_{\mathcal{S}}$ jsou souřadnice jednoho vektoru v obou reperech. Dosadíme-li do pravé strany vektory $\vec{f_i}$, dostaneme $\vec{f_i} = (a_{1i}, \ldots, a_{ni})_{\mathcal{R}}$ (tedy i-tý sloupec matice A). Protože $\mathcal{R}$ je kartézská souřadná soustava, pak $(\vec{f_i}, \vec{f_j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}$. Protože i $\mathcal{S}$ je kartézská souřadná soustava, platí: $(\vec{f_i}, \vec{f_j}) = \delta_{ij}$. Celkem $\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}$. Levá strana tohoto výrazu nám však dává i-tý sloupec a j-tý řádek součinu $A^T A$. (A^T je transformovaná, tzn. pokud $A = (a_{ij})_{i=1\ldots n}^{j=1\ldots n}$, pak $A^T = (a_{ji})_{j=1\ldots n}^{i=1\ldots n}$.) Proto $A^T A = E$ (jednotková matice). Z toho také plyne, že $|A| = 1$.

2.2 Kolmost podprostorů

Definice 2.5
Nechť V je euklidovský vektorový prostor, U, W jeho podprostory. Řekneme, že U, W jsou *kolmé* ve V, jestliže $W \subseteq U^\perp$ nebo $W \supseteq U^\perp$. Řekneme, že U, W jsou *totálně kolmé* ve V, jestliže $W = U^\perp$. Kolmost zapisujeme $U \perp W$.

Poznámka 2.6
Je-li $W \subseteq U^\perp$, pak $dim\, U + dim\, W \leq dim\, V$. Rovnost nastane v případě totální kolmosti. Představíme-li si (předčasně) situaci v třírozměrném afinním prostoru, pak U může reprezentovat zaměření přímky. Jeho $U^\perp$ je zaměření rovin, které jsou kolmé na U. Pak i každá přímka se zaměřením $W \subset U^\perp$, tedy obsažená v některé takové rovině, je kolmá na U.

Je-li $W \supseteq U^\perp$, pak $U + W = V$. To je proto, že $U \dot{+} U^\perp = V$. Když za $U^\perp$ dosadíme W, součet už nebude přímý, ale bude platit jako nepřímý. Je-li U zaměření roviny v třírozměrném afinním prostoru, pak $U^\perp$ je zaměření všech přímek kolmých na rovinu se zaměřením U. Zároveň každá rovina, která obsahuje takovou přímku, a tedy pro její zaměření W platí $W \supset U^\perp$, je kolmá na původní rovinu.

Věta 2.7
Nechť W a U jsou kolmé ve V. Pak platí:

1. $dim\, W + dim\, U \leq dim\, V \Longrightarrow W \cap U = \{\vec{0}\}$
2. $dim\, W + dim\, U \geq dim\, V \Longrightarrow W + U = V$

Důkaz: vyplývá přímo z vlastností ortogonálních doplňků prostorů a je zřejmý, když máme na mysli příklady z předchozí poznámky. □

Definice 2.8

Nechť $\mathcal{B} = \{B, W\}$ a $\mathcal{C} = \{C, U\}$ jsou euklidovské podprostory v $\mathcal{E}_n$. Řekneme, že $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou *kolmé* v $\mathcal{E}_n$, jestliže jsou kolmé jejich zaměření W, U v zaměření $Z(\mathcal{E}_n)$. Řekneme, že $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou *totálně kolmé* v $\mathcal{E}_n$, jestliže jejich zaměření W, U jsou totálně kolmé v zaměření $Z(\mathcal{E}_n)$. Kolmost euklidovských bodových prostorů zapisujeme $\mathcal{B} \perp \mathcal{C}$.

Kolmost nezávisí na umístění podprostorů, ale pouze na jejich zaměření.

Věta 2.9

Nechť $\mathcal{B} = \{B, W\}$ je podprostor v $\mathcal{E}$ a R je libovolný bod v $\mathcal{E}$. Pak existuje právě jeden podprostor procházející bodem R, který je totálně kolmý na $\mathcal{B}$.

Důkaz: Tímto podprostorem je $\mathcal{C} = \{R, W^\perp\}$. $\mathcal{C}$ má obě požadované vlastnosti, tedy prochází bodem R a jeho zaměřením je $W^\perp$. Jedním bodem a zaměřením je však prostor dán již jednoznačně, proto $\mathcal{C}$ je jediný takový. □

Věta 2.10

Nechť $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou totálně kolmé v $\mathcal{E}$. Pak $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ je právě jeden bod.

Důkaz: Nejprve ukážeme, že průnik je neprázdný. Vezměme libovolné body $B \in \mathcal{B}$ a $C \in \mathcal{C}$. Protože $Z(\mathcal{B}) \dot{+} Z(\mathcal{C}) = Z(\mathcal{E})$, dá se vektor jednoznačně zapsat jako $\overline{BC} = \vec{u} + \vec{v}$, kde $\vec{u} \in Z(\mathcal{B})$ a $\vec{v} \in Z(\mathcal{C})$. Existují jistě body $B' \in \mathcal{B}$ a $C' \in \mathcal{C}$, pro které platí, že $\vec{u} = \overline{BB'}$ a $\vec{v} = \overline{C'C}$. Tedy $\overline{BC} = \overline{BB'} + \overline{C'C}$. Z axiomu afinního prostoru ale plyne, že $B' = C'$ a tento bod leží v průniku prostorů $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$.

Spočítáme nyní dimenzi průniku prostorů $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ (musí být prostor): $dim(Z(\mathcal{B} \cap \mathcal{C})) = dim(Z(\mathcal{B}) \cap Z(\mathcal{C})) = dim(Z(\mathcal{B}) \cap Z(\mathcal{B}^\perp)) = dim(\vec{0}) = 0$, tedy tento průnik je jediný bod. □

Tedy např. průnik dvou totálně kolmých rovin ve čtyřrozměrném afinním prostoru je jediný bod, což si asi těžko dokážeme představit.

Věta 2.11

Nechť $\mathcal{B} = \{B, W\}$ je podprostor v $\mathcal{E}$ a $R \notin \mathcal{B}$ je bod v $\mathcal{E}$. Pak existuje právě jedna přímka p taková, že obsahuje bod R, je kolmá na $\mathcal{B}$ a $p \cap \mathcal{B}$ je bod.

Důkaz: Uvažme prostor $\mathcal{C} = \{R, Z(\mathcal{B})^\perp\}$. Pak podle věty 2.10 je $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ právě jeden bod. Ten si označme P. Přímka $p = \langle R, P \rangle$ má požadované vlastnosti. Přitom každá taková musí obsahovat oba body R, P, tedy je totožná s p. □

Definice 2.12

Přímka p z předchozí věty se nazývá *kolmice* spuštěná z bodu R na podprostor $\mathcal{B}$. Bod P se nazývá *pata kolmice.*

Věta 2.13

Nechť podprostor $\mathcal{B}_k$ má v nějaké kartézské souřadné soustavě obecné vyjádření

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-k,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{n-k,n}x_n & = & b_{n-k} \end{array} \tag{10}$$

Označme $\vec{a_i} = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ pro $i = 1 \ldots n-k$. Pak $(\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_{n-k}})$ tvoří bázi vektorového prostoru $Z(\mathcal{B})^\perp$.

Důkaz: $Z(\mathcal{B})$ je obecné řešení zhomogenizované soustavy 10. Pro všechny vektory $\vec{x} = [x_1, \ldots, x_n] \in Z(\mathcal{B})$ tedy platí: $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0$ pro $i = 1 \ldots n-k$. To je však ekvivalentní s tím, že $(\vec{x}, \vec{a_i}) = 0$, a tedy $\vec{x} \perp \vec{a_i}$. Všechny vektory $\vec{a_i}$ tedy patří do $Z(\mathcal{B})^\perp$. Protože jejich počet je $n-k$, stejně jako dimenze $Z(\mathcal{B})^\perp$, a všechny vektory $\vec{a_i}$ jsou lineárně nezávislé, tvoří bázi tohoto prostoru. □

Důsledek 2.14

Je-li $\mathcal{N} \equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$, pak $Z(\mathcal{N})^\perp = L(\vec{n} = (a_1, \ldots, a_n))$. $\vec{n}$ se nazývá *normálovým vektorem nadroviny.* Každou přímku $p = \{A; L(\vec{n})\}$ nazýváme *normálou* nadroviny $\mathcal{N}$.

Věta 2.15

Nechť jsou dány dvě nadroviny $\mathcal{N}_1$ a $\mathcal{N}_2$ v $\mathcal{E}_n$, kde $n \geq 2$. Pak tyto nadroviny jsou kolmé právě tehdy, když jsou kolmé jejich normálové vektory.

Důkaz: Nechť $\mathcal{N}_1 \equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = a$ a $\mathcal{N}_2 \equiv b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = b$. Jsou-li nadroviny kolmé, pak buď $Z(\mathcal{N}_1)^\perp \subseteq Z(\mathcal{N}_2)$ nebo $Z(\mathcal{N}_2)^\perp \subseteq Z(\mathcal{N}_1)$. Oba případy jsou symetrické, proto nechť nastane první z nich. Je tedy vektor $(a_1, \ldots, a_n)$ prvkem $Z(\mathcal{N}_2)$. Proto $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = 0$. Z toho plyne, že $\vec{n_1} \perp \vec{n_2}$.

Naopak, jsou-li vektory $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ kolmé, pak $a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = 0$. Je tedy $Z(\mathcal{N}_1)^\perp \subseteq z(\mathcal{N}_2)$ (zároveň také $Z(\mathcal{N}_2)^\perp \subseteq Z(\mathcal{N}_1)$). Tedy $\mathcal{N}_1 \perp \mathcal{N}_2$. □

2.3 Vzdálenost podprostorů

Definice 2.16
Nechť $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ jsou dva podprostory v $\mathcal{E}_n$. *Vzdáleností* $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ rozumíme číslo $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \min(|XY|; X \in \mathcal{B}, Y \in \mathcal{C})$.

Definice 2.17
Nechť U je vektorový podprostor ve V a $\vec{x}$ je libovolný vektor ve V. Pak vektor $\vec{x}$ lze jednoznačně rozložit na vektory $\vec{x_1}$ a $\vec{x_2}$ takové, že $\vec{x_1} + \vec{x_2} = \vec{x}$ a $\vec{x_1} \in U, \vec{x_2} \in U^\perp$. Potom vektor $\vec{x_1}$ nazveme *ortogonální projekcí vektoru* $\vec{x}$ *vzhledem k podprostoru* U a značíme $p_U\vec{x}$, a vektor $\vec{x_2}$ nazveme *ortogonální komponentou vektoru* $\vec{x}$ *vzhledem k podprostoru* U a značíme $k_U\vec{x}$.

Věta 2.18
Nechť $\mathcal{B} = \{B, W\}$ a $\mathcal{C} = \{C, U\}$ jsou podprostory v $\mathcal{E}_n$. Pak $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \|k_{W+U}\overline{BC}\|$.

Důkaz: Rozložíme vektor $\overline{BC}$ na $\vec{x} + \vec{z}$, kde $\vec{z} = k_{W+U}\overline{BC}$. Tedy $\vec{x} \in W + U$ a $\vec{z} \in (W + U)^\perp$. Dokážeme nejprve, že $|XY| \geq \|\vec{z}\|$ pro libovolné $X \in \mathcal{B}, Y \in \mathcal{C}$:
$\overline{XY} = \overline{XB} + \overline{BC} + \overline{CY} = \underbrace{(\overline{XB} + \overline{CY} + \vec{x})}_{\in W+U} + \underbrace{\vec{z}}_{\in (W+U)^\perp}$. Protože druhá mocnina vzdálenosti $|XY|^2 = (\overline{XY}, \overline{XY})$ je rovna $((\overline{XB} + \overline{CY} + \vec{x}) + \vec{z}, (\overline{XB} + \overline{CY} + \vec{x}) + \vec{z})$ a protože složky $\overline{XB} + \overline{CY} + \vec{x}$ a $\vec{z}$ jsou kolmé, je $|XY|^2 = \|\overline{XB} + \overline{CY} + \vec{x}\|^2 + \|\vec{z}\|^2 \geq \|\vec{z}\|^2$. Proto také $|XY| \geq \|\vec{z}\|$.

Dále je třeba dokázat, že skutečně existují body $X \in \mathcal{B}, Y \in \mathcal{C}$ takové, že $|XY| = \|\vec{z}\|$. Ty najdeme opět pomocí rozložení vektoru $\overline{BC}$ na složky podle podprostoru $W + U$: $\overline{BC} = \vec{x} + \vec{z}$, kde $\vec{x} \in W + U$ a $\vec{z} \in (W + U)^\perp$. Vektor $\vec{x}$ dále rozložíme libovolně na komponenty $\vec{x} = \vec{w} + \vec{u}$, kde $\vec{w} \in W$ a $\vec{u} \in U$. Potom $C = B + \vec{w} + \vec{u} + \vec{z}$ a tedy $\underbrace{C - \vec{u}}_{Y_0} = \underbrace{(B + \vec{w})}_{X_0} + \vec{z}$. Vidíme, že $X_0 \in \mathcal{B}, Y_0 \in \mathcal{C}$ a zároveň $|X_0Y_0| = \|\vec{z}\|$. □

Věta 2.19
Nechť $\mathcal{B}$ je podprostor v $\mathcal{E}_n$ a $R \notin \mathcal{B}$ je bod. Pak $v(R, \mathcal{B}) = \|\overline{RP}\|$, kde P je pata kolmice spuštěné z bodu P na podprostor $\mathcal{B}$.

Důkaz: Je třeba dokázat, že $\|\overline{RX}\| \geq \|\overline{RP}\|$ pro všechna $X \in \mathcal{B}$. Rozložíme $\overline{RX}$ na $\overline{RP} + \overline{PX}$. Tedy $\|\overline{RP}\|^2 = (\overline{RP}+\overline{PX}, \overline{RP}+\overline{PX}) = \|\overline{RP}\|^2 + 2(\overline{RP}, \overline{PX}) + \|\overline{PX}\|^2$. Protože však $\overline{RP} \perp \mathcal{B}$, je také $\overline{RP} \perp \overline{PX}$ a tedy $(\overline{RP}, \overline{PX}) = 0$. Proto $\|\overline{RX}\|^2 \geq \|\overline{RP}\|^2$, z čehož plyne kýžený výsledek. □

Důsledek 2.20
Nechť $\mathcal{N} \equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$ je nadrovina a $R = [r_1, \ldots, r_n]$ je bod. Pak

$$v(R, \mathcal{N}) = \frac{|a_1r_1 + \cdots + a_nr_n + a|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} \tag{11}$$

Důkaz: Podle předcházející věty víme, že $v(R, \mathcal{N}) = \|RP\|$, kde P je pata kolmice spuštěné z R na $\mathcal{B}$. Nechť $P = R + t_0\vec{n}$, kde $\vec{n} = (a_1, \ldots, a_n)$ je normálový vektor nadroviny $\mathcal{N}$, tedy $p_i = r_i + t_0a_i$ pro $i = 1 \ldots n$, je-li $P = [p_1, \ldots, p_n]$. Protože bod P leží na $\mathcal{N}$, je $a_1(r_1 + t_0a_1) + \cdots + a_n(r_n + t_0a_n) + a = 0$. Z toho dostáváme, že $t_0 = \frac{-a_1r_1 - \cdots - a_nr_n - a}{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$. Do vztahu $\|RP\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i - r_i)^2}$ dosadíme $p_i - r_i = t_0a_i$: $\|RP\| = \sqrt{t_0^2 \sum_{i=1}^n a_i^2} = \sqrt{\frac{(-\sum_{i=1}^n a_ir_i - a)^2}{(\sum_{i=1}^n a_i^2)^2} \sum_{i=1}^n a_i^2} = \frac{|\sum_{i=1}^n a_ir_i + a|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}$. □

Věta 2.21
Nechť $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ jsou rovnoběžné podprostory a $dim\,\mathcal{B} \leq dim\,\mathcal{C}$. Pak $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = v(B, \mathcal{C})$, kde B je libovolný bod podprostoru $\mathcal{B}$.

Důkaz: Protože $dim\,\mathcal{B} \leq dim\,\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}\|\mathcal{C}$, nastane případ $Z(\mathcal{B}) \subseteq Z(\mathcal{C})$ z definice rovnoběžnosti podprostorů (1.37). Proto $Z(\mathcal{C})^\perp \subseteq Z(\mathcal{B})^\perp$. Je-li tedy $\vec{u}$ směr kolmý na $\mathcal{C}$, je také kolmý na $\mathcal{B}$.

Potřebujeme dokázat, že $\|XY\| \geq \|BP\|$, kde P ja pata kolmice spuštěné z bodu B na $\mathcal{C}$. Rozložíme $\overline{XY}$ na $\overline{XB} + \overline{BP} + \overline{PY}$. Tedy $\|XY\|^2 = \|\overline{XB} + \overline{BP} + \overline{PY}\|^2 = \|\overline{XB} + \overline{PY}\|^2 + 2(\overline{XB} + \overline{PY}, \overline{BP}) + \|BP\|^2$. Protože vektor $\overline{BP}$ je kolmý na $\mathcal{C}$, je podle předchozího odstavce kolmý i na $\mathcal{B}$. Je tedy kolmý na vektory $\overline{XB} \in Z(\mathcal{B})$ i $\overline{PY} \in Z(\mathcal{C})$, proto $(\overline{XB} + \overline{PY}, \overline{BP}) = 0$. Z toho dostáváme $\|XY\|^2 = \|\overline{XB} + \overline{PY}\|^2 + \|BP\|^2 \geq \|BP\|^2$. □

Definice 2.22
Nechť p, q jsou dvě mimoběžné přímky. Pak jejich příčka, která je kolmá na p i q, se nazývá *osa mimoběžek* p, q.

Věta 2.23
Osa mimoběžek je určena jednoznačně.

Důkaz: Mějme mimoběžky $p = \{A, L(\vec{u})\}$ a $q = \{B, L(\vec{v})\}$. Budeme pracovat pouze v třírozměrném prostoru $L(\vec{u}, \vec{v}, \overline{AB})$, protože řešení se nemůže jinam uchýlit. Pak vektorové prostory $L(\vec{u})^{\perp}$ a $L(\vec{v})^{\perp}$, které jsou dvourozměrné, nemohou být rovnoběžné. Je tedy jejich průnikem jednorozměrný prostor $L(\vec{x})$. Osa p, q může mít zaměření pouze $L(\vec{x})$, jinak by nebyla kolmá na p i q.

Dále budeme postupovat sporem. Nechť $o_1 = \{C, L(\vec{x})\}$ a $o_2 = \{D, L(\vec{x})\}$ jsou dvě osy p, q. Průsečíky o_1 s p, q označíme jako P_1, Q_1 a průsečíky o_2 s p, q jako P_2, Q_2. Protože vektory $\overline{P_1Q_1}, \overline{P_2Q_2}$ jsou rovnoběžné, existuje rovina, ve které leží všechny čtyři tyto body. V této rovině tedy leží celá přímka $p = \langle P_1, P_2\rangle$ i $q = \langle Q_1, Q_2\rangle$. Potom jsou ale p, q rovnoběžné nebo různoběžné, ale nikoli mimoběžné, což je spor. □

Věta 2.24
Nechť p, q jsou mimoběžky a P, Q jsou jejich průsečíky s osou. Pak $v(p, q) = |PQ|$.

Důkaz: Je třeba dokázat, že $\|\overline{XY}\| \geq \|\overline{PQ}\|$ pro libovolné body $X \in p, Y \in q$. Rozložíme $\overline{XY}$ na $\overline{XP} + \overline{PQ} + \overline{QY}$ a dostaneme: $\|\overline{XY}\|^2 = \|\overline{XP} + \overline{PQ} + \overline{QY}\|^2 = \|\overline{XP} + \overline{QY}\|^2 + 2(\overline{XP} + \overline{QY}, \overline{PQ}) + \|\overline{PQ}\|^2$. Díky kolmosti osy $\langle P, Q\rangle$ na obě přímky je $(\overline{XP} + \overline{QY}, \overline{PQ}) = 0$, tedy $\|\overline{XY}\|^2 \geq \|\overline{PQ}\|^2$. □

2.4 Vnější součin vektorů, Grimmův determinant, ortogonální doplněk vektorů

Definice 2.25
Nechť V_n je orientovaný Euklidovský vektorový prostor s ortonormální kladnou bází $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$. Nechť $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ jsou libovolné vektory se souřadnicemi $\vec{u_i} = (u_{1i}, \ldots, u_{ni})$ vzhledem k této bázi. Pak číslo $|(u_{ij})|$ (determinant matice, která vznikne poskládáním souřadnic těchto n vektorů do sloupců) se nazývá *vnější součin vektorů* $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ a značíme je $[\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}]$.

