Neuronové sítě

Učení bipolárního perceptronu

Základní pojmy

bipolární perceptron – vstupy a výstupy jsou ± 1

Učení: vycházíme z kladných a záporných vzorů a učíme váhy $w_0, w_1, \ldots, w_n$

$$y = \operatorname{sign}\left(\sum_{k=0}^{n} w_k x_k\right), \quad x_0 = 1, \qquad x_k, y \in \{-1, +1\}$$

vzor (pattern) = uspořádaná dvojice vstupního signálu $\overline{x}$ a požadovaného (očekávaného) výstupu y^*
$(\overline{x}^{\mathrm{T}}, y^*) = (x_0, x_1, \ldots, x_n, y^*)$

kladný vzor – $(\overline{x}^{\mathrm{T}}, +1)$

záporný vzor – $(\overline{x}^{\mathrm{T}}, -1)$

Základní pojmy

množina vzorů – $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$, kde $p_i = (\overline{x}_i^{\mathrm{T}}, y_i^*)$

$S = S^+ \cup S^-$

počet vzorů: $m = |S|$, $m^+ = |S^+|$, $m^- = |S^-|$

Maticová reprezentace $(\mathbf{X}|\overline{y}^*)$

$$
\begin{array}{c|cccc|c|c|}
 & & \mathbf{X} & & & & \overline{y}^* \\
p_1 & x_{10} & x_{11} & \ldots & x_{1n} & & y_1^* \\
p_m & x_{m0} & x_{m1} & \ldots & x_{mn} & & y_m^*
\end{array}
$$

Perfektní učení

$$\forall i = 1, \ldots, m: \qquad y_i = y_i^*$$

$$\forall i = 1, \ldots, m: \qquad \operatorname{sign}\left(\sum_{k=0}^{n} x_{ik} w_k\right) = y_i^*$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sign}\left(\sum_{k=0}^{n} x_{ik} w_k\right) &= y_i^* \quad / .y_i^* \\
y_i^* \operatorname{sign}\left(\sum_{k=0}^{n} x_{ik} w_k\right) &= (y_i^*)^2 = 1 \\
\operatorname{sign}\left(\sum_{k=0}^{n} x_{ik} y_i^* w_k\right) &= 1
\end{aligned}$$

Perfektní učení

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} x_{ik} y_i^* w_k &> 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m \\
\sum_{k=0}^{n} x_{ik} y_i^* w_k &\geq 1, \quad \forall i = 1, \ldots, m \\
\sum_{k=0}^{n} x_{ik}^* w_k &\geq 1, \quad \forall i = 1, \ldots, m
\end{aligned}
$$

Perfektní učení

Máme dvě možnosti:

1. soustava nerovnic nemá řešení
   $\Rightarrow$ musíme to řešit neperfektně
2. existuje alespoň jedno řešení $(w_0, w_1, \dots, w_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+1}$
   $\Rightarrow$ **a)** existuje-li jedno, je jich nekonečně mnoho
   např. $\lambda \geq 1$, $(\lambda w_0, \lambda w_1, \dots, \lambda w_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+1}$
   $\Rightarrow$ **b)** existuje $(w_0, w_1, \dots, w_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{Q}^{n+1}$
   viz. Cramerovo pravidlo
   $\Rightarrow$ **c)** λ = nejmenší společný násobek $(\mathrm{jm}(w_0), \dots, \mathrm{jm}(w_n)) \geq 1$
   tímto λ vynásobíme váhy z b)
   $\Rightarrow$ existuje $(w_0, w_1, \dots, w_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{Z}^{n+1}$

Závěr: existuje-li řešení soustavy nerovnic, pak existuje nekonečně mnoho celočíselných řešení

Perfektní učení

	x_0	x_1	x_2	y^*
a	+1	−1	−1	+1
b	+1	−1	+1	−1
c	+1	+1	−1	+1
d	+1	+1	+1	−1

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
w_0 & - & w_1 & - & w_2 & \geq & 1 \\
-w_0 & + & w_1 & - & w_2 & \geq & 1 \\
w_0 & + & w_1 & - & w_2 & \geq & 1 \\
-w_0 & - & w_1 & - & w_2 & \geq & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Perfektní učení

	x_0	x_1	x_2	y^*
a	+1	−1	−1	+1
b	+1	−1	+1	−1
c	+1	+1	−1	+1
d	+1	+1	+1	−1

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & w_0 & - & w_1 & - & w_2 & = & 1 \\
- & w_0 & + & w_1 & - & w_2 & = & 1 \\
 & w_0 & + & w_1 & - & w_2 & = & 1 \\
- & w_0 & - & w_1 & - & w_2 & = & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$$\overline{w} = (0, 0, -1)^{\mathrm{T}}$$

Nastavení vah

Zajištění nenulového výstupu:

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, +1\} : \operatorname{sign}\left(w_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k w_k \right) \neq 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} |w_k| = 2j + 1, \quad w_k \in \mathbb{Z}$$

Doplňková podmínka: $\|(w_1, \dots, w_n)\| = \min$

- $|w_1| + \dots + |w_n| = \min$
- $\sqrt{w_1^2 + \dots + w_n^2} = \min$
- $\max(|w_1|, \dots, |w_n|) = \min$