Věta 2.26
Předchozí definice je korektní (hodnota determinantu $|(u_{ij})|$ z předchozí definice je invariantní vzhledem k libovolné kladné ortonormální bázi).

Důkaz: Zvolme nyní jinou kladnou ortonormální bázi $\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n}$. Nechť A je matice přechodu od $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$ k $\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n}$. Pak

$$\begin{pmatrix} u_{1i} \\ \vdots \\ u_{ni} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_{1i} \\ \vdots \\ v_{ni} \end{pmatrix},$$

kde $(v_{1i}, \ldots, v_{ni})$ jsou souřadnice vektoru $\vec{u_i}$ v nové bázi. Označíme-li matice $(u_{ij}) = U$ a $(v_{ij}) = V$, pak platí: $U = AV$. Proto $|U| = |AV| = |A||V|$. Protože však A je maticí přechodu od kladné ortonormální báze k jiné kladné ortonormální bázi, je $|A| = 1$ a tedy $|U| = |V|$. □

Věta 2.27
Nechť $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ jsou vektory ve V_n. Pak platí:

1. $[\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}] = 0 \iff \vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ jsou lineárně závislé
2. $[\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}] \neq 0 \iff \vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ jsou lineárně nezávislé a báze $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ je kladně orientovaná pro $[\ldots] > 0$ a záporně orientovaná pro $[\ldots] < 0$
3. $[x\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}] = x[\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}]$
4. $[\vec{u_1} + \vec{v}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}] = [\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}] + [\vec{v}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}]$
5. Nechť $\vec{h_1}, \ldots, \vec{h_n}$ je libovolná permutace vektorů $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ a t je počet inverzí v této permutaci. Pak $[\vec{h_1}, \ldots, \vec{h_n}] = (-1)^t[\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}]$

Důkaz: triviální s využitím znalosti práce s determinanty. □

Definice 2.28

Nechť V_n je orietnovaný Euklidovský vektorový prostor s kladnou bází $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$. Nechť $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k}$ jsou vektory v tomto prostoru. Pak číslo $|(\vec{u_i}, \vec{u_j})|$ nazýváme *Grammův determinant* vektorů $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k}$ a značíme $G(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k})$.

Věta 2.29

$G(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}) = [\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}]^2$

Důkaz: Stačí si uvědomit, že když vynásobíme matici $U = (u_{ij})$ s maticí U^T, dostaneme na pozici i, j výraz $\sum_{k=1}^{n} u_{ki} u_{kj}$. Proto $U^T U = ((\vec{u_i}, \vec{u_j})) = G$, a tedy $G(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}) = |G| = |U^T||U| = |U|^2 = [\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n}]^2$. □

Věta 2.30

Nechť $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k}$ je posloupnost vektorů a $\vec{z_1}, \dots, \vec{z_k}$ jsou vektory, které vznikly ortogonalizačním procesem z vektorů $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k}$. Pak $G(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k}) = G(\vec{z_1}, \dots, \vec{z_k})$.

Důkaz: Při ortogonalizačním procesu dostaneme vektory $\vec{z_i}$ takto: $\vec{z_1} = \vec{u_1}$ a $\vec{z_i} = \vec{u_i} + \alpha_{i1}\vec{u_1} + \dots + \alpha_{i,i-1}\vec{u_{i-1}}$. V determnantu $|(\vec{u_i}, \vec{u_j})|$ přičteme k i-tému řádku lineární kombinaci předchozích a nezměníme tak hodnotu determinantu. Dostaneme $|(\vec{u_i}, \vec{u_j})| = |(\vec{u_i} + \alpha_{i1}\vec{u_1} + \dots + \alpha_{i,i-1}\vec{u_{i-1}}, \vec{u_j})| = |(\vec{z_i}, \vec{u_j})|$. Stejnou operaci provedeme se sloupci, a dostaneme $|(\vec{z_i}, \vec{z_j})|$. □

Důsledek 2.31

$G(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k}) \geq 0$. $G(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k}) = 0 \iff \vec{u_1}, \dots, \vec{u_k}$ jsou lineárně nezávislé.

Důkaz: $G(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k}) = G(\vec{z_1}, \dots, \vec{z_k}) = |(\vec{z_i}, \vec{z_j})|$, kde vektory $\vec{z_1}, \dots, \vec{z_k}$ jsou ortogonální. Matice $((\vec{z_i}, \vec{z_j}))$ je tedy diagonální a platí: $G(\vec{z_1}, \dots, \vec{z_k}) = (\vec{z_1}, \vec{z_1}) \cdot \dots \cdot (\vec{z_n}, \vec{z_n})$. Protože $(\vec{z_i}, \vec{z_i}) \geq 0$, je $G(\vec{z_1}, \dots, \vec{z_k}) \geq 0$. Jsou-li vektory $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k}$ lineárně závislé, pak od jistého indexu l je při ortogonalizačním procesu $\vec{z_l} = \vec{0}$, a tedy $(\vec{z_l}, \vec{z_l}) = 0$, proto $G(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k}) = 0$. □

Grammův determinant má velice důležitá uplatnění. Dají se s jeho pomocí počítat objemy rovnoběžnostěnů a vzdálenosti podprostorů.

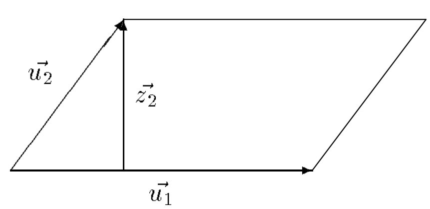
Počítáme objem rovnoběžnostěnu daného lineárně nezávislými vektory $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k}$ a bodem A. Rovnoběžnostěn je množina bodů $\{X = A + t_1\vec{u_1} + \dots + t_k + \vec{u_k}, 0 \leq t_i \leq 1\}$ a značíme jej $R_k(A; \vec{u_1}, \dots, \vec{u_k})$.

Věta 2.32

Objem rovnoběžnostěnu $R_k(A; \vec{u_1}, \dots, \vec{u_k})$ je roven $\sqrt{G(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k})}$.

Důkaz: povedeme indukcí vzhledem ke k. Pro $k = 1$ je objem rovnoběžnostěnu daného jediným vektorem délka tohoto vektoru. Je tedy $\sqrt{G(\vec{u_1})} = \|\vec{u_1}\|$ správným výsledkem.

Nechť tedy $\sqrt{G(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k})}$ je objem k-dimenzionálního rovnoběžnostěnu. Objem $(k+1)$-dimenzionálního rovnoběžnostěnu $R_{k+1}(A; \vec{u_1}, \dots, \vec{u_{k+1}})$ se spočítá jako objem R_k krát velikost výšky $\vec{z_{k+1}}$. To je vektor, který vznikne z $\vec{u_{k+1}}$ jeho ortogonalizací vzhledem k vektorům $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{k+1}}$. Na obrázku vidíme případ v rovině, tedy pro $k = 1$:



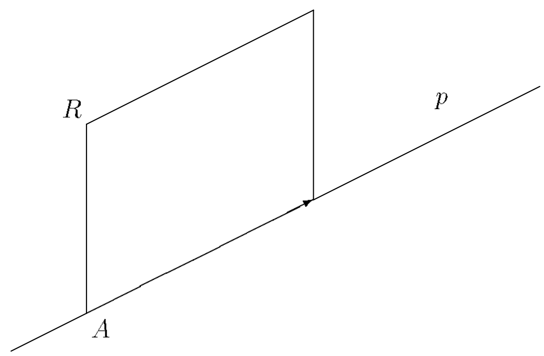
Víme, že $G(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k}, \vec{u_{k+1}}) = G(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k}, \vec{z_{k+1}})$. Protože je však $\vec{z_{k+1}}$ kolmý ke všem vektorům $\vec{u_i}$ pro $i = 1 \dots k$, je $(\vec{u_i}, \vec{z_{k+1}}) = 0$. Podle pravidel počítání s determinanty tedy dostáváme, že $G(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k}, \vec{z_{k+1}}) = G(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k}) \cdot (\vec{z_{k+1}}, \vec{z_{k+1}})$. Po odmocnění dostaneme $\sqrt{G(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k}, \vec{z_{k+1}})} = \sqrt{G(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k})} \cdot \|\vec{z_{k+1}}\|$, tedy právě objem rovnoběžnostěnu R_{k+1}. □

Důsledek 2.33

Nechť $\mathcal{B} = \{A, L(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k})\}$ je podprostor a R libovolný bod neležící v $\mathcal{B}$. Pak

$$v(R, \mathcal{B}) = \sqrt{\frac{G(\overline{AR}, \vec{u_1}, \dots, \vec{u_k})}{G(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k})}}$$

Důkaz: Vezměme v úvahu rovnoběžnostěn $R_{k+1}(A; \vec{u_1}, \dots, \vec{u_k}, \overline{AR})$. Jeho objem se spočítá jako $\sqrt{G(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k}, \overline{AR})} = G(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k}) \cdot v(R, \mathcal{B})$, jak plyne z úvah v důkazu věty 2.32. Z toho už je tvrzení zřejmé. Pro ilustraci je uveden opět příklad roviny, kde počítáme vzdálenost bodu R od přímky p:



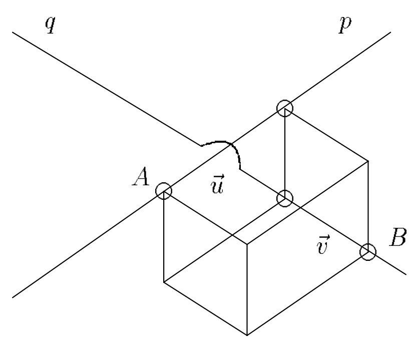
□

Důsledek 2.34

Nechť $p = \{A, L(\vec{u})\}, q = \{B, L(\vec{v})\}$ jsou dvě mimoběžky. Pak platí:

$$v(p, q) = \sqrt{\frac{G(\overline{AB}, \vec{u}, \vec{v})}{G(\vec{u}, \vec{v})}}$$

Důkaz: Číslo $G(\overline{AB}, \vec{u}, \vec{v})$ je objem rovnoběžnostěnu daného vektory $\overline{AB}, \vec{u}, \vec{v}$. Ten má dvě stěny v rovině se zaměřením $L(\vec{u}, \vec{v})$. Na obrázku vidíme mimoběžky p, q a rovnoběžnostěn, o kterém je řeč:



Vzdálenost stěn se zaměřením $L(\vec{u}, \vec{v})$ je stejná jako vzdálenost mimoběžek. Je však také výškou v rovnoběžnostěnu, odkud již plyne výsledek. □

Definice 2.35

Nechť V_n je orientovaný Euklidovský vektorový prostor, $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}$ jsou vektory ve V_n. Vektor $\vec{w}$ splňující podmínku $[\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}, \vec{x}] = (\vec{w}, \vec{x})$ pro každý vektor $\vec{x}$ ve V_n se nazývá *ortogonální doplněk vektorů* $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}$.

Věta 2.36

Nechť $\vec{w}$ je ortogonální doplněk vektorů $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}$. Pak $\vec{w} = \vec{0}$ právě tehdy, když vektory $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}$ jsou lineárně závislé.

Důkaz: $\vec{w} = \vec{0} \iff \forall \vec{x} \in V_n : (\vec{w}, \vec{x}) = 0 \iff \forall \vec{x} \in V_n : [\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}, \vec{x}] = 0 \iff [\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}] = 0 \iff \vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}$ lineárně závislé □

Věta 2.37

Nechť $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}$ jsou lineárně nezávislé vektory, $\vec{w}$ jejich ortogonální doplněk. Pak

1. Vektor $\vec{w}$ je kolmý na všechny vektory $\vec{u_i}$. Tím je jednoznačně určen jeho směr: $L(\vec{w}) = (L(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}))^\perp$
2. $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}, \vec{w}$ je kladně orientovaná báze. Tím je jednoznačně určena orientace $\vec{w}$.
3. $\|\vec{w}\| = |R_{n-1}(A; \vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}})|$. Tím je jednoznačně určena velikost $\vec{w}$.

Celkem dostáváme, že existuje právě jeden ortogonální doplněk vektorů $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}$.

Důkaz: jednotlivých částí věty:

1. Z definice je $[\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}, \vec{x}] = (\vec{w}, \vec{x})$ pro všechny vektory $\vec{x}$, tedy i pro $\vec{u_i}$. Tedy $[\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}, \vec{u_i}] = (\vec{w}, \vec{u_i})$. Protože však v tomto posledním vnějším součinu jsou vektory lineárně závislé, je $(\vec{w}, \vec{u_i}) = 0$, a tedy $\vec{w} \perp \vec{u_i}$.
2. $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}, \vec{w}$ je jistě lineárně nezávislý systém, a tedy báze. Pak $[\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}, \vec{w}] = (\vec{w}, \vec{w}) > 0$. Číslo $[\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}, \vec{w}]$ je determinantem matice přechodu od kladně orientované bázi k bázi $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}, \vec{w}$, proto je tato báze také kladně orientovaná.
3. $[\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}, \vec{w}] = |R_n(A; \vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}, \vec{w})|$. Protože $\vec{w} \perp \vec{u_i}$, je tento objem roven $|R_{n-1}(A; \vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}})| \cdot \|\vec{w}\|$. To je podle definice ortogonálního doplňku rovno $(\vec{w}, \vec{w}) = \|\vec{w}\|^2$. Proto $\|\vec{w}\| = |R_{n-1}(A; \vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}})|$

□

Ortogonální doplněk lze spočítat např. takto: Jsou-li $(u_{i1}, \dots, u_{in})$ souřadnice vektorů $\vec{u_i}$, a chceme dostat ortogonální doplněk vektorů $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}$, pak spočítáme determinant

$$\begin{vmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n-1,1} & \cdots & u_{n-1,n} \\ \vec{e_1} & \cdots & \vec{e_n} \end{vmatrix}$$

a dostaneme tak vyjádření vektoru $\vec{w}$ v dané kladné ortonormální bázi $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$, tedy výraz tvaru $w_1\vec{e_1} + \cdots + w_n\vec{e_n}$. Tento vektor je hledaným ortonormálním doplňkem vektorů $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}$, protože pro každý vektor $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ platí:

$$[\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}, \vec{x}] = \begin{vmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n-1,1} & \cdots & u_{n-1,n} \\ x_1 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

Tak dostaneme výraz $w_1x_1 + \cdots + w_nx_n = (\vec{w}, \vec{x})$, a je tedy splněna podmínka pro ortogonální doplněk.

Příklad 2.38

V rovině je často třeba spočítat ortogonální doplněk dvou vektorů. Dá se tak získat např. normálový vektor roviny z jejího parametrického vyjádření (a tedy obecné vyjádření této roviny). Jsou-li $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektory, které tvoří bázi zaměření roviny, dostaneme normálový vektor $\vec{n}$ této roviny takto:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \begin{pmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{pmatrix}$$

2.5 Odchylky podprostorů

Abychom mohli počítat odchylky Euklidovských afinních prostorů, zavedeme nejprve odchylky vektorových prostorů.

Odchylkou vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ rozumíme číslo

$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \frac{(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Z Cauchyovy nerovnosti víme, že $|(\vec{u}, \vec{v})| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$. Je tedy jistě

$$-1 \leq \frac{(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \leq 1$$

. Na tento výraz tedy můžeme uplatnit funkci arccos.

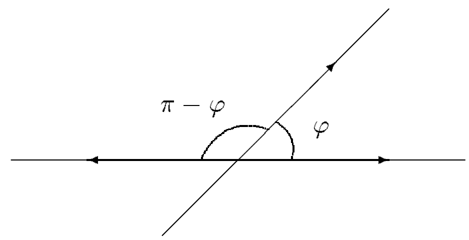
Odchylkou jednorozměrných prostorů $L(\vec{u}), L(\vec{v})$ rozumíme číslo

$$\angle(L(\vec{u}), L(\vec{v})) = \arccos \frac{|(\vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Musíme však dokázat, že výsledek je nezávislý na výběru vektorů $\vec{u}, \vec{v}$. Nechť tedy $\alpha\vec{u} = \vec{u}' \in L(\vec{u})$ a $\beta\vec{v} = \vec{v}' \in L(\vec{v})$. Pak

$$\angle(L(\vec{u}'), L(\vec{v}')) = \arccos \frac{|\alpha\beta(\vec{u}, \vec{v})|}{|\alpha\beta|\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \angle(L(\vec{u}), L(\vec{v}))$$

Tím, že v čitateli zlomku vezmeme absolutní hodnotu, vybereme ze dvou možných odchylek tu, která je menší než $\frac{\pi}{2}$. Je-li odchylka dvou jednodimenzionálních prostorů φ, pak odchylka jejich vektorů může být buď φ nebo $\pi - \varphi$:



Definice 2.39

Nechť W, U jsou podprostory v Euklidovském vektorovém prostoru V_n. Pak *odchylku prostorů* W, U definujeme podle následujících pravidel:

1. Je-li $W \cap U = \{\vec{0}\}$, pak $\angle(W, U) = \min(\angle(L(\vec{w}), L(\vec{u})))$, kde $\vec{w} \in W$ a $\vec{u} \in U$.
2. Je-li $W \cap U \neq \{\vec{0}\}$, pak položíme $P = W \cap (W \cap U)^{\perp}$ a $Q = U \cap (W \cap U)^{\perp}$. Platí: $P \cap Q = (W \cap U) \cap (W \cap U)^{\perp} = \{\vec{0}\}$. Jestliže nyní $P = \{\vec{0}\}$ nebo $Q = \{\vec{0}\}$, klademe $\angle(W, U) = 0$, jinak $\angle(W, U) = \angle(P, Q)$.

Druhý bod předchozí definice vypadá značně nesrozumitelně. Přibližnou představu toho, co znamená odchylka prostorů, lze získat vložením vektorových prostorů do afinního prostoru (což učiní následující definice). Nechť W, U jsou zaměření dvou různoběžných rovin v třírozměrném prostoru. Pak $W \cap U$ je zaměření jejich průsečnice. Uvažujme rovinu se zaměřením $(W \cap U)^{\perp}$. Ta je kolmá na $W \cap U$, a tedy je kolmá na obě původní roviny. Znamená to, že jsme proložili tyto roviny rovinou na obě kolmou. Prostor P je zaměřením průsečnice W a této kolmé roviny, stejně prostor Q je zaměřením průsečnice U a roviny kolmé na W i U. Odchylka takových přímek je tedy podle definice odchylkou původních rovin.

Případ $P = \{\vec{0}\}$ může nastat, je-li W přímka[1] ležící v rovině U. Pak $W \cap U$ je přímka W. Průnik $P = W \cap (W \cap U)^{\perp} = W \cap W^{\perp}$ je podle věty 2.10 jediný bod, tedy $P = \{\vec{0}\}$ a odchylka přímky od roviny, v níž leží, je nulová.

Odchylku vektorových prostorů přeneseme pomocí jejich zaměření do Euklidovských bodových prostorů.

Definice 2.40

Nechť $\mathcal{B}_1 = \{B, W\}$ a $\mathcal{B}_2 = \{C, U\}$ jsou dva podprostory v $\mathcal{E}_n$. Pak *odchylkou prostorů* $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ rozumíme odchylku jejich zaměření W, U: $\angle(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \angle(W, U)$.

Příklad 2.41

Odchylka dvou nadrovin $\mathcal{N}_1 = \{A, W\}$ a $\mathcal{N}_2 = \{B, U\}$: $(W \cap U)^{\perp} = W^{\perp} + U^{\perp} = L(\vec{n_1}) + L(\vec{n_2})$. Prostory P, Q z druhého bodu definice odchylky vektorových prostorů (2.39) budou tedy $L(\vec{n_2})$ resp. $L(\vec{n_1})$ (v případě, že W, U nejsou rovnoběžné, jinak je to triviální). Tedy odchylka nadrovin je rovna odchylce jejich normálových vektorů

Věta 2.42

Nechť $p = \{A, L(\vec{u})\}$ je přímka a $\mathcal{B} = \{B, W\}$ je libovolný podprostor. Pak

$$\angle(p, \mathcal{B}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \vec{u} \in W^{\perp} (p \perp \mathcal{B}) \\ \angle(L(\vec{u}), L(\vec{y})), & \vec{u} \notin W^{\perp} (p \not\perp \mathcal{B}) \end{cases},$$

kde $\vec{y}$ je ortogonální projekce vektoru $\vec{u}$ do W.

[1] Místo „zaměření přímky, roviny,…“ používáme zkráceně „přímka, rovina,…“

Důkaz: V případě, že $p \perp \mathcal{B}$, je $\vec{u} \in W^{\perp}$ a tedy $L(\vec{u}) \cap W$ má dimenzi 0. Můžeme tedy použít první bod z definice odchylky vektorových prostorů (2.39), a dostaneme odchylku jako

$$\arccos \frac{|(\vec{u}, \vec{w})|}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{w}||}$$

pro nějaký vektor $\vec{w} \in W$. Protože je však $\vec{u}$ kolmý na $\mathcal{B}$, je kolmý i na $\vec{w}$, a tedy $(\vec{u}, \vec{w}) = 0$. Odchylka je potom $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

V opačném případě je třeba ukázat, že pro ortogonální projekci $\vec{y}$ vektoru $\vec{u}$ do $\mathcal{B}$ platí:

$$\angle(L(\vec{u}), L(\vec{y})) \leq \angle(L(\vec{u}), L(\vec{w})) \tag{12}$$

pro libovolný vektor $\vec{w} \in W$. Označíme levou stranu výrazu 12 jako φ a pravou stranu jako ψ. Chceme ukázat, že $\varphi \leq \psi$. Ukážeme, že $\cos\psi \leq \cos\varphi$, a výsledek dostaneme z toho, že na intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$ je funkce cos klesající.

Rozložíme si nejprve vektor $\vec{u}$ na ortogonální projekci $\vec{y}$ a ortogonální komponentu $\vec{z}$ podle podprostoru W: $\vec{y} \in W$, $\vec{z} \in W^{\perp}$, $\vec{u} = \vec{y} + \vec{z}$ Platí: $\vec{z} \perp \vec{w}$ pro všechny vektory $\vec{w} \in W$. Tedy zejména $\vec{z} \perp \vec{y}$. Nyní

$$\cos\psi = \frac{|(\vec{u}, \vec{w})|}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{w}||}.$$

Protože $\vec{z} \perp \vec{w}$, je $(\vec{z}, \vec{w}) = 0$, a tedy $(\vec{y} + \vec{z}, \vec{w}) = (\vec{y}, \vec{w})$. Dosadíme do výrazu pro $\cos\psi$:

$$\cos\psi = \frac{|(\vec{y}, \vec{w})|}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{w}||} \leq \frac{||\vec{y}|| \cdot ||\vec{w}||}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{w}||}$$

podle Cauchyovy nerovnosti. To se rovná

$$\frac{||\vec{y}||}{||\vec{u}||} = \frac{||\vec{y}|| \cdot ||\vec{y}||}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{y}||} = \frac{|(\vec{y}, \vec{y})|}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{y}||}.$$

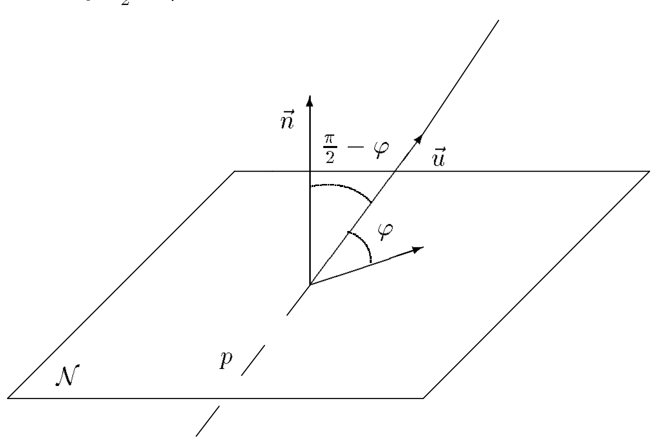
Víme však, že $\vec{y} = \vec{u} - \vec{z}$. Zároveň $\vec{z} \perp \vec{y}$, tedy $|(\vec{u} - \vec{z}, \vec{y})| = |(\vec{u}, \vec{y})|$. Celkem je

$$\cos\psi \leq \frac{|(\vec{u}, \vec{y})|}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{y}||} = \cos\varphi.$$

□

Příklad 2.43

Nechť odchylka nadroviny $\mathcal{N} \equiv a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a = 0$ od přímky $p = \{A, L(\vec{u})\}$ je φ. Pak odchylka normálového vektoru $\vec{n}$ nadroviny $\mathcal{N}$ od vektoru $\vec{u}$ je $\frac{\pi}{2} - \varphi$:



Tedy

$$\sin\varphi = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \frac{|(\vec{n}, \vec{u})|}{||\vec{n}|| \cdot ||\vec{u}||}$$

a odchylku dostaneme podle vzorce

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{|a_1u_1 + \cdots + a_nu_n|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}}\right)$$

Věta 2.44

Nechť W, U jsou dva vektorové podprostory, jejichž průnik je pouze nulový vektor $(\vec{0})$. Nechť $\vec{w_1}, \ldots, \vec{w_k}$ je ortonormální báze ve W, a $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_l}$ je ortonormální báze v U. Sestrojíme matici řádu k/l $A = (a_{ij})$, kde $a_{ij} = (\vec{w_i}, \vec{u_j})$. Nechť s je největší vlastní hodnota matice AA^T. Pak odchylka prostorů W, U se spočítá:

$$\angle(W, U) = \arccos(+\sqrt{s})$$

($+\sqrt{s}$ je označení pro kladnou odmocninu z s).

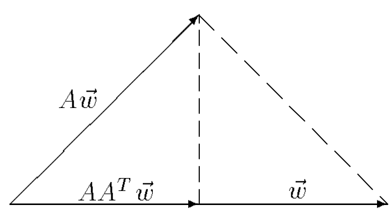
Důkaz: je technicky komplikovaný; viz lineární algebra. □

Poznámka 2.45

Pár poznámek ke smyslu předchozí věty:

Matice AA^T z předchozí věty je čtvercová řádu k. Vlastní hodnoty jsou řešeními polynomické rovnice $|AA^T - \lambda E| = 0$ s proměnnou λ, kde E je jednotková matice. Výsledky lineární algebry zaručují, že tato rovnice má reálné kořeny, protože matice AA^T je symetrická.

Matice A je maticí zobrazení z W do U, které každému vektoru $\vec{w}$ přiřadí jeho ortogonální projekci v U. Naopak, matice A^T je matice zobrazení, která každému vektoru $\vec{u}$ přiřadí jeho ortogonální projekci ve W. Potom AA^T je matice zobrazení, která přiřadí vektoru $\vec{w}$ jeho násobek $\alpha\vec{w}$, kde $\alpha \leq 1$. Situace pro dvě přímky:



Dalším výsledkem lineární algebry je to, že vlastní hodnoty (jako řešení rovnice $|AA^T = \lambda E|$ v proměnné λ) jsou právě ta čísla, pro která $\lambda\vec{w} = AA^T\vec{w}$ pro všechny vektory $\vec{w} \in W$. Z předchozí úvahy tedy plyne, že všechny vlastní hodnoty matice AA^T leží v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, a lze tedy největší z nich použít jako argument funkce arccos.

Předchozí věta nám tedy jasně definuje algoritmus, podle kterého lze zjistit odchylku vektorových (a tedy i afinních) podprostorů libovolné dimenze. Je-li $W \cap U = \{\vec{0}\}$, postupujeme přímo podle této věty. V opačném případě spočteme podprostory P, Q z definice 2.39, a na ně aplikujeme předcházející větu.

2.6 Podobná a shodná zobrazení

Definice 2.46

Nechť $\mathcal{E}_n$ a $\mathcal{E}'_m$ jsou dva Euklidovské bodové prostory. Řekneme, že zobrazení $f : \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{E}'_m$ je *podobné zobrazení,* jestliže existuje $k \in \mathbf{R}^+$, takové, že pro každé dva body $X, Y \in \mathcal{E}_n$ platí: $|f(X)f(Y)|_{\mathcal{E}'_m} = k|XY|_{\mathcal{E}_n}$. Pokud navíc $k = 1$, nazýváme f *shodné zobrazení.*

Poznámka 2.47

Podobné zobrazení prosté. Proto může vést pouze do prostoru větší nebo rovné dimenze.

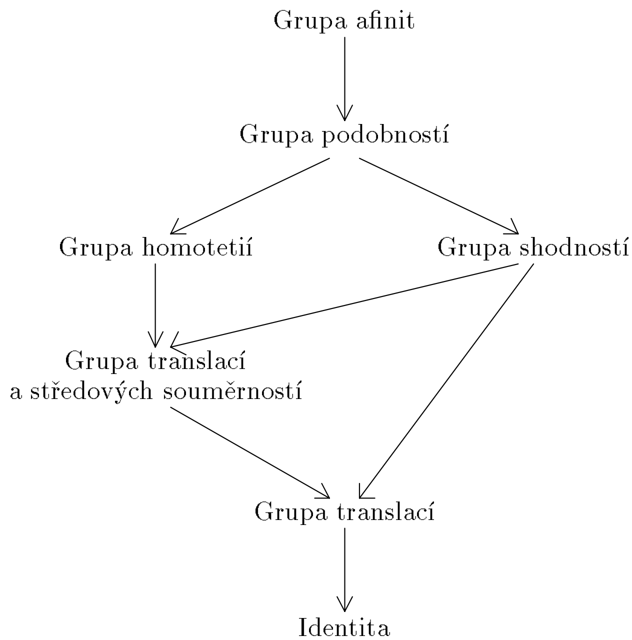
Podobné zobrazení je také afinní. Mějme tři různé body A, B, C ležící na přímce v tomto pořadí. Potom platí $|AC| = |AB| + |BC|$. Chceme dokázat zachování dělícího poměru za předpokladu podobnosti f. Nechť $\overline{AC} = \lambda\overline{BC}$. Potom $|f(A)f(C)| = k|AC| = k|AB| + k|BC| = |f(A)f(B)| + |f(B)f(C)|$, a proto $f(A), f(B), f(C)$ leží na jedné přímce. Dále platí: $|f(A)f(C)| = k|AC| = \lambda k|BC| = \lambda|f(B)f(C)|$, a tedy i velikost λ dělícího poměru zůstává stejná.

Věta 2.48

Je-li f podobné zobrazení, pak pro asociované lineární zobrazení φ_f platí: $\|\varphi_f(\vec{u})\| = k\|\vec{u}\|$ a $(\varphi_f(\vec{u}), \varphi_f(\vec{v})) = k^2(\vec{u}, \vec{v})$.

Důkaz: Zvolme dva body X, Y takové, že $\vec{u} = \overline{XY}$. Potom $\|\varphi_f(\vec{u})\| = \|\overline{f(X)f(Y)}\| = |f(X)f(Y)| = k|XY| = k\|\vec{u}\|$.

Nejprve zkonstruujeme alternativní vyjádření skalárního součinu $(\vec{u}, \vec{v})$: Víme, že $(\vec{u}, \vec{u}) = \|\vec{u}\|^2$. Dále $(\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{v}, \vec{v}) - 2(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u}, \vec{v})$. Tedy $2(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$. Využijeme tohoto



Obr. 1: Grupy afinit a jejich uspořádání

vztahu pro $\varphi_f(\vec{u}), \varphi_f(\vec{v})$ a uplatníme poznatek z předchozího odstavce: $2(\varphi_f(\vec{u}), \varphi_f(\vec{v})) = \|\varphi_f(\vec{u})+\varphi_f(\vec{v})\|^2 - \|\varphi_f(\vec{u})\|^2 - \|\varphi_f(\vec{v})\|^2 = k^2\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - k^2\|\vec{u}\|^2 - k^2\|\vec{v}\|^2 = 2k^2(\vec{u}, \vec{v})$. □

Uvažme rovnici podobnosti jako afinního zobrazení: $f(X) = AX + B$, kde $f(X)$ je vektor souřadnic po zobrazení, X je vektor souřadnic před zobrazením, A je matice zobrazení a B je vektor reálných souřadnic. Z předchozí věty jsme dostali výsledek: $(\varphi_f(\vec{u}), \varphi_f(\vec{v})) = k^2(\vec{u}, \vec{v})$. Obrazy vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ můžeme vyjádřit pomocí matice A: $\varphi_f(\vec{u}) = A\vec{u}$, podobně pro $\vec{v}$. Pak

$$\begin{aligned} (A\vec{u}, A\vec{v}) &= k^2(\vec{u}, \vec{v}) \\ (A\vec{u})^T(A\vec{v}) &= k^2\vec{u}^T\vec{v} \\ \vec{u}^T A^T A\vec{v} &= k^2\vec{u}^T E\vec{v} \\ A^T A &= k^2 E \end{aligned}$$

Dostali jsme nutnou a postačující podmínku pro matici A, aby odpovídající zobrazení f bylo podobné. Shodnost zobrazení f je ekvivalentní podmínce $A^T A = E$.

Následující tabulka shrnuje stručnou klasifikaci afinních zobrazení:

Název	Podmínka	Komentář
afinita	$\|A\| \neq 0$	zachovává kolineárnost a dělící poměr
podobnost	$A^T A = k^2 E$	zachovává poměr vzdáleností
shodnost	$A^T A = E$	zachovává vzdálenost
homotetie	$A = \lambda E, \lambda \neq 0$	všechny směry jsou samodružné
středová souměrnost	$A = -E$	každý vektor se zobrazí na vektor opačný
translace	$A = E$	všechny vektory jsou samodružné
identita	$A = E, B = \mathbf{0}$	každý bod je samodružný

Některá uvedená zobrazení tvoří grupy. Na obrázku 1 vidíme grupy a podgrupy afinit, přičemž šipka vždy ukazuje od nadgrupy k její podgrupě.

3 Komplexní a projektivní rozšíření prostorů

V této kapitole začíná část, kterou nazýváme *kvadratická geometrie.* Budeme se totiž zabývat kvadratickými objekty.

Než však na tyto objekty samotné dojde, zavedeme si jistá rozšíření afinního prostoru, aby se nám v něm s kvadratickými objekty lépe pracovalo.

3.1 Komplexní rozšíření vektorového prostoru

Budeme předpokládat, že V_n je reálný n-rozměrný vektorový prostor.

Definice 3.1

Na množině $V \times V$ definujeme operace sčítání a násobení komplexním číslem (skalárem) takto:

$$[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{c}, \vec{d}] = [\vec{a} + \vec{c}, \vec{b} + \vec{d}]$$

$$(\alpha + \beta i)[\vec{a}, \vec{b}] = [\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}, \alpha\vec{b} + \beta\vec{a}]$$

$V \times V$ spolu s výše uvedenými operacemi je vektorovým prostorem nad $\mathbf{C}$. Budeme jej značit V^C a nazývat *komplexním rozšířením vektorového prostoru* V.

Definujeme zobrazení $V \longrightarrow V^C : \vec{u} \mapsto [\vec{u}, \vec{0}]$. Pak V můžeme považovat za podmnožinu V^C (ale už ne podprostor).

Každý vektor $[\vec{u}, \vec{v}] \in V^C$ lze zapsat jako $[\vec{u}, \vec{v}] = [\vec{u}, \vec{0}] + [\vec{0}, \vec{v}] = [\vec{u}, \vec{0}] + i[\vec{v}, \vec{0}] = \vec{u} + i\vec{v}$. Tak budeme také nadále vektory zapisovat. Vektor $\vec{u}$ zde nazveme *reálná část (složka) vektoru* $\vec{u}+i\vec{v}$, a vektor $\vec{v}$ *imaginární část (složka) vektoru* $\vec{u} + i\vec{v}$.

Nulový prvek prostoru V^C je $\vec{0}_{V^C} = [\vec{0}, \vec{0}] = \vec{0}_V$.

Věta 3.2

Vektory $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_k} \in V$ jsou lineárně nezávislé ve V^C právě tehdy, když jsou lineárně nezávislé ve V.

Důkaz: „$\Rightarrow$“: Jsou-li vektory lineárně závislé ve V, jsou s využitím stejné lineární kombinace lineárně závislé i ve V^C.

„$\Leftarrow$“: Nechť vektory $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ jsou lineárně závislé ve V^C. Pak existuje k čísel $\alpha_j + i\beta_j$ takových, že $\sum_{j=1}^{k}(\alpha_j + i\beta_j)\vec{u_j} = \vec{0}$ a přitom nejsou všechna nulová. Potom $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\vec{u_j} + i\sum_{j=1}^{k} \beta_j\vec{u_j} = \vec{0}$. V tomto případě musí být nulové obě složky, tedy reálná i imaginární. Přitom existuje buď α_i nebo β_i, které je nenulové (jinak by byla všechna čísla $\alpha_j + i\beta_j$ nulová). Takto jsme nalezli dvě nulové lineární kombinace vektorů $\vec{u_j}$ složené z reálných čísel ($\sum \alpha_j\vec{u_j}$ a $\sum \beta_j\vec{u_j}$). Přitom alespoň jeden prvek alespoň jedné této kombinace je nenulový, proto vektory jsou závislé ve V. $\square$

Věta 3.3

Nechť $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ je báze prostoru V_n. Pak je i bází prostoru V_n^C.

Důkaz: Víme už, že vektory $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ jsou lineárně nezávislé ve V_n^C. Zbývá ještě dokázat, že jsou generátory tohoto prostoru.

Vezměme libovolný vektor $\vec{x}+i\vec{y} \in V_n^C$. Pak vektory $\vec{x}, \vec{y}$ lze vyjádřit jednoznačně v bázi V jako $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j\vec{u_j}$, $\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j\vec{u_j}$. Z toho dostáváme vyjádření $\vec{x} + i\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} x_j\vec{u_j} + i\sum_{j=1}^{n} y_j\vec{u_j} = \sum_{j=1}^{n}(x_j + iy_j)\vec{u_j}$. $\square$

Důsledek 3.4

Prostory V_n a V_n^C mají stejnou dimenzi. Dále pro libovolný vektor $\vec{x} + i\vec{y} \in V_n^C$ platí, že $\vec{x} + i\vec{y} \in V_n$ právě tehdy, když $\vec{y} = \vec{0}$. Můžeme tedy rozlišovat mezi *reálnými vektory* ($\in V_n$) a *vlastními imaginárními vektory* ($\in V_n^C - V_n$).

Definice 3.5

Nechť $\vec{w} = \vec{x} + i\vec{y}$ je vektor ve V_n^C. Vektor $\overline{\vec{w}} = \vec{x} - i\vec{y}$ nazveme *vektor komplexně sdružený k vektoru* $\vec{w}$.

Lze snadno ověřit, že $\overline{\vec{w_1} + \vec{w_2}} = \overline{\vec{w_1}} + \overline{\vec{w_2}}$ a $\overline{k\vec{w}} = k\overline{\vec{w}}$.

Věta 3.6

Nechť $\varphi : V_n \longrightarrow V'_m$ je lineární zobrazení mezi reálnými vektorovými prostory. Pak existuje jediné lineární zobrazení $\varphi^C : V_n^C \longrightarrow V_n^C$ takové, že $\varphi^C / V_n = \varphi$.

Důkaz: Zobrazení φ^C definujeme položením $\varphi^C(\vec{x}+i\vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + i\varphi(\vec{y})$. Zřejmě platí: $\varphi^C/V_n = \varphi$.

Linearita zobrazení φ^C je rutinní záležitost, avšak technicky zdlouhavá. S využitím definice φ^C a linearity φ je třeba ukázat, že $\varphi^C((\alpha_1+i\beta_1)(\vec{x_1}+i\vec{y_1}) + (\alpha_2+i\beta_2)(\vec{x_2}+i\vec{y_2})) = (\alpha_1+i\beta_1)\varphi^C(\vec{x_1}+i\vec{y_1}) + (\alpha_2+i\beta_2)\varphi^C(\vec{x_2}+i\vec{y_2})$.

Jednoznačnost: nechť ψ je lineární zobrazení, jehož zúžením na V_n dostaneme φ. Pak jeho hodnota v libovolném vektoru z V_n^C je: $\psi(\vec{x}+i\vec{y}) = \psi(\vec{x}) + i\psi(\vec{y})$, což plyne z linearity ψ. Protože ve zúžení je $\psi = \varphi$, je $\psi(\vec{x}) + i\psi(\vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + i\varphi(\vec{y})$. To je ale rovno $\varphi^C(\vec{x}+i\vec{y})$, proto $\psi = \varphi^C$. □

Nechť A_φ je maticí zobrazení φ, tedy $\varphi(\vec{x}) = A_\varphi\vec{x}$. Pak zobrazení φ^C je dáno předpisem: $\varphi^C(\vec{x}+i\vec{y}) = A_\varphi\vec{x} + iA_\varphi\vec{y}$.

3.2 Komplexní rozšíření afinního prostoru

Tradiční afinní prostor se skládá ze tří komponent: $(\mathcal{A}, V, \overline{})$. Z nich vyjdeme při konstrukci komplexního rozšíření. Musíme určit také jeho množinu bodů, zaměření a zobrazení tvořící vektor ze dvou bodů.

Věta 3.7

Buď $\mathcal{A}^C = \mathcal{A} \times V$ množina a zobrazení $\overline{}^C : \mathcal{A}^C \times \mathcal{A}^C \longrightarrow V^C$ definované $\overline{[X,\vec{u}][Y,\vec{v}]}^C = \overline{XY} + i(\vec{v}-\vec{u})$, kde X, Y jsou body z $\mathcal{A}_n$ a $\vec{u}, \vec{v}$ jsou vektory z V. Pak $(\mathcal{A}^C, V^C, \overline{}^C)$ je afinní prostor.

Důkaz: Je třeba dokázat dva axiomy afinního prostoru (viz definice 1.1).

Nechť $[X,\vec{u}]$ je libovolný bod z $\mathcal{A}^C$ a $\vec{w} = \vec{w_1} + i\vec{w_2}$ je libovolný vektor z V^C. Označíme si $X + \vec{w_1}$ jako bod Y (je z $\mathcal{A}$), a $\vec{u} + \vec{w_2}$ jako vektor $\vec{v}$ (je z V). Tyto existují a jsou určeny jednoznačně, což plyne z afinity prostoru $(\mathcal{A}, V, \overline{})$. Pak $\overline{[X,\vec{u}][Y,\vec{v}]}^C = \overline{XY} + i(\vec{v}-\vec{u}) = (Y-X) + i(\vec{v}-\vec{u}) = (X+\vec{w_1}-X) + i(\vec{u}+\vec{w_2}-\vec{u}) = \vec{w_1} + i\vec{w_2} = \vec{w}$. Našli jsme tedy pro každý bod z $\mathcal{A}^C$ a každý vektor z V^C právě jeden bod, do kterého vede tento vektor, když se jeho počátek umístí do původního bodu.

$\overline{[X,\vec{u}][Y,\vec{v}]}^C + \overline{[Y,\vec{v}][Z,\vec{w}]}^C = \overline{XY} + i(\vec{v}-\vec{u}) + \overline{YZ} + i(\vec{w}-\vec{v}) = \overline{XZ} + i(\vec{w}-\vec{u}) = \overline{[X,\vec{u}][Z,\vec{w}]}^C$, což je důkaz druhého axiomu afinního prostoru. □

Stejně jako v obyčejném afinním prostoru můžeme psát $[Y,\vec{v}] = [X,\vec{u}] + [\vec{w_1},\vec{w_2}]$, jestliže $\overline{[X,\vec{u}][Y,\vec{v}]}^C = [\vec{w_1},\vec{w_2}]$, a tedy $[Y,\vec{v}] - [X,\vec{u}] = [\vec{w_1},\vec{w_2}]$.

Z tohoto hlediska je $\overline{[X,\vec{u}][X,\vec{0}]}^C = [\vec{0},\vec{u}]$; $[X,\vec{u}] = [X,\vec{0}] + [\vec{0},\vec{u}]$. Bod $[X,\vec{u}]$ tedy můžeme (a také často budeme) zapisovat jako $X + i\vec{u}$. Body množiny $\mathcal{A}$ lze takto považovat za vnořené do $\mathcal{A}^C$, protože zobrazení přiřazující bodu $X \in \mathcal{A}$ bod $X + i\vec{0} = X \in \mathcal{A}^C$ je homomorfismus (srovnej vnoření V do V^C).

Definice 3.8

Nechť $X + i\vec{u}$ je bod v $\mathcal{A}^C$. Pak bod $X - i\vec{u}$ nazveme *bod komplexně sdružený k bodu $X + i\vec{u}$.*

Ke každému objektu skládajícímu se z imaginárních bodů (např. přímka) existuje objekt komplexně sdružený (komplexně sdružená přímka).

Souřadná soustava komplexního rozšíření. Nechť $\mathcal{R} = \langle P; \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\rangle$ je reper v $\mathcal{A}_n$. Víme už z předchozí kapitoly, že $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ je bazí prostoru V^C. Proto je reper $\mathcal{R}$ také reperem prostoru $\mathcal{A}^C$.

Mějme libovolný bod $X + i\vec{u} \in \mathcal{A}_n^C$. *Souřadnicemi* tohoto bodu vzhledem k libovolnému reperu $\mathcal{R} = \langle P; \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\rangle$ nazveme n-tici komplexních čísel $X + i\vec{u} = [x_1 + iu_1, \dots, x_n + iu_n]_{\mathcal{R}}$ takovou, že $X + i\vec{u} = P + \sum_{j=1}^n (x_j + iu_j)\vec{e_j}$. Nechť reper $\mathcal{R}$ je reálný (tedy je reperem $\mathcal{A}_n$). Pak $X + i\vec{u} = P + \sum_{j=1}^n x_j\vec{e_j} + i\sum_{j=1}^n u_j\vec{e_j}$. To ale znamená, že $[x_1, \dots, x_n]_{\mathcal{R}}$ jsou souřadnice bodu $X \in \mathcal{A}_n$ a $(u_1, \dots, u_n)_{\mathcal{R}}$ jsou souřadnice vektoru $\vec{u} \in V_n$. Podle souřadnic bodu $X + i\vec{u}$ vzhledem k nějaké reálné bázi tak poznáme, zda je tento bod reálný nebo imaginární, protože známe souřadnice vektoru $\vec{u}$ ve V, a snadno odhalíme, zda je nulový nebo ne.

Afinní podprostory komplexního rozšíření. Vezměme libovolný podprostor $\mathcal{B}_k$ v $\mathcal{A}_n$. Potom $\mathcal{B}_k^C$ je podprostorem v $\mathcal{A}_n^C$. Opačně tvrzení neplatí. V $\mathcal{A}_n^C$ totiž existují podprostory, které nejsou rozšířením nějakého podprostoru v $\mathcal{A}_n$. Takovým je např. podprostor daný předpisem $A + \alpha i\vec{u}$ pro pevný bod $A \in \mathcal{A}_n$ a pevný vektor $\vec{u} \in V_n$.

3.3 Projektivní prostor

Definice 3.9

Nechť V_{n+1} je vektorový prostor nad tělesem T (např. těleso reálných nebo komplexních čísel). Množinu jednorozměrných podprostorů V_{n+1} budeme nazývat *n-rozměrným projektivním prostorem* a značit $\mathcal{P}_n$.

V_{n+1} se nazývá *aritmetický základ (nosič)* prostoru $\mathcal{P}_n$. Prvky z V_{n+1} se nazývají *aritmetické body.* Prvky z $\mathcal{P}_n$ se nazývají *geometrické body.* Je-li $X \in \mathcal{P}_n$ geometrický bod, vznikl z jednorozměrného podprostoru $L(\vec{x})$ ve V_{n+1}, pak píšeme $X = \langle \vec{x} \rangle$ $(\vec{x} \neq \vec{0})$. $\vec{x}$ se pak nazývá *aritmetický zástupce geometrického bodu* X.

Projektivní prostor budeme značit $(\mathcal{P}_n, V_{n+1})$.

Každý bod můžeme nechat generovat nekonečně mnoha geometrickými zástupci. Je-li totiž $X = \langle \vec{x} \rangle$, pak také $X = \langle \alpha\vec{x} \rangle$ pro každé $0_T \neq \alpha \in T$.

Definice 3.10

Body $\langle \vec{a_1} \rangle, \dots, \langle \vec{a_k} \rangle \in \mathcal{P}_n$ nazveme *lineárně nezávislé,* jestliže vektory $\vec{a_1}, \dots, \vec{a_k}$ jsou lineárně nezávislé ve V_{n+1}.

Bod $A = \langle \vec{a} \rangle$ takový, že $\vec{a} = \alpha_1\vec{a_1} + \dots + \alpha_k\vec{a_k}$, přičemž existuje $\alpha_i \neq 0_T$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, k\}$, se nazývá *lineární kombinací bodů* $A_1, \dots, A_k$. Píšeme: $A = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_k A_k$.

Definice 3.11

Aritmetickou bází projektivního prostoru $(\mathcal{P}_n, V_{n+1})$ rozumíme libovolnou bázi vektorového prostoru V_{n+1}.

Geometrickou bází prostoru $\mathcal{P}_n$ rozumíme libovolnou posloupnost bodů $O_1, \dots, O_{n+1}, E$ takových, že libovolných $n+1$ z nich je lineárně nezávislých. Body $O_1, \dots, O_{n+1}$ nazýváme *základní body geometrické báze,* bod E se nazývá *jednotkový bod geometrické báze.*

Věta 3.12

Nechť $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_{n+1}}$ je libovolná aritmetická báze prostoru $(\mathcal{P}_n, V_{n+1})$. Pak $\langle \vec{e_1} \rangle, \dots, \langle \vec{e_{n+1}} \rangle, \langle \sum_{i=1}^{n+1} \vec{e_i} \rangle$ je geometrická báze prostoru $(\mathcal{P}_n, V_{n+1})$.

Důkaz: Je třeba ukázat, že vynecháním libovolného vektoru z daných $n+2$ vektorů dostaneme systém $n+1$ lineárně nezávislých vektorů. Vynecháme-li vektor $\sum_{i=1}^{n+1} \vec{e_i}$, dostaneme vektory $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_{n+1}}$, které jsou jako báze lineárně nezávislé. Nyní vynecháme některý $\vec{e_i}$.

Nechť vektory $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_{i-1}}, \vec{e_{i+1}}, \dots, \vec{e_{n+1}}, \sum_{i=1}^{n+1} \vec{e_i}$ jsou lineárně závislé. Nechť tedy existuje jejich nulová lineární kombinace:

$$\vec{0} = \alpha_1\vec{e_1} + \dots + \alpha_{i-1}\vec{e_{i-1}} + \alpha_{i+1}\vec{e_{i+1}} + \ldots + \alpha_{n+2}\sum_{i=1}^{n+1} \vec{e_i}$$

Sumu na konci rozložíme na jednotlivé vektory:

$$\vec{0} = (\alpha_1 + \alpha_{n+2})\vec{e_1} + \dots + (\alpha_{i-1} + \alpha_{n+2})\vec{e_{i-1}} + \alpha_{n+2}\vec{e_i} + (\alpha_{i+1} + \alpha_{n+2})\vec{e_{i+1}} + \dots + (\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2})\vec{e_{n+1}}$$

Protože vektory $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_{n+1}}$ jsou lineárně nezávislé, jsou v tomto výrazu všechny koeficienty nulové. Tedy $\alpha_{n+2} = 0_T$ (koeficient u $\vec{e_i}$). Ostatní koeficienty mají tvar $\alpha_j + \alpha_{n+2}$ pro všechna $j = \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n+1\}$. Proto $\alpha_j + \alpha_{n+2} = 0_T$, jenže už víme, že $\alpha_{n+2} = 0_T$, proto i $\alpha_j = 0_T$.

Celkem jsme dostali výsledek, že každá nulová lineární kombinace libovolných $n+1$ vektorů vybraných z daných $n+2$ vektorů má všechny koeficienty nulové, proto jde o geometrickou bázi prostoru $\mathcal{P}_n$. □

Věta 3.13

Nechť $O_1, \dots, O_{n+1}, E$ je geometrická báze $\mathcal{P}_n$. Pak existuje aritmetická báze $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_{n+1}}$ taková, že $O_i = \langle \vec{e_i} \rangle$ a $E = \langle \sum_{i=1}^{n+1} \vec{e_i} \rangle$.

Je-li $\vec{e_1}', \dots, \vec{e_{n+1}}'$ jiná taková aritmetická báze, pak existuje $\alpha \neq 0_T$ takové, že $\vec{e_i}' = \alpha\vec{e_i}$.

Důkaz: Nechť $O_i = \langle \vec{u_i} \rangle$ a $E = \langle \vec{u} \rangle$. Pak $\vec{u}$ je lineární kombinací $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n+1}}$:

$$\vec{u} = \alpha_1\vec{u_1} + \dots + \alpha_{n+1}\vec{u_{n+1}}$$

Kdyby některé α_i se rovnalo nule, pak by O_i, E nebyla geometrická báze (vynecháním vektoru $\vec{u_i}$ bychom dostali $n+1$ vektorů, které jsou lineárně závislé). Zvolíme $\vec{e_i} = \alpha_i\vec{u_i}$. Pak $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n+1} \vec{e_i}$ a dostáváme bázi s požadovanou vlastností.

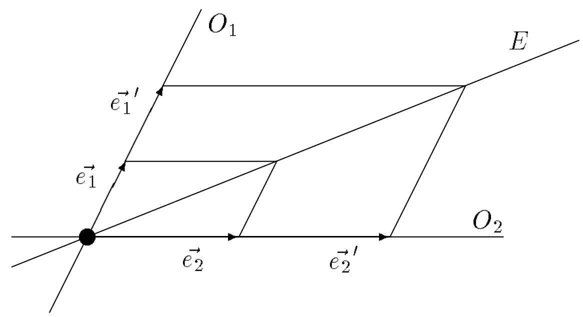
Nechť tedy $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_{n+1}}$ má požadované vlastnosti a nechť $\vec{e_1}', \dots, \vec{e_{n+1}}'$ je jiná taková báze. Protože $O_i = \langle \vec{e_i} \rangle = \langle \vec{e_i}' \rangle$, musí být $\vec{e_i}' = \alpha_i\vec{e_i}$, a zároveň $\sum_{i=1}^{n+1} \vec{e_i}' = \alpha \sum_{i=1}^{n+1} \vec{e_i}$. Potom $\sum_{i=1}^{n+1} \vec{e_i}' = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\vec{e_i} = \alpha \sum_{i=1}^{n+1} \vec{e_i}$. Po odečtení dostáváme $\sum_{i=1}^{n+1} (\alpha_i - \alpha)\vec{e_i} = 0$. To je lineární kombinace vektorů $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_{n+1}}$. Protože ty jsou nezávislé, musí být všechny koeficienty této kombinace nulové. Tedy $\alpha_i - \alpha = 0$, z čehož plyne $\alpha_i = \alpha$, což bylo dokázati. □

Definice 3.14

Nechť $O_1 = \langle \vec{e_1} \rangle, \ldots, O_{n+1} = \langle \vec{e_{n+1}} \rangle, E = \langle \sum_{i=1}^{n+1} \vec{e_i} \rangle$ je libovolná geometrická báze $\mathcal{P}_n$. Nechť $X = \langle \vec{x} \rangle$ je bod z $\mathcal{P}_n$. Pak uspořádaná $(n+1)$-tice $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ prvků z T takových, že $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \cdots + x_{n+1}\vec{e_{n+1}}$, se nazývá *projektivní homogenní souřadnice bodu* X vzhledem ke geometrické bázi $O_1, \ldots, O_n, E$.

Příklad 3.15

Jednorozměrný projektivní prostor můžeme chápat jako svazek přímek 1. druhu (procházejících jedním bodem) v rovině. Každý vektor v této rovině pak lze vyjádřit pomocí dvou vektorů, které určují bázi. Tyto vektory vyjadřujeme jako dvě přímky, určené směry těchto vektorů (body O_1, O_2 báze), a jednotkovým bodem báze E. Jednotkový bod určuje, na kterou přímku padne součet vektorů aritmetické báze. Je tedy dán poměr velikostí mezi dvěma vektory aritmetické báze (jejich směry jsou dány body O_1, O_2 = přímky ve svazku). Vektory jsou tedy body O_1, O_2, E určeny jednoznačně až na násobek konstantou (srov. tvrzení předcházející věty):



Věta 3.16

Nechť $X \in \mathcal{P}_n$ má vzhledem ke geometrické bázi $O_1, \ldots, O_n, E$ projektivní homogenní souřadnice $(x_1, \ldots, x_{n+1})$. Pak existuje index $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ takový, že $x_i \neq 0$. Dále, jsou-li $(y_1, \ldots, y_{n+1})$ jiné projektivní homogenní souřadnice bodu X vzhledem ke stejné bázi, pak $y_i = \alpha x_i$ pro vhodné nenulové α.

Důkaz: Kdyby všechna x_i byla rovna nule, pak $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i\vec{e_i}$ by byl nulový vektor, a $X = \langle \vec{x} \rangle$ by nemohl být bod prostoru $\mathcal{P}_n$.

Nechť $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i\vec{e_i}$ a $\vec{y} = \sum_{i=1}^{n+1} y_i\vec{e_i}'$. Protože $X = \langle \vec{x} \rangle = \langle \vec{y} \rangle$, musí být $\vec{y} = \beta\vec{x}$. Obě aritmetické báze $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_{n+1}}$ i $\vec{e_1}', \ldots, \vec{e_{n+1}}'$ odpovídají stejné geometrické bázi. Podle věty 3.13 existuje číslo γ takové, že $\vec{e_i}' = \gamma\vec{e_i}$. Potom $\vec{y} = \beta\vec{x} = \beta\sum_{i=1}^{n+1} x_i\vec{e_i} = \sum_{i=1}^{n+1} \beta x_i \frac{\vec{e_i}'}{\gamma} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\beta}{\gamma} x_i\vec{e_i}'$. Položíme-li $\alpha = \frac{\beta}{\gamma}$, je věta dokázána. $\square$

Definice 3.17

Nechť $(\mathcal{P}_n, V_{n+1})$ je projektivní prostor a W_{k+1} je vektorový podprostor ve V_{n+1}. Potom množina bodů $X = \langle \vec{x} \rangle$ takových, že $\vec{x} \in W_{k+1}$, se nazývá *k-rozměrný projektivní podprostor* v $\mathcal{P}_n$ určený podprostorem W_{k+1}.

Věta 3.18

Nechť $(\mathcal{Q}_k, W_{k+1})$ a $(\mathcal{R}_l, U_{l+1})$ jsou dva projektivní podprostory v $(\mathcal{P}_n, V_{n+1})$. Pak:

- Množina $\mathcal{Q}_r + \mathcal{R}_l = \{\langle \vec{u} \rangle; \vec{u} \in W_{k+1} + U_{l+1}\}$ je projektivní podprostor v $\mathcal{P}_n$.
- Množina $\mathcal{Q}_k \cap \mathcal{R}_l = \{\langle \vec{u} \rangle; \vec{u} \in W_{k+1} \cap U_{l+1}\}$ je projektivní podprostor v $\mathcal{P}_n$ v případě, že $W_{k+1} \cap U_{l+1} \neq \{\vec{0}\}$.

Důkaz: je velmi jednoduchý. $\square$

Stejně jako u vektorových prostorů, platí i u projektivních prostorů pro dimenzi jejich součtu vztah: $dim(\mathcal{Q}_k + \mathcal{R}_l) = k + l - dim(\mathcal{Q}_k \cap \mathcal{R}_l)$

Parametrické vyjádření projektivních podprostorů. Nechť $(\mathcal{Q}_k, W_{k+1})$ je projektivní podprostor $(\mathcal{P}_n, V_{n+1})$. Potom W_{k+1} musí být podprostor V_{n+1}. Nechť $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_{k+1}}$ je báze W_{k+1}. Potom každý vektor $\vec{x} \in W_{k+1}$ lze vyjádřit $\vec{x} = \lambda_1\vec{a_1} + \cdots + \lambda_{k+1}\vec{a_{k+1}}$. Pro bod $\langle \vec{x} \rangle$ projektivního podprostoru $\mathcal{Q}_k$ pak jistě platí: $\langle \vec{x} \rangle = \lambda_1\langle \vec{a_1} \rangle + \cdots + \lambda_{k+1}\langle \vec{a_{k+1}} \rangle$, kde existuje index i tak, že $\lambda_i \neq 0$. Zároveň platí, že bod $\langle \vec{x} \rangle$ leží v $\mathcal{Q}_k$ právě tehdy, když existuje takové jeho vyjádření. Jestliže označíme $A_i = \langle \vec{a_i} \rangle$, potom rovnice $X = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_{k+1} A_{k+1}$ je parametrickým zadáním projektivního podprostoru $\mathcal{Q}_k$ pomocí pevných bodů A_i.

Obecné vyjádření projektivních podprostorů. Pro obecné vyjádření projektivního podprostoru $(\mathcal{Q}_k, W_{k+1})$ v $(\mathcal{P}_n, V_{n+1})$ požadujeme nějakou soustavu rovnic, jejíž řešením by byl daný podprostor. Najdeme jistě homogenní soustavu rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n+1}x_{n+1} & = & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-k,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{n-k,n+1}x_{n+1} & = & 0 \end{array},$$

jejíž řešením je podprostor W_{k+1}. Tím jsou však body podprostoru $\mathcal{Q}_k$ již jednoznačně určeny, proto předchozí soustavu považujeme také za obecné vyjádření projektivního podprostoru $(\mathcal{Q}_k, V_{k+1})$.

Projektivní nadrovina prostoru $(\mathcal{P}_n, V_{n+1})$ má dimenzi $n-1$, a je tedy odvozena od nějakého n-dimenzionálního podprostoru ve V_{n+1}. Má proto obecné vyjádření

$$a_1x_1 + \cdots + a_{n+1}x_{n+1} = 0.$$

Tato nadrovina je zcela přirozeně dána jedním (normálovým) vektorem ve V_{n+1}, a tím vlastně jedním bodem v $\mathcal{P}_n$.

Transformace souřadnic bodů projektivního prostoru. Nechť $O_1, \ldots, O_{n+1}, E$ a $O'_1, \ldots, O'_{n+1}, E'$ jsou dvě geometrické báze prostoru $(\mathcal{P}_n, V_{n+1})$ a bod X má v nich souřadnice $[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ resp. $[x'_1, \ldots, x'_{n+1}]$. Najdeme odpovídající aritmetické báze $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_{n+1}}$ a $\vec{e_1}', \ldots, \vec{e_{n+1}}'$. Nechť matice A je maticí přechodu od báze $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_{n+1}}$ k bázi $\vec{e_1}', \ldots, \vec{e_{n+1}}'$ ve vektorovém prostoru V_{n+1}. Pak platí:

$$(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_{n+1}}) = (\vec{e_1}', \ldots, \vec{e_{n+1}}')A$$

Matice A je tvořena sloupci, které odpovídají souřadnicím vektorů $\vec{e_i}'$ vzhledem k bázi $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_{n+1}}$. Vektor $\vec{x}$ můžeme vyjádřit pomocí báze $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_{n+1}}$:

$$\vec{x} = (\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_{n+1}}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = (\vec{e_1}', \ldots, \vec{e_{n+1}}') \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n+1} \end{pmatrix}$$

Po dosazení dostáváme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n+1} \end{pmatrix}$$

Protože báze i souřadnice bodů projektivního prostoru jsou dány jednoznačně až na nenulový násobek, je i matice A dána jednoznačně až na nenulový násobek.

Zobrazení projektivních prostorů. Nechť jsou dány dva projektivní prostory $(\mathcal{P}_n, V_{n+1})$ a $(\mathcal{Q}_m, W_{m+1})$, kde $n \leq m$. Pro prosté lineární zobrazení $\varphi : V_{n+1} \longrightarrow W_{m+1}$ definujeme zobrazení $\Phi : \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathcal{Q}_m$ tak, že $\Phi(\langle\vec{x}\rangle) = \langle\varphi(\vec{x})\rangle$. Zobrazení Φ nazveme *kolineární zobrazení prostoru* $\mathcal{P}_n$ *do prostoru* $\mathcal{Q}_m$ *určené zobrazením* φ. Je-li Φ navíc bijekce, pak se nazývá *kolineace.*

3.4 Projektivní rozšíření afinního prostoru

Definice 3.19

Nechť $(\mathcal{A}, V_n, \overline{})$ je afinní prostor. Pak množinu $N_{\mathcal{A}} = \{\langle\vec{u}\rangle; \vec{0} \neq \vec{u} \in V_n\}$ nazveme *množinou směrů afinního prostoru* $\mathcal{A}$.

Naše další snažení povede k identifikaci množiny $\mathcal{P}_n = \mathcal{A} \cup N_{\mathcal{A}}$ jako projektivního prostoru. Budeme se snažit nalézt projektivní prostor $\mathcal{P}'_n$ ekvivalentní s $\mathcal{P}_n$. Za nosič prostoru $\mathcal{P}'_n$ vezmeme vektorový prostor $V_n \dot{+} L(\vec{e})$, kde vektor $\vec{e}$ není prvkem prostoru V_n, a najdeme bijekci mezi $\mathcal{P}_n$ a $\mathcal{P}'_n$.

Věta 3.20

Nechť zobrazení $\iota : \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathcal{P}'_n$ je definováno předpisem:

$$\begin{cases} \iota(X) = \langle\overline{PX} + \vec{e}\rangle, & X \in \mathcal{A} \\ \iota(\langle\vec{x}\rangle) = \langle\vec{x}\rangle, & \langle\vec{x}\rangle \in N_{\mathcal{A}} \end{cases}$$

Pak ι je bijekce.

Důkaz: ι je *injekce:* Chceme dokázat, že dva různé prvky zobrazí ι na dva různé prvky. Nechť nejprve $X \in \mathcal{A}$ a $\langle\vec{x}\rangle \in N_{\mathcal{A}}$:

$$\begin{aligned}
\iota(X) &= \iota(\langle\vec{x}\rangle) \\
\langle\overline{PX}+\vec{e}\rangle &= \langle\vec{x}\rangle \\
\overline{PX}+\vec{e} &= \alpha\vec{x} \\
\underbrace{\vec{e}}_{\in V_n} &= \underbrace{\alpha\vec{x}-\overline{PX}}_{\notin V_n}
\end{aligned}$$

a to je spor.

Nechť $X, Y \in \mathcal{A}$.

$$\begin{aligned}
\iota(X) &= \iota(Y) \\
\langle\overline{PX}+\vec{e}\rangle &= \langle\overline{PY}+\vec{e}\rangle \\
\overline{PX}+\vec{e} &= \alpha(\overline{PY}+\vec{e}) \\
(1-\alpha)\vec{e} &= \alpha\overline{PY}-\overline{PX}
\end{aligned}$$

a tedy musí být obě strany poslední rovnosti nulové vektory. Proto $\alpha = 1$ a $X = Y$.

Nechť $\langle\vec{x}\rangle, \langle\vec{y}\rangle \in N_{\mathcal{A}}$. V tomto případě je ι identita, a tedy jistě surjekce.

ι je *surjekce:* Pro každý prvek množiny $\mathcal{P}'_n$ chceme najít jeho vzor. Nechť $\vec{w} \in V_n \dot{+} \vec{e}$. Pak se tento vektor dá jednoznačně rozložit na součet $\vec{w} = \vec{u} + \beta\vec{e}$, kde $\vec{u} \in V_n$. V dalším postupu budeme rozlišovat podle β:

1. $\beta = 0$: $\iota(\langle\vec{u}\rangle) = \langle\vec{u}\rangle = \langle\vec{w}\rangle$
2. $\beta \neq 0$: $\iota(P + \frac{\vec{u}}{\beta}) = \langle\frac{\vec{u}}{\beta} + \vec{e}\rangle = \langle\vec{u} + \beta\vec{e}\rangle = \langle\vec{w}\rangle$

Pro každý prvek $\langle\vec{w}\rangle \in \mathcal{P}'_n$ jsme tedy nalezli jeho vzor, proto ι je surjekce. □

Definice 3.21

Prostor $\mathcal{P}_n = \mathcal{A} \cup N_{\mathcal{A}}$ nazýváme *projektivní rozšíření afinního prostoru* $\mathcal{A}$ a značíme jej $\overline{\mathcal{A}_n}$. Body z $\mathcal{A}$ nazýváme *vlastní body* prostoru $\overline{\mathcal{A}_n}$, body z $N_{\mathcal{A}}$ nazýváme *nevlastní body* prostoru $\overline{\mathcal{A}_n}$.

Souřadnice bodů projektivního rozšíření afinního prostoru. Budeme nejprve hledat souřadnice vlastních bodů. Nechť bod $X \in \mathcal{A}$ má v reperu $\langle P; \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\rangle$ souřadnice $[x_1, \dots, x_n]$. Vektory $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}, \vec{e}$ tvoří jistě bázi vektorového prostoru $V_n \dot{+} \vec{e}$, proto systém $\langle\vec{e_1}\rangle, \dots, \langle\vec{e_n}\rangle, \langle\vec{e}\rangle, \langle\sum_i \vec{e_i} + \vec{e}\rangle$ tvoří geometrickou bázi prostoru $\mathcal{P}'_n$. Za souřadnice bodu X v $\mathcal{P}_n$ budeme považovat souřadnice bodu $\iota(X)$ v $\mathcal{P}'_n$: $\iota(X) = \langle\overline{PX} + \vec{e}\rangle = \langle\sum_i x_i\vec{e_i} + \vec{e}\rangle$. Proto $[x_1, \dots, x_n, 1]$ jsou souřadnice bodu X v uvedené geometrické bázi. Také $[\alpha x_1, \dots, \alpha x_n, \alpha]$ jsou souřadnice tohoto bodu ve stejné bázi. Dostali jsme tak *afinní homogenní souřadnice vlastního bodu X v prostoru $\overline{\mathcal{A}_n}$.*

Máme-li naopak zadány souřadnice $[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]$ nějakého vlastního bodu, budeme je (např. kvůli porovnání s jiným bodem) převádět na „normální“ tvar, kdy poslední souřadnicí bude jednička. Ten dostaneme takto: $[\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1]$.

U nevlastních bodů je situace obdobná. Za souřadnice bodu $\langle\vec{u}\rangle \in \mathcal{P}_n$ budeme považovat souřadnice $\iota(\langle\vec{u}\rangle)$ v geometrické bázi $\langle\vec{e_1}\rangle, \dots, \langle\vec{e_n}\rangle, \langle\vec{e}\rangle, \langle\sum_i \vec{e_i} + \vec{e}\rangle$ prostoru $\mathcal{P}'_n$: $\iota(\langle\vec{u}\rangle) = \langle\vec{u}\rangle = \langle\sum_i u_i\vec{e_i} + 0\vec{e}\rangle$, kde $(u_1, \dots, u_n)$ jsou souřadnice vektoru $\vec{u}$ vzhledem k bázi $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ prostoru V_n. Proto $[u_1, \dots, u_n, 0]$ jsou *afinní homogenní souřadnice nevlastního bodu $\langle\vec{u}\rangle$ v prostoru $\overline{\mathcal{A}_n}$.*

Úspěšně jsme tedy rozšířili afinní prostor na projektivní. Dá se uplatnit i opačný postup. Z projektivního prostoru stačí vyříznout jednu nadrovinu (reprezentující nevlastní body), abychom dostali afinní prostor.

4 Nadkvadriky

4.1 Bilineární a kvadratické formy

Opět trochu lineární algebry. V dalším V bude znamenat vektorový prostor.

Definice 4.1

Zobrazení $f : V \longrightarrow \mathbf{R}$ se nazývá *lineární forma,* jestliže pro každé dva vektory $\vec{x}, \vec{y} \in V$ a každý skalár c platí: $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$, $f(c\vec{x}) = cf(\vec{x})$.

Definice 4.2

Zobrazení $f : V \times V \longrightarrow \mathbf{R}$ se nazývá *bilineární forma,* pokud pro všechny vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ a pro všechny skaláry c platí: $f(\vec{x}+\vec{y}, \vec{z}) = f(\vec{x}, \vec{z}) + f(\vec{y}, \vec{z})$, $f(\vec{x}, \vec{y}+\vec{z}) = f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{x}, \vec{z})$, $f(c\vec{x}, \vec{y}) = cf(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{x}, c\vec{y})$.

Je-li dána báze $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$ ve V a v ní vyjádřené dva vektory $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ a $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, lze snadno ověřit, že $f(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j f(\vec{e_i}, \vec{e_j})$. Matici $(f(\vec{e_i}, \vec{e_j}))_{i=1\ldots n}^{j=1\ldots n}$ nazveme *maticí bilineární formy f vzhledem k bázi $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$* a značíme A_f. Zobrazení pak zapisujeme:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 \cdots x_n) A_f \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Definice 4.3

Bilineární formu nazveme *symetrickou* (resp. *antisymetrickou*), jestliže platí: $f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$ (resp. $f(\vec{x}, \vec{y}) = -f(\vec{y}, \vec{x})$) pro každou dvojici vektorů $\vec{x}, \vec{y} \in V$.

Důležitý je poznatek, že symetrické (resp. antisymetrické) bilineární formy mají symetrické (resp. antisymetrické) matice.

Můžeme také zavádět komplexní rozšíření bilineárních forem. Definujeme bilineární formu $f^C : V^C \times V^C \longrightarrow C$ předpisem: $f^C(\vec{x_1} + i\vec{y_1}, \vec{x_2} + i\vec{y_2}) = f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2) + i(f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1))$. Lze dokázat, že forma zůstává bilineární (díky bilinearitě f), a také $f^C/V = f$.

Definice 4.4

Nechť f je bilineární forma nad V. Pak zobrazení $F : V \longrightarrow \mathbf{R}$ dané předpisem: $F(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$, se nazývá *kvadratická forma.*

Kvadratickou formu zapisujeme:

$$F(\vec{x}) = (x_1 \cdots x_n) A_F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Její odpovídající bilineární forma (a tedy i matice) není určena jednoznačně. Je však určena jednoznačně odpovídající symetrická bilineární forma (a tedy i matice).

Kvadratickou formu lze zapsat také pomocí lineárních forem:

$$F(\vec{x}) = (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ F_n(\vec{x}) \end{pmatrix},$$

kde $F_i(\vec{x}) = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$ jsou tzv. *asociované lineární formy.*

4.2 Základní pojmy teorie nadkvadrik

Budeme se pohybovat v projektivním prostoru, jehož nosičem je komplexní rozšíření vektorového prostoru V_{n+1}. Tento prostor je komplexním a projektivním rozšířením (v tomto pořadí) afinního prostoru. Budeme jej značit $(\mathcal{P}_n^C, V_{n+1}^C)$. Alternativní značení je $\overline{\mathcal{A}_n^C}$.

Definice 4.5

Nechť F je nenulová kvadratická forma na V_{n+1}. Nechť F^C je její komplexní rozšíření. Množinu bodů $X = \langle \vec{x} \rangle \in \mathcal{P}_n^C$ takových, že $F^C(\vec{x}) = 0$, nazýváme *nadkvadrikou* v $\mathcal{P}_n^C$. Pro $n = 2$ používáme pojem *kuželosečka,* pro $n = 3$ *kvadrika.*

Poznámka 4.6

Abychom učinili zadost korektnosti předchozí definice, je třeba uvést, že při nulování na kvadratické formě F^C nezáleží na výběru reprezentanta $\vec{x}$ pro bod X. Je-li totiž $X = \langle\vec{x}\rangle = \langle\alpha\vec{x}\rangle$, je $F^C(\alpha\vec{x}) = \alpha^2 F(\vec{x})$. Tedy forma je buď pro oba vektory $\vec{x}, \alpha\vec{x}$ nulová, nebo nulová není ani pro jeden z nich.

Zvolíme nějakou bázi $O_1, \ldots, O_{n+1}, E$ prostoru $\mathcal{P}_n$ (je zároveň bází $\mathcal{P}_n^C$). Je-li $A_F = (a_{ij})$ maticí formy F, pak můžeme zapsat reálné body kvadriky v obecném vyjádření $Q : \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = 0$. Je-li $Q \cap \mathcal{P}_n = \emptyset$, nazýváme nadkvadriku *formálně reálnou.*

Definice 4.7

Nechť $Q : F^C(\vec{x}) = 0$ je nadkvadrika v $\mathcal{P}_n^C$. Body $P = \langle\vec{p}\rangle$, $R = \langle\vec{r}\rangle$ budeme nazývat *polárně sdružené (konjugované) vzhledem k nadkvadrice* Q, jestliže $f^C(\vec{p}, \vec{r}) = 0$, kde f^C je symetrická bilineární forma odpovídající F^C.

Poznámka 4.8

Předchozí definice si opět žádá důkazu korektnosti. Jsou-li $\alpha\vec{p}, \beta\vec{r}$ jiní reprezentanti pro body P, R, bude $f^C(\alpha\vec{p}, \beta\vec{r}) = \alpha\beta f^C(\vec{p}, \vec{r})$. Výrazy $f^C(\alpha\vec{p}, \beta\vec{r})$ i $f^C(\vec{p}, \vec{r})$ jsou buď oba nulové, nebo žádný z nich.

Použijeme-li zjednodušený maticový zápis $Q : X^T AX = 0$ pro nadkvadriku Q, kde X značí sloupcový vektor souřadnic vektoru $\vec{x}$, pak podmínku polární sdruženosti lze zapsat $P^T AR = 0$.

Definice 4.9

Bod P nazveme *singulárním bodem nadkvadriky* $Q : F^C(\vec{x}) = 0$, je-li polárně sdružený se všemi body prostoru ($P^T AX = 0$ pro každý bod X).

Bod P nazveme *regulárním bodem nadkvadriky* $Q : F^C(\vec{x}) = 0$, jestliže je bodem této nadkvadriky a není singulární.

Poznámka 4.10

Singulární bod nadkvadriky leží na této nadkvadrice. Je totiž polárně sdružený se všemi body v prostoru. Body ležící na nadkvadrice jsou však dle definice právě ty, které jsou polárně sdruženy samy se sebou, což singulární bod jistě splňuje.

Definice 4.11

Nadkvadrika Q se nazývá *singulární,* jestliže obsahuje alespoň jeden singulární bod. V opačném případě se nazývá *regulární.*

Věta 4.12

Matice A odpovídající kvadratické formě F^C nadkvadriky Q je singulární právě tehdy, když je nadkvadrika Q singulární.

Důkaz: Nechť Q je singulární. Pak existuje její singulární bod, označíme ho např. S. Pak platí: $S^T AX = 0$ pro každý bod X. Jinak zapsáno, musí být $F_1(\vec{s})x_1 + \cdots + F_{n+1}(\vec{s})x_{n+1} = 0$ pro každý vektor $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1})$, kde F_i jsou asociované lineární formy kvadratické formě F. To lze ovšem právě tehdy, když všechny $F_i(\vec{s})$ jsou rovny nule. Proto množina všech singulárních bodů jsou právě řešení soustavy rovnic $F_i(\vec{s}) = 0$. Tato soustava se však dá zapsat pomocí prvků matice A:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}s_1 & + & \cdots & + & a_{1,n+1}s_{n+1} & = & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1,1}s_1 & + & \cdots & + & a_{n+1,n+1}s_{n+1} & = & 0 \end{array}$$

Nadkvadrika Q je singulární právě tehdy, když tato soustava má jiné řešení než nulový vektor, a to je právě tehdy, když je hodnost matice A menší než $n+1$, což je ekvivalentní singularitě matice A. $\square$

Věta 4.13

Nechť P je singulární bod nadkvadriky $Q : F^C(\vec{x}) = 0$ a R je její libovolný bod. Pak celá přímka PR je součástí nadkvadriky Q.

Důkaz: V projektivním prostoru se dá přímka parametricky zapsat pomocí jejích dvou bodů: $X = \alpha P + \beta R$ pro $[\alpha, \beta] \neq [0, 0]$. Pak $F^C(\vec{x}) = F^C(\alpha\vec{p} + \beta\vec{r}) = f^C(\alpha\vec{p} + \beta\vec{r}, \alpha\vec{p} + \beta\vec{r}) = \alpha^2 f^C(\vec{p}, \vec{p}) + 2\alpha\beta f^C(\vec{p}, \vec{r}) + \beta^2 f^C(\vec{r}, \vec{r})$. To je rovno nule, protože $f^C(\vec{p}, \vec{p}) = f^C(\vec{p}, \vec{r}) = 0$ díky singularitě P, a $f^C(\vec{r}, \vec{r}) = F^C(\vec{r}) = 0$ díky tomu, že $R \in Q$. Tedy i $X \in Q$. $\square$

Věta 4.14
Nechť $Q : F^C(\vec{x}) = 0$ je nadkvadrika a S její regulární bod. Pak množina bodů polárně sdružených s S je nadrovina.

Důkaz: Je-li $Q : X^T AX = 0$, pak pro pevný bod S hledáme takové body X, pro něž platí $X^T AS = 0$. To odpovídá rovnici $F_1(\vec{s})x_1 + \cdots + F_{n+1}(\vec{s})x_{n+1} = 0$, kde F_i jsou asociované lineární formy. Tato rovnice je obecným vyjádřením nadroviny. □

Definice 4.15
Nadrovina bodů polárně sdružených s regulárním bodem nadkvadriky se nazývá *polární nadrovinou* tohoto bodu.

Definice 4.16
Nadrovina α se nazývá *tečnou nadrovinou nadkvadriky* Q, pokud $\alpha \subseteq Q$ nebo $\alpha \cap Q$ je singulární nadkvadrika v α.

Věta 4.17
Nechť Q je nadkvadrika a β_k je podprostor v $\mathcal{P}_n^C$. Pak $Q \cap \beta_k$ je nadkvadrika v β_k.

Důkaz: Nechť prostor β_k má parametrické vyjádření $X = b_1R_1 + \cdots + b_{k+1}R_{k+1}$. Průnikem tohoto prostoru jsou ty body, které mají toto parametrické vyjádření, a přitom se jejich aritmetičtí zástupci nulují na kvadratické formě odpovídající nadkvadrice Q: $F^C(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{k+1} b_i b_j f^C(\vec{r_i}, \vec{r_j})$. Položíme-li tento výraz roven nule, máme právě zadání nadkvadriky v podprostoru β_k. □

Definice 4.18
Nechť Q je nadkvadrika v $\mathcal{P}_n$ a β_k je k-rozměrný podprostor v $\mathcal{P}_n^C$. Řekneme, že β_k je *tečný podprostor* Q, jestliže $\beta_k \subseteq Q$ nebo $\beta_k \cap Q$ je singulární nadkvadrika v β_k.

Věta 4.19
Nechť T je regulární bod nadkvadriky Q. Pak polární nadrovina bodu T je tečnou nadrovinou Q. Naopak, je-li α tečná nadrovina Q, která obsahuje její regulární bod, pak je α polární nadrovinou tohoto bodu.

Důkaz: Nechť T je regulární bod nadkvadriky $Q : F^C(\vec{x}) = 0$ a nechť τ je polární nadrovina bodu T. Pak τ má rovnici: $\tau : X = \alpha T + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i R_i$. Vyjádříme nyní průnik $Q \cap \tau$ jako množinu bodů τ, ve kterých je $F^C(\vec{x}) = 0 = f^C(\vec{x}, \vec{x}) = \alpha^2 f^C(\vec{t}, \vec{t}) + 2\sum_i \alpha\beta_i f^C(\vec{t}, \vec{r_i}) + \sum_{i,j} \beta_i\beta_j f^C(\vec{r_i}, \vec{r_j})$. To je jistě rovnice kvadriky v τ. Je však navíc $f^C(\vec{t}, \vec{t}) = 0$ (bod T leží na kvadrice) a $f^C(\vec{t}, \vec{r_i}) = 0$ (body R_i jsou polárně sdružené s T). Proto rovnice této kvadriky vypadá spíše takto: $Q \cap \tau : 0 = \sum_{i,j} \beta_i\beta_j f^C(\vec{r_i}, \vec{r_j})$. Matice této nadkvadriky v aritmetické bázi $\vec{t}, \vec{r_1}, \ldots, \vec{r_{n-1}}$ prostoru τ vypadá takto:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & f^C(\vec{r_i}, \vec{r_j}) & \\ 0 & & & \end{array}\right) \tag{13}$$

Tato matice je singulární, proto i nadkvadrika $Q \cap \tau$ je podle věty 4.12 singulární, a je tedy τ tečnou nadrovinou kvadriky Q.

Je-li naopak τ tečná nadrovina, dotýkající se nadkvadriky v jejím regulárním bodě T, pak $Q \cap \tau$ musí být z definice tečné nadroviny singulární nadkvadrikou v τ. Matice A nadkvadriky $Q \cap \tau$ je tedy singulární, a musí proto existovat aritmetická báze nadroviny τ $\vec{t}, \vec{r_1}, \ldots, \vec{r_{n-1}}$, vzhledem k níž má matice nadkvadriky $Q \cap \tau$ tvar 13. Z toho je zřejmé, že $f^C(\vec{t}, \vec{r_i}) = 0$. Tedy bod T je polárně sdružený se všemi body R_i, a je proto polárně sdružený s celou nadrovinou τ. □

Příklad 4.20
Chceme-li nalézt body dotyku tečen spuštěných na kuželosečku z daného bodu, stačí nalézt polární přímku tohoto bodu a zjistit její průnik s kuželosečkou. Body dotyku jsou totiž právě ty body body na kuželosečce, které jsou polárně sdružené s daným bodem.

4.3 Projektivní vlastnosti a klasifikace nadkvadrik

Věta 4.21

Nechť $Q : F^C(\vec{x}) = 0$ je nadkvadrika. Pak existuje taková geometrická báze $O_1, \ldots, O_{n+1}, E$, že Q má v ní rovnici tvaru

$$Q : x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_h^2, \tag{14}$$

kde $h \leq n+1$ je hodnost nadkvadriky Q (=hodnost její matice) a $h \leq 2p$.

Definice 4.22

Tvar 14 rovnice kvadriky nazýváme *normální rovnice kvadriky.*

Důkaz: věty 4.21.

V důkaze popíšeme postup, jehož pomocí se dá normální rovnice kvadriky skutečně najít. Protože kvadrika Q není nulová, existuje bod O_1 takový, který na ní neleží; $O_1 \notin Q$. V této chvíli najdeme polární nadrovinu bodu O_1 a označíme w_1. Mohou nastat dvě možnosti:

1. $w_1 \subseteq Q$: Zvolíme lineárně nezávislé body $O_2, \ldots, O_{n+1}$ z nadroviny w_1 a dostaneme tak všechny základní body hledané báze. Nadkvadrika bude mít v tomto případě normální rovnici $x_1^2 = 0$.

2. $w_1 \nsubseteq Q$: Vybereme bod $O_2 \in w_1$ tak, aby $O_2 \notin Q$. Najdeme polární nadrovinu bodu O_2 a označíme ji w_2. Opět mohou nastat dvě možnosti:

   (a) $w_1 \cap w_2 \subseteq Q$: Doplníme O_1, O_2 na geometrickou bázi lineárně nezávislými body $O_3, \ldots, O_{n+1}$ vybranými z podprostoru $w_1 \cap w_2$. Nadkvadrika bude mít v tomto případě normální rovnici $x_1^2 \pm x_2^2 = 0$.

   (b) $w_1 \cap w_2 \nsubseteq Q$: Vybereme bod $O_3 \in w_1 \cap w_2$ tak, aby $O_3 \notin Q$. Najdeme polární nadrovinu bodu O_3 a označíme ji w_3. Opět nastanou dvě možnosti...

Tímto postupem získáme základní body báze $O_1, \ldots, O_{n+1}$, které jsou po dvou polárně sdružené. Proto $f^C(\vec{o_i}, \vec{o_j}) = 0$ pro všechna $i \neq j$. Proto matice nadkvadriky v této bázi bude mít na všech nediagonálních pozicích samé nuly.

Na pozicích diagonálních budou do jistého indexu kladná čísla, pak záporná, a nakonec samé nuly. Z kladných a záporných čísel potřebujeme udělat jedničky a minus jedničky. To učiníme takto: je-li $a_{ii} = f^C(\vec{o_i}, \vec{o_i}) \neq 0$, pak vezmeme místo $\vec{o_i}$ prvek $\vec{o_i}' = \frac{\vec{o_i}}{\sqrt{|a_{ii}|}}$. Ve všech ostatních případech klademe $\vec{o_i}' = \vec{o_i}$. Jednotkový prvek E geometrické báze pak spočteme z aritmetické báze $E = \langle \sum_{i=1}^{n+1} \vec{o_i}' \rangle$. Celá geometrická báze je pak $O_1', \ldots, O_{n+1}', E$. □

Věta 4.23

Nechť nadkvadrika Q má normální rovnici 14. Pak platí:

1. $(p-1)$ je největší číslo k takové, že existuje k-rozměrný podprostor R v $\mathcal{P}_n^C$, který nemá s Q společný žádný reálný bod.

2. $(n-p)$ je největší číslo l takové, že existuje reálný l-rozměrný podprostor S v $\mathcal{P}_n^C$, který leží celý v Q.

Důkaz: Nejprve dokážeme existenci prostoru dimenze $(p-1)$ s požadovanou vlastností bodu 1. Nechť R je dán parametrickými rovnicemi $R : x_{p+1} = 0, \ldots, x_{n+1} = 0$. Tento prostor má dimenzi $(p-1)$ a jeho průnik s Q je nadkvadrika: $Q \cap R : x_1^2 + \cdots + x_p^2 = 0$. Ta však nemá žádný reálný bod.

Nyní najdeme prostor S s vlastností požadovanou bodem 2: $S : x_1 = x_{p+1}, x_2 = x_{p+2}, \ldots, x_{h-p} = x_h, x_{h-p+1} = 0, \ldots, x_p = 0$. Tento prostor je jistě celý obsažen v Q.

Nechť reálný podprostor R' je dimenze p. Pak $dim(R' \cap S) = -\underbrace{dim(R'+S)}_{\leq n} + \underbrace{dim(R')}_{=p} + \underbrace{dim(S)}_{=n-p} \geq 0$. Tedy průnik $R' \cap S$ není prázdný, přitom obsahuje pouze reálné body. Tedy existuje reálný bod $X \in R' \cap S$. Protože však S leží celý v Q, je i bod X součástí Q. Tím je dokázána maximalita dimenze prostoru R.

Je-li S libovolný reálný podprostor dimenze $(n-p+1)$, pak $dim(R \cap S') = -\underbrace{dim(R+S')}_{\leq n} + \underbrace{dim(R)}_{=p-1} + \underbrace{dim(S')}_{=n-p+1} \geq 0$. Opět je $R \cap S'$ neprázdná množina. Nechť X je její libovolný prvek, pak je reálný, a přitom neleží v Q (jako celý R). Tedy dostali jsme maximalitu dimenze prostoru S. □

Věta 4.24
Ke každé nadkvadrice Q na přímce $\mathcal{P}_1^C$ existuje taková geometrická báze, že v ní má Q jednu z následujících rovnic:

1.	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	$[\pm i, 1]$
2.	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	$[\pm 1, 1]$
3.	$x_1^2 = 0$	$[0, 1]$

Věta 4.25
Ke každé kuželosečce Q v rovině $\mathcal{P}_2^C$ existuje taková geometrická báze, že v ní má Q jednu z následujících rovnic:

1.	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	imaginární regulární kuželosečka
2.	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	reálná regulární kuželosečka
3.	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	dvojice imaginárně sdružených přímek: $x_2 = \pm i x_1$
4.	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	dvojice reálných přímek: $x_2 = \pm x_1$
5.	$x_1^2 = 0$	dvojnásobná přímka: $x_1 = 0$

Věta 4.26
Ke každé kvadrice Q v prostoru $\mathcal{P}_3^C$ existuje taková geometrická báze, že v ní má Q jednu z následujících rovnic:

1.	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$	imaginární regulární kvadrika
2.	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$	reálná regulární kvadrika
3.	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$	přímková regulární kvadrika
4.	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	imaginární kuželová plocha
5.	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	reálná kuželová plocha
6.	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	dvojice imaginárně sdružených rovin
7.	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	dvojice reálných rovin
8.	$x_1^2 = 0$	dvojnásobná rovina

4.4 Afinní vlastnosti a klasifikace nadkvadrik

Budeme nyní pracovat s prostorem $\overline{\mathcal{A}_n^C}$. Ten je sice izomorfní s prostorem $\mathcal{P}_n^C$, my ale budeme dále rozlišovat mezi vlastními a nevlastními body. Dále budeme předpokládat, že každý vlastní bod má souřadnice tvaru $[x_1, \ldots, x_n, 1]$ a každý nevlastní bod ve tvaru $[u_1, \ldots, u_n, 0]$.

Jestliže v čistě projektivním prostoru jsme rovnici nadkvadriky zapisovali $\sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij} x_i x_j = 0$, lze nadále použít zápis $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1} x_i + a_{n+1,n+1} = 0$ pro vlastní body (předpokládáme, že $x_{n+1} = 1$) a zápis $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j$ pro nevlastní body (za předpokladu, že $u_{n+1} = 0$). Původní matici A tedy rozložíme na čtvercovou matici řádu n $\overline{A}$, sloupcový vektor $\vec{a}$ a číslo a takto:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \overline{A} & \vec{a} \\ \hline \vec{a}^T & a \end{array} \right)$$

Zřejmě $a = a_{n+1,n+1}$. Budeme dále vynechávat poslední souřadnici bodů, která bude vždy rovna jedné pro vlastní a nule pro nevlastní body. Budeme tedy uvažovat body $X = [x_1, \ldots, x_n] = [x_1, \ldots, x_n, 1]$ a vektory $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n) = [u_1, \ldots, u_n, 0]$. Potom rovnice nadkvadriky bude mít tvar $X^T \overline{A} X + 2\vec{a}^T X + a = 0$ resp. $\vec{u}^T \overline{A} \vec{u} = 0$.

Definice 4.27
Bod S nazveme středem nadkvadriky Q, je-li polárně sdružen se všemi nevlastními body.

Věta 4.28
Je-li S středem nadkvadriky Q a není singulárním bodem, pak jeho polární nadrovinou je nadrovina nevlastních bodů (nevlastní nadrovina).

Důkaz: zřejmý. □

Věta 4.29

Nechť Q má v afinní souřadné soustavě $\langle P; \vec{e_1}, \dots, \vec{e_{n+1}} \rangle$ rovnici $Q : \vec{x}^T A \vec{x} = 0$. Bod $S = (s_1, \dots, s_{n+1})$ je jejím středem právě tehdy, když jeho souřadnice $(s_1, \dots, s_{n+1})$ jsou řešením soustavy

$$\begin{array}{ccccccccc} F_1(\vec{s}) & = & a_{11}s_1 & + & \cdots & + & a_{1,n+1}s_{n+1} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ F_n(\vec{s}) & = & a_{n1}s_1 & + & \cdots & + & a_{n,n+1}s_{n+1} & = & 0 \end{array}$$

Důkaz: Podle definice je S středem právě tehdy, když $S^T AX = 0$ pro všechny nevlastní body X. Rovnici $S^T AX = 0$ lze pomocí asociovaných lineárních forem zapsat $F_1(\vec{s})x_1 + \cdots + F_n(\vec{s})x_n + F_{n+1}(\vec{s})x_{n+1} = 0$. Protože však $x_{n+1} = 0$ pro každý nevlastní bod X, požadujeme pouze, aby všechny lineární formy $F_1, \dots, F_n$ byly vektorem $\vec{s}$ vynulovány. □

Definice 4.30

Nadkvadrika, která má alespoň jeden vlastní střed, se nazývá *středová nadkvadrika.* V opačném případě ji budeme nazývat *nestředová nadkvadrika.*

Definice 4.31

Polární nadrovina nevlastního bodu, který není singulárním bodem nadkvadriky Q, se nazývá *průměrová nadrovina nadkvadriky.*

Polární přímka nevlastního bodu, který není singulárním bodem kuželosečky Q, se nazývá *průměr kuželosečky.*

Definice 4.32

Polární nadrovina nevlastního regulárního bodu nadkvadriky Q se nazývá *asymptotická nadrovina nadkvadriky.*

Věta 4.33

Ke každé nadkvadrice Q existuje n lineárně nezávislých vektorů $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}$ takových, že $\langle \vec{e_1} \rangle, \dots, \langle \vec{e_n} \rangle$ jsou vzhledem ke Q po dvou polárně sdružené.

Důkaz: Vezmeme nejprve v úvahu nadrovinu všech nevlastních bodů $N_{\mathcal{A}}$. Mohou nyní nastat dva případy:

1. Je-li $N_{\mathcal{A}} \subseteq Q$, pak libovolných n lineárně nezávislých směrů splňuje podmínku věty.
2. Pokud $N_{\mathcal{A}} \not\subseteq Q$, pak vybereme libovolný nevlastní bod $\langle \vec{e_1} \rangle = O_1 \notin Q$. Jeho polární nadrovinu označíme w_1. Mohou nyní nastat dva případy:
   (a) Je-li $N_{\mathcal{A}} \cap w_1 \subseteq Q$, pak libovolných $(n-1)$ lineárně nezávislých směrů z $N_{\mathcal{A}} \cap w_1$ spolu s O_1 splňuje podmínku věty.
   (b) Pokud $N_{\mathcal{A}} \cap w_1 \not\subseteq Q$, pak vybereme libovolný nevlastní bod $w_1 \ni \langle \vec{e_2} \rangle = 0_2 \notin Q$. Jeho polární nadrovinu označíme w_2. Mohou nyní nastat dva případy…

Tímto postupem zřejmě získáme směry požadovaných vlastností. □

Věta 4.34

Nechť Q je nadkvadrika a $\langle P; \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n} \rangle$ je afinní souřadná soustava taková, že $O_1 = \langle \vec{e_1} \rangle, \dots, O_n = \langle \vec{e_n} \rangle$ jsou po dvou polárně sdružené vzhledem ke Q. Pak v této souřadné soustavě má Q rovnici $Q : \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i + \sum_{i=1}^n a_i x_i + a = 0$.

Důkaz: Matice $\overline{A}$ má na pozici (i,j) číslo $a_{ij} = f^C(\vec{e_i}, \vec{e_j})$. Protože tyto vektory jsou po dvou polárně sdružené, je $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$. □

Věta 4.35

Nechť Q je středová nadkvadrika. Pak v afinní souřadné soustavě $\langle P; \vec{e_1}, \dots, \vec{e_n} \rangle$, kde P je vlastním středem Q, má Q rovnici: $Q : \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + a = 0$.

Důkaz: Jestliže P je počátek souřadné soustavy, pak má projektivní souřadnice $(0, \dots, 0, 1)$. Body $O_i = \langle \vec{e_i} \rangle$ mají souřadnice nulové až na i-tou, která je rovna jedné. Potom $P^T AO_i = a_{i,n+1}$. Ale $P^T AO_i = 0$, protože P je střed, proto $a_{i,n+1} = 0$. □

Důsledek 4.36

Nechť Q je středová nadkvadrika. Pak existuje afinní souřadná soustava taková, že v ní má Q jednu z následujících rovnic:

1. $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{h-1}^2 + 1 = 0$ pro $2p \geq h-1$; $h = h(Q)$
2. $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{h-1}^2 - 1 = 0$ pro $2p \geq h-1$; $h = h(Q)$
3. $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_h^2 = 0$ pro $2p \geq h-1$; $h = h(Q)$
4. $x_1^2 = 0$

Důkaz: Výsledek předchozích dvou vět stačí „normovat," tedy vzít $\vec{e_i}' = \frac{\vec{e_i}}{\sqrt{|a_{ii}|}}$. □

Věta 4.37

Nechť Q je nestředová nadkvadrika. Zvolíme afinní souřadnou soustavu $\langle P; \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n} \rangle$ tak, že P je regulární bod Q, $\vec{e_n}$ určuje nevlastní střed, $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_{n-1}}$ volíme ze zaměření tečné nadroviny ke Q v bodě P takové, že $\langle \vec{e_1} \rangle, \ldots, \langle \vec{e_{n-1}} \rangle$ jsou polárně sdružené. Pak v této afinní souřadné soustavě má Q rovnici: $\sum_{i=1}^{h-2} a_{ii} x_i^2 + 2a_n x_n = 0$ pro $h = h(Q)$; $h \geq 2$.

Důkaz: Bod P je regulární bod nadkvadriky, proto $P^T A P = 0$. Protože však bod P má souřadnice $[0, \ldots, 0, 1]$, je $P^T A P = a$, proto $a = 0$. Nechť $O_n = \langle \vec{e_n} \rangle$ je střed nadkvadriky Q. Proto je $O_n^T A O_i = 0$ pro $1 \leq i \leq n$. Projektivní bod O_n má souřadnice $[0, \ldots, 0, 1, 0]$. Body O_i mají souřadnice nulové až na i-tou, která je rovna jedné. Proto $O_n^T A O_i = a_{in} = 0$. To platí i pro $i = n$ (protože O_n je polárně sdružen se všemi směry, je sdružen i sám se sebou), a tak i $a_{nn} = 0$. Také $P^T A O_i = a_i = 0$ pro $1 \leq i < n$, protože všechny takové O_i jsou ze zaměření tečné nadroviny ke Q v bodě P. Pouze a_n nebude rovno nule. Matice A má tedy tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|cc} a_{11} & 0 & 0 & & & \\ 0 & \ddots & 0 & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ 0 & 0 & a_{h-2,h-2} & & & \\ \hline & \vec{0}^T & & \vec{0}\vec{0}^T & 0 & 0 \\ \hline & \vec{0}^T & & 0 & 0 & a_n \\ & \vec{0}^T & & 0 & a_n & 0 \end{array} \right)$$

Vidíme, že hodnost této matice je právě číslo h. □

Věta 4.38

Ke každé kuželosečce Q v rovině $\overline{\mathcal{A}_2^C}$ existuje taková afinní souřadná soustava, že v ní má Q jednu z rovnic:

1.	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	$x^2 + y^2 + 1 = 0$	imaginární elipsa
2.	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	reálná elipsa
3.	$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$	$x^2 - y^2 + 1 = 0$	hyperbola
4.	$x_1^2 \pm 2x_2 = 0$	$x^2 \pm 2y = 0$	parabola
5.	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	$x^2 + y^2 = 0$	dvě imaginárně sdružené různoběžky
6.	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	$x^2 - y^2 = 0$	dvě reálné různoběžky
7.	$x_1^2 + x_3^2 = 0$	$x^2 + 1 = 0$	dvě imaginárně sdružené rovnoběžky
8.	$x_1^2 - x_3^2 = 0$	$x^2 - 1 = 0$	dvě reálné rovnoběžky
9.	$x_1 x_3 = 0$		vlastní a nevlastní přímka
10.	$x_1^2 = 0$	$x^2 = 0$	dvojnásobná přímka

Věta 4.39

Ke každé kvadrice Q v prostoru $\overline{\mathcal{A}_3^C}$ existuje taková afinní souřadná soustava, že v ní má Q jednu z rovnic:

1.	$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0$	$x^2+y^2+z^2+1=0$	imaginární elipsoid
2.	$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2=0$	$x^2+y^2+z^2-1=0$	reálný elipsoid
3.	$x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2=0$	$x^2+y^2-z^2-1=0$	jednodílný hyperboloid
4.	$x_1^2+x_2^2-x_3^2+x_4^2=0$	$x^2+y^2-z^2+1=0$	dvoudílný hyperboloid
5.	$x_1^2+x_2^2\pm 2x_3x_4=0$	$x^2+y^2\pm 2z=0$	eliptický paraboloid
6.	$x_1^2-x_2^2\pm 2x_3x_4=0$	$x^2-y^2\pm 2z=0$	hyperbolický paraboloid
7.	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$	$x^2+y^2+z^2=0$	imaginární kužel
8.	$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$	$x^2+y^2-z^2=0$	reálný kužel
9.	$x_1^2+x_2^2+x_4^2=0$	$x^2+y^2+1=0$	imaginární válec
10.	$x_1^2+x_2^2-x_4^2=0$	$x^2+y^2-1=0$	reálný válec
11.	$x_1^2-x_2^2+x_4^2=0$	$x^2-y^2+1=0$	hyperbolický válec
12.	$x_1^2\pm 2x_3x_4=0$	$x^2\pm 2z=0$	parabolický válec
13.	$x_1^2+x_2^2=0$	$x^2+y^2=0$	dvě imaginárně sdružené různoběžné roviny
14.	$x_1^2-x_2^2=0$	$x^2-y^2=0$	dvě reálné různoběžné roviny
15.	$x_1^2+x_4^2=0$	$x^2+1=0$	dvě imaginárně sdružené rovnoběžné roviny
16.	$x_1^2-x_4^2=0$	$x^2-1=0$	dvě reálné rovnoběžné roviny
17.	$x_1x_4=0$		nevlastní rovina a vlastní rovina
18.	$x_1^2=0$	$x^2=0$	dvojnásobná vlastní rovina
19.	$x_4^2=0$		dvojnásobná nevlastní rovina

4.5 Metrické vlastnosti nadkvadrik

V této kapitole se budeme pohybovat v projektivním rozšíření komplexního rozšíření euklidovského prostoru $\overline{\mathcal{E}_n^C}$. Nebudeme však počítat s nevlastními body. Rovnice nadkvadrik budou mít, stejně jako v afinním prostoru, tvar $X^T\overline{A}X+2\vec{a}^TX+a=0$. Matice nadkvadrik budou vypadat takto:

$$\left(\begin{array}{c|c} \overline{A} & \vec{a} \\ \hline \vec{a}^T & a \end{array}\right)$$

Definice 4.40
Směr určený nenulovým vektorem $\vec{u}$ se nazývá *hlavní směr nadkvadriky* Q, je-li polárně sdružen se všemi kolmými směry.

Definice 4.41
Vlastní průměrová nadrovina nevlastního bodu, který není singulárním bodem ani středem nadkvadriky Q, ale který je jejím hlavním směrem, se nazývá *hlavní (osová) nadrovina nadkvadriky* Q.

Věta 4.42
Ke každé nadkvadrice Q existuje alespoň n na sebe kolmých hlavních směrů. Má-li Q v nějaké kartézské souřadné soustavě rovnici $Q: X^T\overline{A}X+2\vec{a}^TX+a=0$, pak vektor $\vec{u}$ určuje hlavní směr Q právě tehdy, když $\vec{u}$ je vlastní vektor matice $\overline{A}$.

Důkaz: Nechť $\vec{u}$ určuje nevlastní bod, který není ani singulárním bodem ani středem Q. Vektor $\vec{u}$ určuje hlavní směr právě tehdy, když pro každý vektor $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$ takový, že $u_1x_1+\dots+u_nx_n=0$ (tedy $\vec{x}\perp\vec{u}$), platí: $\vec{u}^T\overline{A}\vec{x}=0$ (tedy $\vec{u},\vec{x}$ polárně sdruženy). Můžeme psát: $\vec{u}^T\overline{A}\vec{x}=F_1(\vec{u})x_1+\dots+F_n(\vec{u})=0$. To lze splnit pro všechny vektory $\vec{x}$ pouze tehdy, je-li $F_i(\vec{u})=\lambda u_i$ pro nějaké reálné číslo λ. Jinak zapsáno, musí být $(F_1(\vec{u}),\dots,F_n(\vec{u}))=\lambda\vec{u}$, a tedy $\overline{A}\vec{u}=\lambda\vec{u}$. Dostali jsme tak výsledek, že podmínka pro vlastní vektory matice $\overline{A}$ je ekvivalentní podmínce na hlavní směry nadkvadriky Q.

Z lineární algebry víme, že každá symetrická matice řádu n má n na sebe kolmých vlastních vektorů, odkud plyne první část věty. □

Definice 4.43
Vlastním číslům matice $\overline{A}$ budeme říkat *hlavní čísla nadkvadriky* Q.

Věta 4.44

Nechť $Q : \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a = 0$ je rovnice nadkvadriky Q v kartézské souřadné soustavě. Pak existuje kartézská souřadná soustava taková, že v ní má Q jednu z rovnic:

$$\sum_{i=1}^{h} \lambda_i y_i^2 + B = 0 \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{h} \lambda_i y_i^2 + 2Cy_{h+1} = 0, \tag{16}$$

kde $B, C \in \mathbf{R}$, $C \neq 0$, $h = h(Q)$ a $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ jsou nenulová vlastní čísla $\overline{A}$.

Důkaz: Nechť $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}$ je ortogonální posloupnost vektorů určujících hlavní směry Q. Zvolíme nejprve reper $\mathcal{R} = \langle P; \vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}\rangle$. Nechť má Q v této kartézské souřadné soustavě rovnici $Q : X^T\overline{B}X + 2\vec{b}^TX + b = 0$. Protože vektory $\vec{u_i}$ jsou hlavní směry a navzájem kolmé, je pro $i \neq j$ $f^C(\vec{u_i}, \vec{u_j}) = 0$. Prvky b_{ij} matice $\overline{B}$ jsou však právě hodnoty $f^C(\vec{u_i}, \vec{u_j})$, proto jsou nulové.

Dále platí: $\overline{B}\vec{u_i} = \lambda_i\vec{u_i}$, protože vlastní hodnoty i vektory mají matice $\overline{A}$ a $\overline{B}$ společné. Vektor $\vec{u_i}$ má však v novém reperu souřadnice nulové, až na i-tou, která je rovna jedné. Proto $\overline{B}\vec{u_i} = (0, \ldots, 0, b_{ii}, 0, \ldots, 0) = (0, \ldots, 0, \lambda_i, 0, \ldots, 0)$, tedy $b_{ii} = \lambda_i$. Dostáváme tak rovnici nadkvadriky $Q : \sum_{i=1}^{h} \lambda_i x_i'^2 + 2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i' + b = 0$.

V dalším kroku provedeme transformaci $y_i = (x_i + \frac{b_i}{\lambda_i})$ pro $i = 1 \ldots h$ a $y_i = x_i'$ pro $i = h+1 \ldots n$. V nové kartézské souřadné soustavě dostaneme rovnici:

$$Q : \sum_{i=1}^{h} \lambda_i y_i^2 + 2\sum_{j=h+1}^{n} b_jy_j + b - \sum_{i=1}^{h} \frac{b_i^2}{\lambda_i} \tag{17}$$

Mohou nyní nastat dva případy:

1. $b_{h+1} = \cdots = b_n = 0$, pak položíme $B = b - \sum_{i=1}^{h} \frac{b_i^2}{\lambda_i}$ a dostáváme rovnici 15.

2. Existuje index $j \in \{h+1, \ldots, n\}$ takový, že $b_j \neq 0$. Označíme nejprve $C = \sqrt{b_{h+1}^2 + \cdots + b_n^2}$ a opět $B = b - \sum_{i=1}^{h} \frac{b_i^2}{\lambda_i}$ a zavedeme transformaci: $y_i = y_i'$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, h\}$. Transformace souřadnic y_j na y_j' pro $j \in \{h+1, \ldots, n\}$ používá značně komplikovanou konstrukci a celý důkaz je potom velmi technicky náročný. Uvedeme dále pouze speciální případ ve třech dimenzích, na kterém je vidět hlavní myšlenka této konstrukce.

   Dostali jsme tedy rovnici $\lambda y_i^2 + 2b_2y_2 + 2b_3y_3 + B = 0$ (viz rovnice 17). Potom je $C = \sqrt{b_2^2 + b_3^2}$ a zvolíme následující transformaci:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1' \\ y_2 &= \frac{b_2}{C}y_2' - \frac{b_3}{C}y_3' \\ y_3 &= \frac{b_3}{C}y_2' + \frac{b_2}{C}y_3' \end{aligned}$$

   Po dosazení dostáváme: $\lambda y_1'^2 + 2b_2(\frac{b_2}{C}y_2' - \frac{b_3}{C}y_3') + 2b_3(\frac{b_3}{C}y_2' + \frac{b_2}{C}y_3') + B = \lambda y_1'^2 + 2\frac{b_1^2+b_2^2}{C}y_2' + 2(b_2b_3 - b_3b_2)y_3' = \lambda y_1'^2 + 2Cy_2' + B = 0$. Poslední transformace $z_1 = y_1'$, $z_2 = y_2' + \frac{B}{2C}$ a $z_3 = y_3'$ nám dá konečně výsledek $\lambda z_1^2 + 2Cz_2 = 0$.

□

Věta 4.45

Nechť Q je nadkvadrika a A její matice v nějaké kartézské souřadné soustavě. Pak číslo $|A|$ se nemění při transformaci do jiné kartézské souřadné soustavy.

Důkaz: Nechť transformace je dána rovnicí $X = TX' + P'$, kde T je ortonormální matice, a tedy $|T| = \pm 1$. Vytvoříme novou matici S:

$$S = \left(\begin{array}{c|c} T & P' \\ \hline \vec{0}^T & 1 \end{array} \right)$$

Jistě platí:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Můžeme tedy psát $X = SX'$, přitom zůstává $|S| = \pm 1$. Rovnice Q je dána předpisem: $X^T AX = 0$, a proto také $(SX')^T A(SX') = 0$ je rovnice této nadkvadriky. Tedy $X'^T(S^T AS)X' = 0$ je její rovnicí v nové kartézské souřadné soustavě, a $S^T AS$ je její maticí v této soustavě. Potom $|S^T AS| = |S^T| \cdot |A| \cdot |S| = |A| \cdot |S|^2 = |A|$. $\square$

Věta 4.46

Polynom $|\overline{A} - \lambda E|$ je invariantní při transformaci kartézské souřadné soustavy.

Důkaz: Vycházíme z toho, že matice transformace T je ortonormální, tedy $T^T T = E$: $|T^T \overline{A} T - \lambda E| = |T^T \overline{A} T - \lambda T^T ET| = |T^T| \cdot |A - \lambda E| \cdot |T| = |A - \lambda E| \cdot |T|^2 = |A - \lambda E|$ $\square$

Věta 4.47

Nechť $Q : X^T \overline{A} X + 2\vec{a}^T X + a = 0$ je rovnice nadkvadriky Q. Jestliže $|\overline{A}| \neq 0$ (ekvivalentní s tím, že Q má právě jeden vlastní střed, což plyne bezprostředně z věty 4.29), pak v nějaké kartézské souřadné soustavě má Q rovnici $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + \frac{|A|}{|\overline{A}|} = 0$.

Důkaz: Nadkvadrika Q má rovnici 15 z věty 4.44, protože číslo h je buď n nebo $n - 1$. Má tedy matice A tvar:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \overline{A} & \vec{0} \\ \hline \vec{0}^T & B \end{array} \right)$$

Matice $\overline{A}$ je však diagonální s vlastními hodnotami $\lambda_i = a_{ii}$ na diagonále. Proto $|A| = \lambda_1 \cdots \lambda_n B$ a $|\overline{A}| = \lambda_1 \cdots \lambda_n$, proto $B = \frac{|A|}{|\overline{A}|}$. $\square$

Věta 4.48

Nechť Q je nadkvadrika taková, že $h(Q) = h(A) = n+1$ a $h(\overline{A}) = n-1$ (regulární nadkvadrika, která nemá vlastní střed[2]). Pak existuje kartézská souřadná soustava taková, že Q v ní má rovnici

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i^2 \pm 2\sqrt{-\frac{|A|}{\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}} x_n = 0 \qquad (18)$$

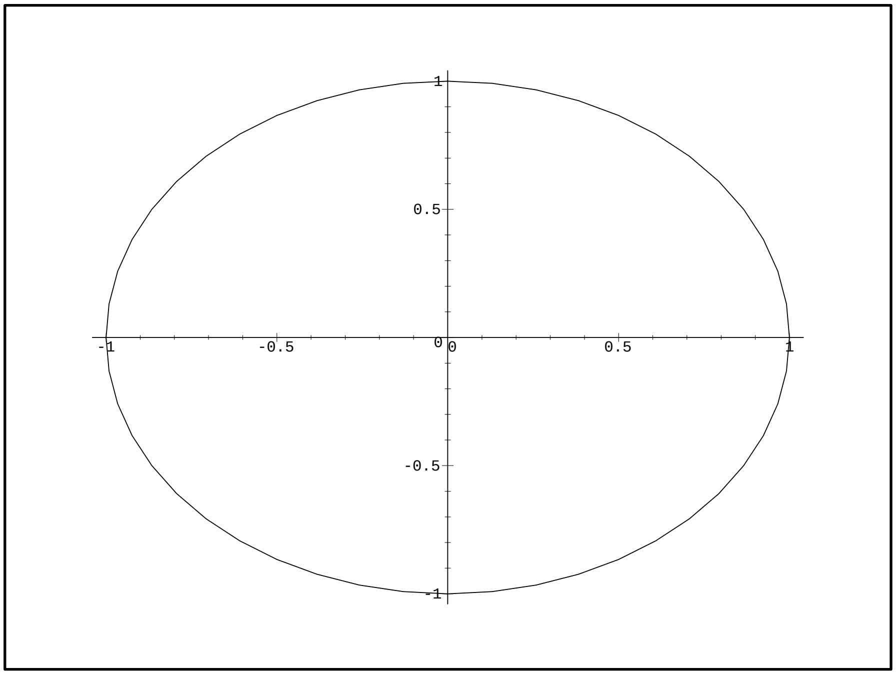
Důkaz: Nadkvadrika Q má rovnici 16 z věty 4.44, a to tvaru $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i^2 + 2Cx_n = 0$. Její matice má pak tvar

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C \\ \hline 0 & 0 & 0 & C & 0 \end{array} \right)$$

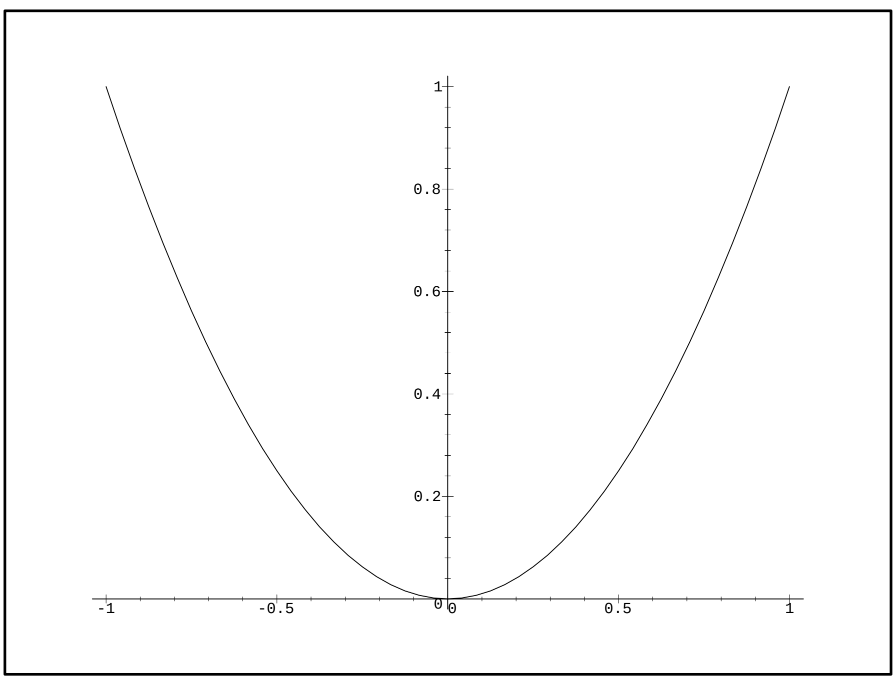
Potom $|A| = -C^2 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}$, z čehož dostáváme požadovaný vztah pro C. $\square$

A Obrazová příloha: kuželosečky a kvadriky

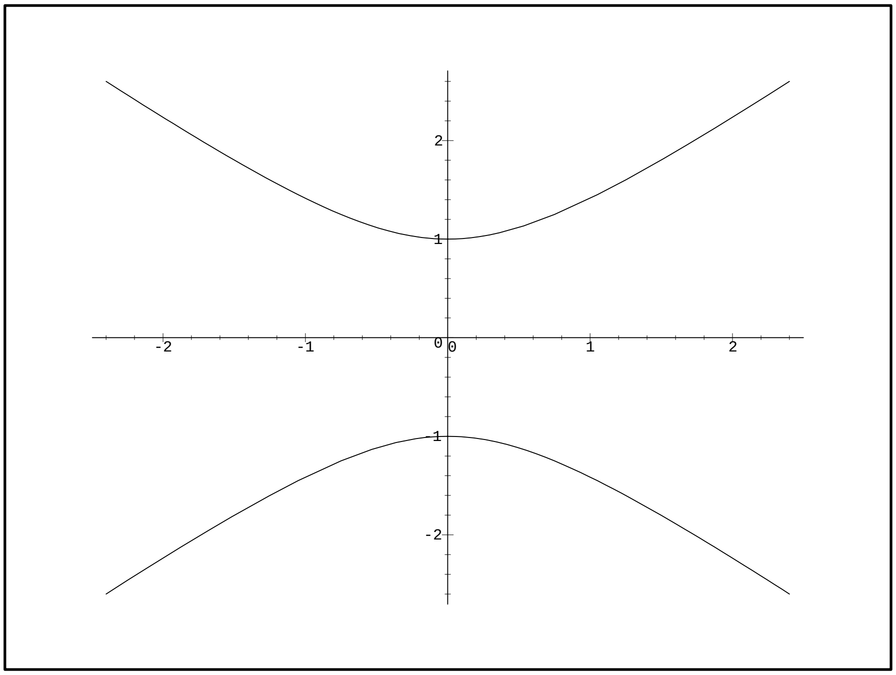
[2] Např. parabola, všechny paraboloidy,...



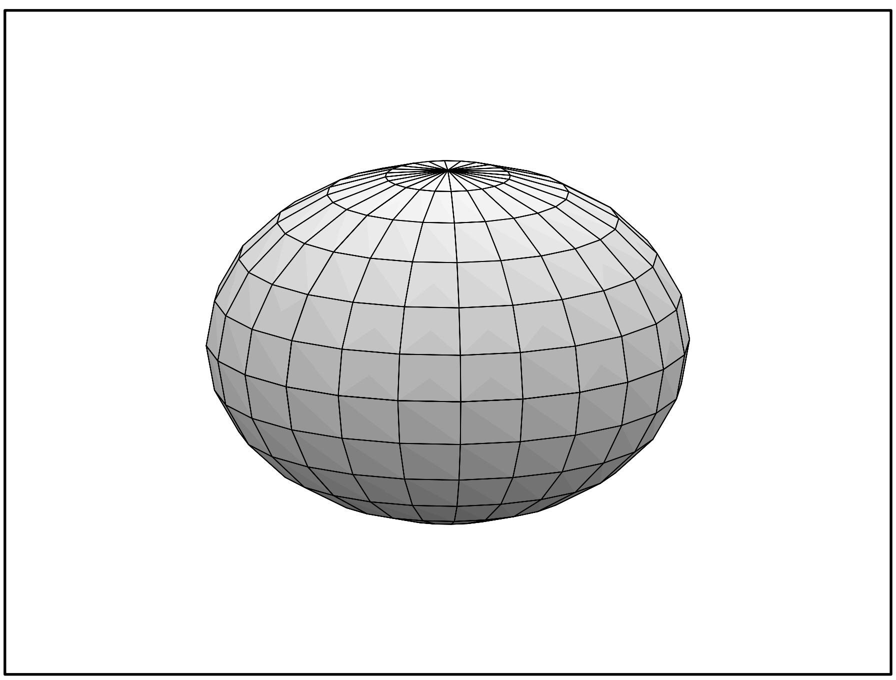
Obr. 2: Elipsa



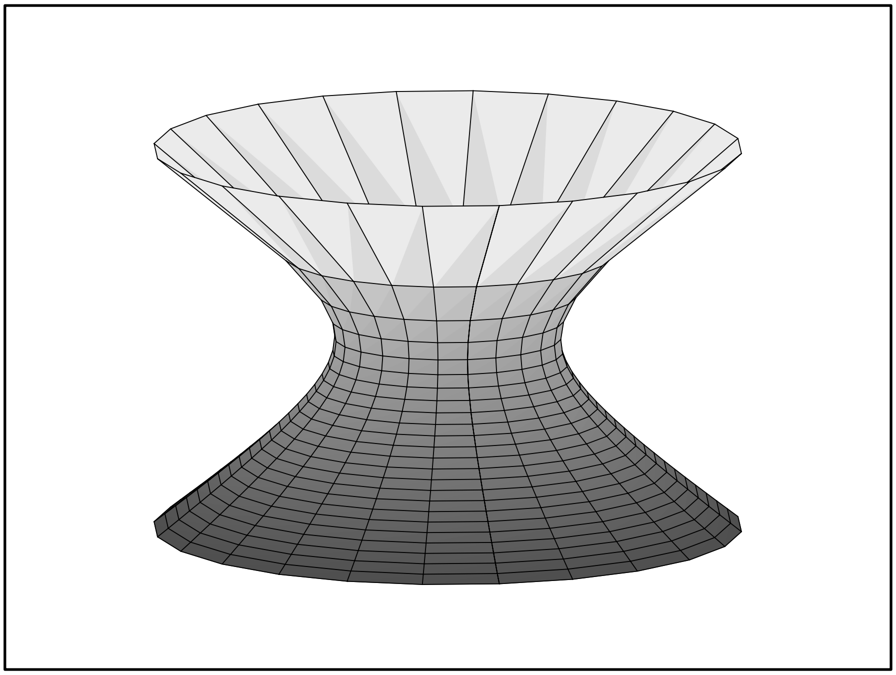
Obr. 3: Parabola



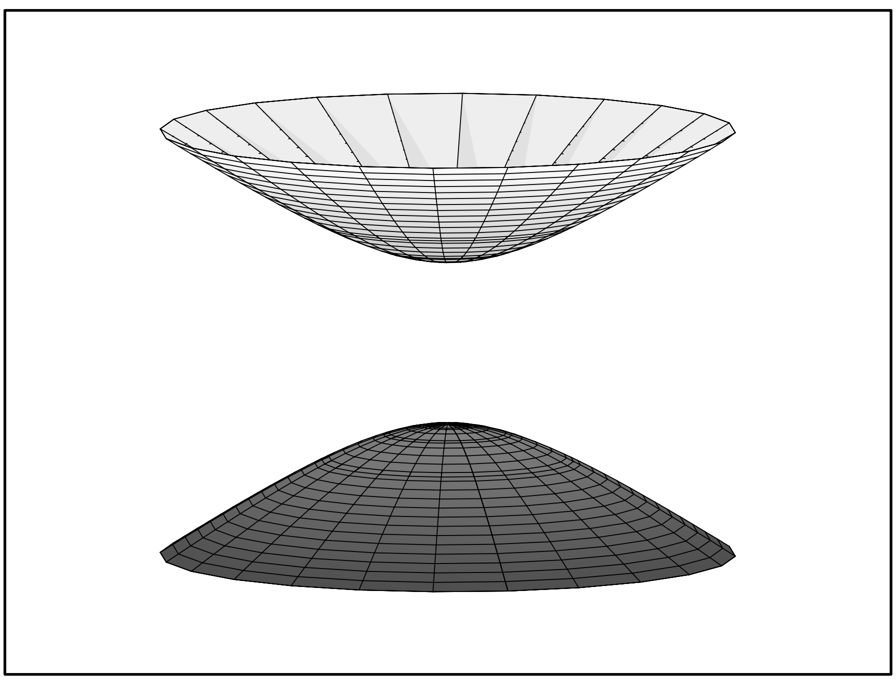
Obr. 4: Hyperbola



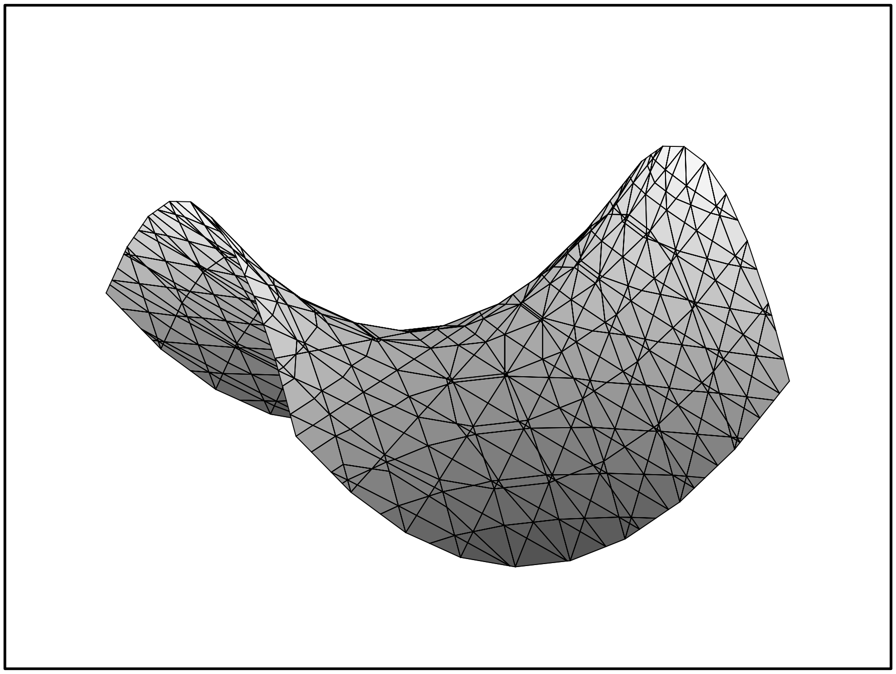
Obr. 5: Elipsoid



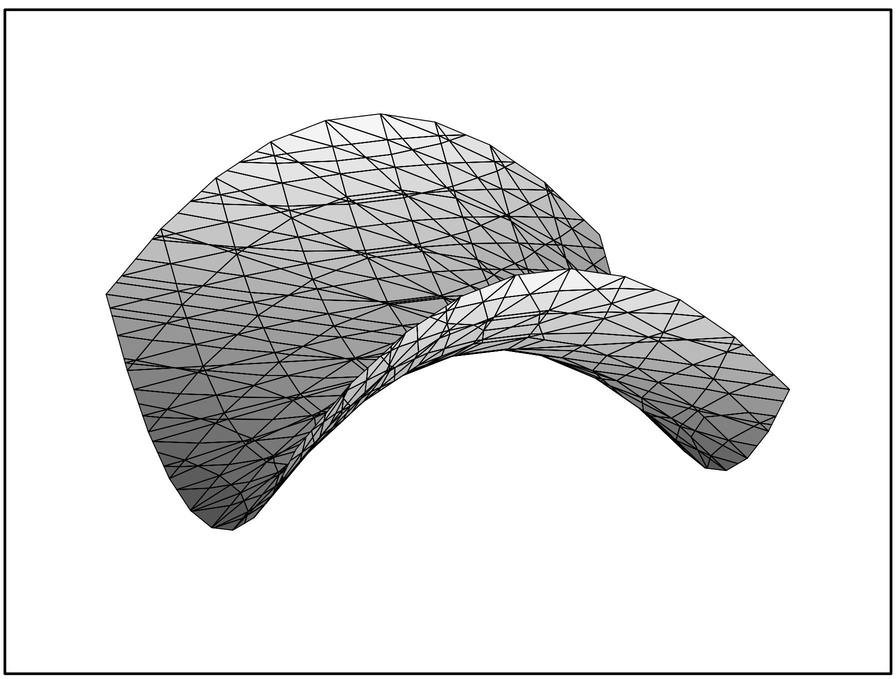
Obr. 6: Jednodílný hyperboloid



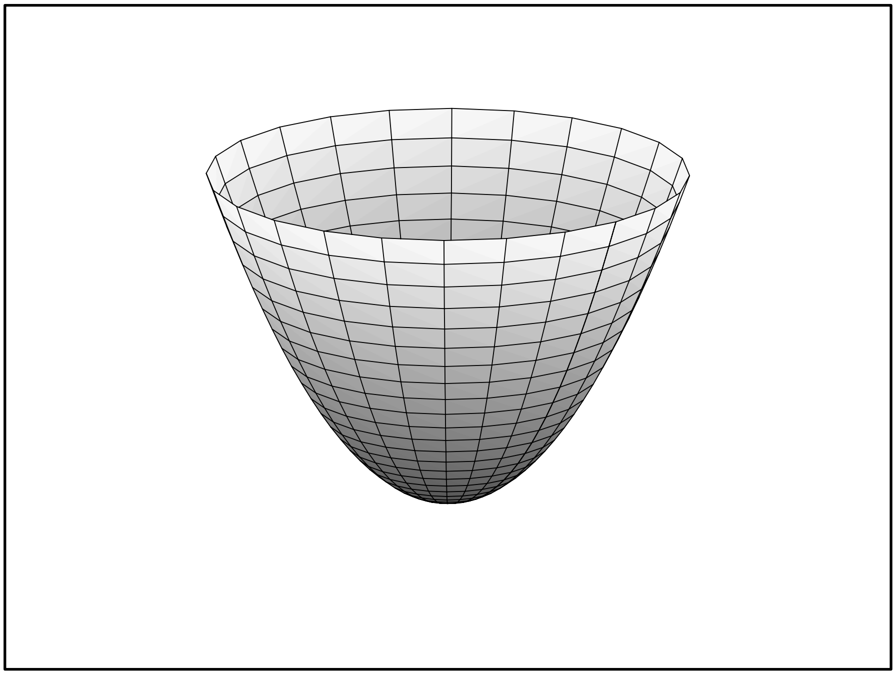
Obr. 7: Dvoudílný hyperboloid



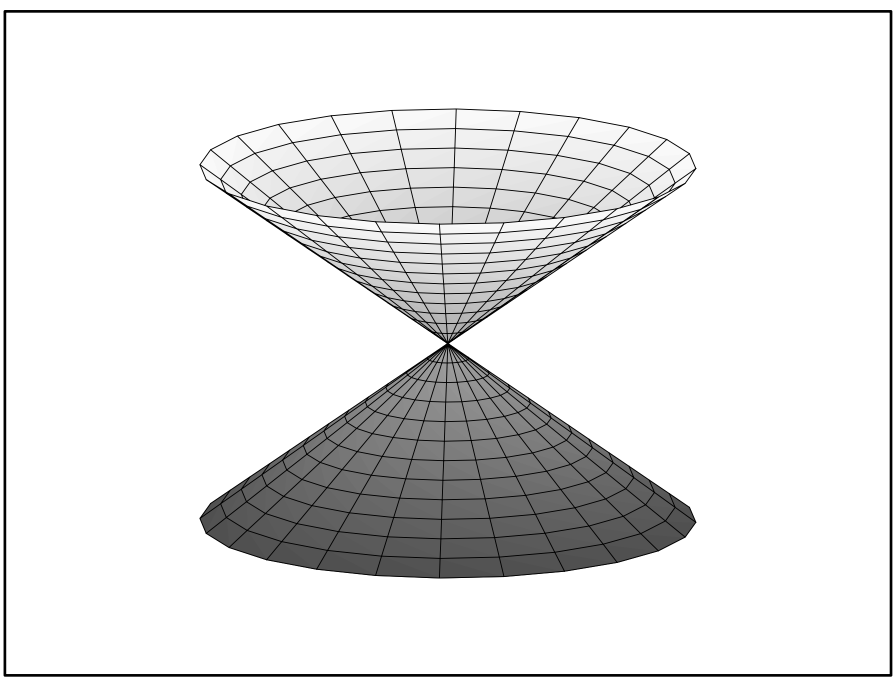
Obr. 8: Hyperbolický paraboloid (sedlo) — pohled 1



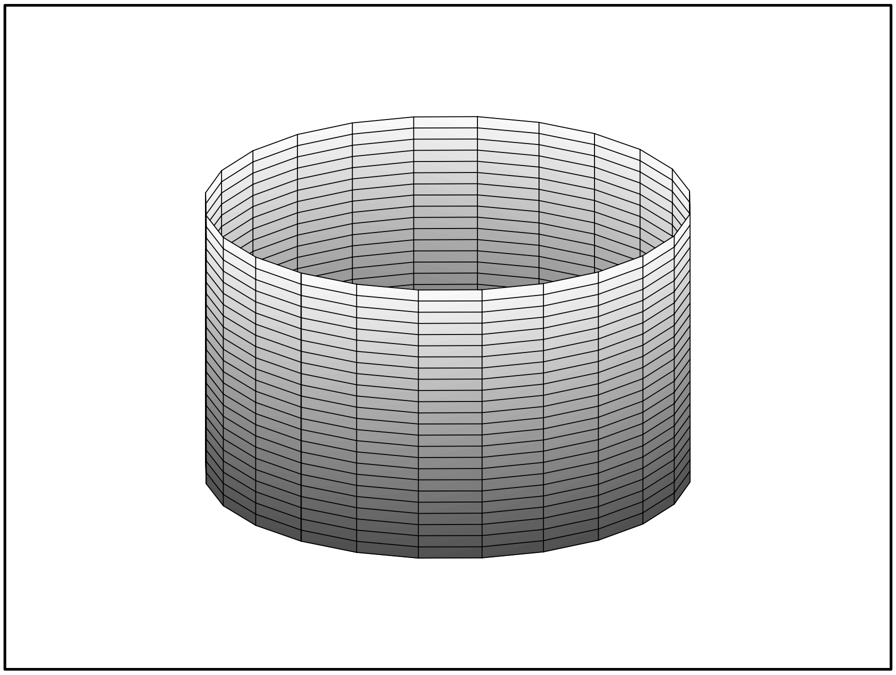
Obr. 9: Hyperbolický paraboloid (sedlo) — pohled 2



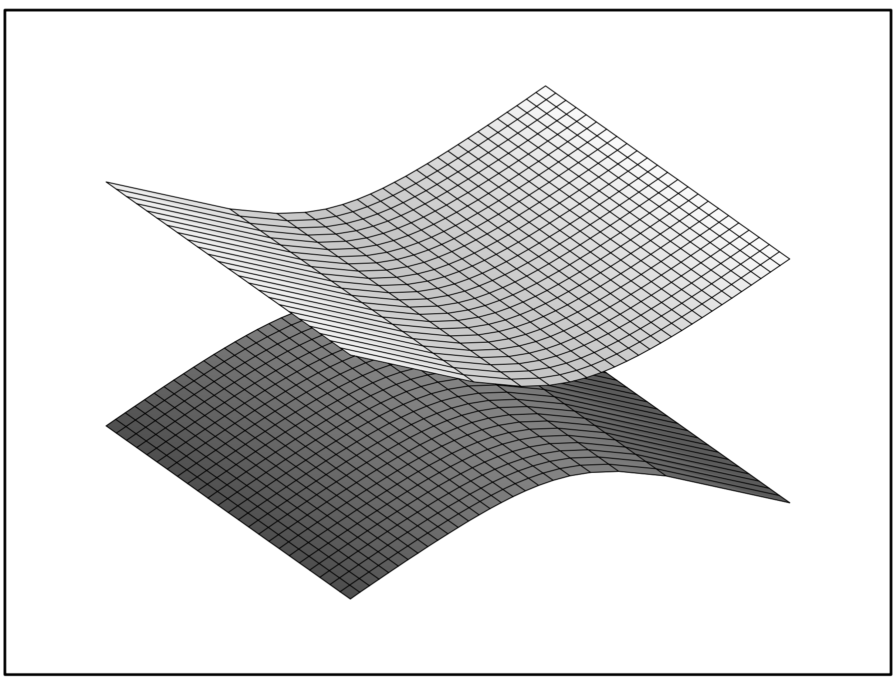
Obr. 10: Rotační paraboloid



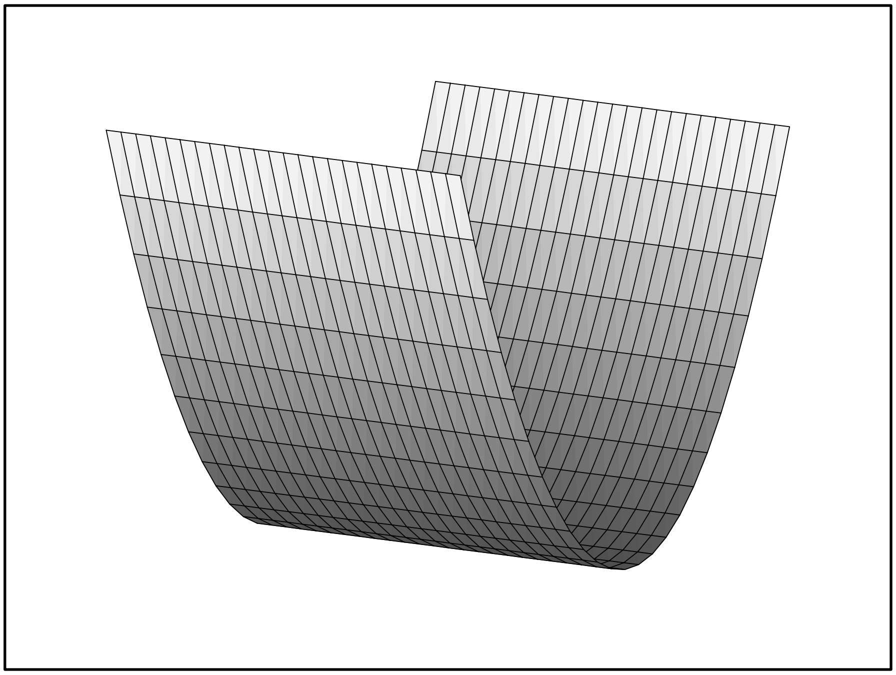
Obr. 11: Kužel



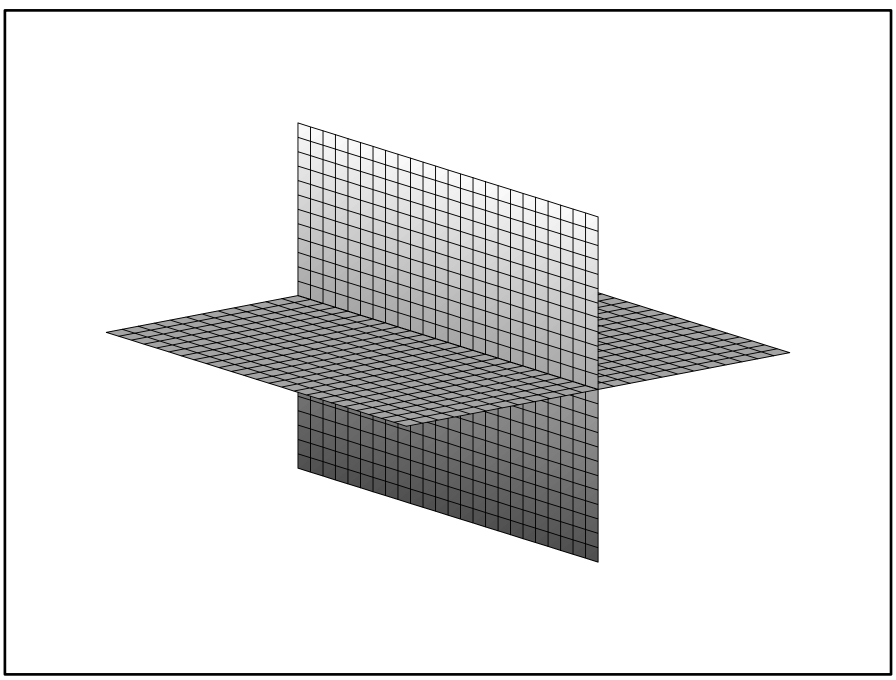
Obr. 12: Válec



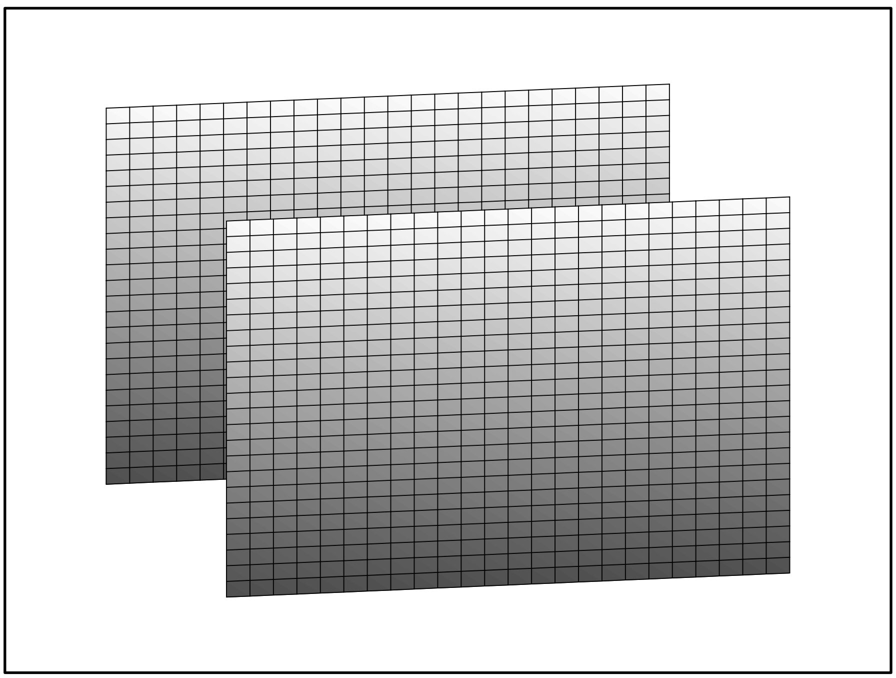
Obr. 13: Hyperbolický válec



Obr. 14: Parabolický válec



Obr. 15: Různoběžné roviny



Obr. 16: Rovnoběžné roviny