Rosenblattovo učení

Algoritmus

1. náhodně vybereme vzor
2. vypočítáme výstup y
   a) $y = y^* \Rightarrow$ výstup odpovídá
   b) $y \neq y^* \Rightarrow$ výstup neodpovídá
   $y^* = +1 \Rightarrow$ přičteme vzor k vahám
   $y^* = -1 \Rightarrow$ odečteme vzor od vah
   $$\overline{w}^{new} = \overline{w} + \mathrm{sign}(\triangle)\,\overline{x}, \qquad \triangle = y^* - y$$
3. pokračujeme dalším vzorem

Konec algoritmu

- po čase přeruším náhodný výběr a systematicky proberu všechny vzory
- má-li soustava řešení, pak ho Rosenblattův algoritmus nalezne po konečném počtu kroků
- skutečný počet kroků roste exponenciálně s počtem vstupů

Rosenblattovo učení

	x_0	x_1	x_2	y^*
a	+1	−1	−1	+1
b	+1	−1	+1	+1
c	+1	+1	−1	+1
d	+1	+1	+1	−1

posloupnost: c, b, d, a; b, a, c, d; c, a, b, d; . . .

počáteční váhy: $\overline{w}^{(0)} = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$

	w_0	w_1	w_2	$\sum$	y	y^*		operace s $\overline{w}$
$\overline{w}^{(0)}$	0	0	0					
c:	+1	+1	−1	0	0	+1	$\Rightarrow$	$\overline{w} + c$
$\overline{w}^{(1)}$	+1	+1	−1					
b:	+1	−1	+1	−1	−1	+1	$\Rightarrow$	$\overline{w} + b$
$\overline{w}^{(2)}$	+2	0	0					
d:	+1	+1	+1	+2	+1	−1	$\Rightarrow$	$\overline{w} - d$
$\overline{w}^{(3)}$	+1	−1	−1					

Rosenblattovo učení

	x_0	x_1	x_2	y^*
a	+1	−1	−1	+1
b	+1	−1	+1	+1
c	+1	+1	−1	+1
d	+1	+1	+1	−1

posloupnost: c, b, d, a; b, a, c, d; c, a, b, d; . . .

počáteční váhy: $\overline{w}^{(0)} = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$

	w_0	w_1	w_2	$\sum$	y	y^*		operace s $\overline{w}$
$\overline{w}^{(3)}$	+1	−1	−1					
a:	+1	−1	−1	+3	+1	+1	$\Rightarrow$	nic
b:	+1	−1	+1	+1	+1	+1	$\Rightarrow$	nic
a:	známe							
c:	+1	+1	−1	+1	+1	+1	$\Rightarrow$	nic
d:	+1	+1	+1	−1	−1	−1	$\Rightarrow$	nic, konec

$$\overline{w} = (w_0, w_1, w_2)^{\mathrm{T}} = (1, -1, -1)^{\mathrm{T}}$$

Delta učení (Widrow – Hoff)

$$\overline{w}^{new} = \overline{w} + \lambda \triangle \overline{x}, \qquad \lambda > 0, \quad \triangle = y^* - y$$

Rosenblattovo učení: pro $y \neq 0$ a $\lambda = \frac{1}{2}$.

Delta učení

	x_0	x_1	x_2	y^*
a	$+1$	-1	-1	$+1$
b	$+1$	-1	$+1$	$+1$
c	$+1$	$+1$	-1	$+1$
d	$+1$	$+1$	$+1$	-1

posloupnost: c, b, d, a; b, a, c, d; c, a, b, d; . . .

počáteční váhy: $\overline{w}^{(0)} = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$

$\lambda = 0.8$

	w_0	w_1	w_2	$\sum$	y	y^*
$\overline{w}^{(0)}$:	0	0	0			
c:	1	1	-1	0.00	0	1
$\overline{w}^{(1)}$:	0,80	0,80	$-0,80$			
b:	1	-1	1	$-0,80$	-1	1
$\overline{w}^{(2)}$:	2,40	$-0,80$	0,80			
d:	1	1	1	2,40	1	-1
$\overline{w}^{(3)}$:	0,80	$-2,40$	$-0,80$			

Delta učení

	x_0	x_1	x_2	y^*
a	+1	−1	−1	+1
b	+1	−1	+1	+1
c	+1	+1	−1	+1
d	+1	+1	+1	−1

posloupnost: c, b, d, a; b, a, c, d; c, a, b, d; . . .

počáteční váhy: $\overline{w}^{(0)} = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$

$\lambda = 0.8$

	w_0	w_1	w_2	$\sum$	y	y^*	
$\overline{w}^{(3)}$:	$0,80$	$-2,40$	$-0,80$				
a:	1	-1	-1	$4,00$	1	1	(nic)
b:	1	-1	1	$2,40$	1	1	(nic)
a:		známe					
c:	1	1	-1	$-0,80$	-1	1	
$\overline{w}^{(4)}$:	$2,40$	$-0,80$	$-2,40$				

Delta učení

	x_0	x_1	x_2	y^*
a	+1	−1	−1	+1
b	+1	−1	+1	+1
c	+1	+1	−1	+1
d	+1	+1	+1	−1

posloupnost: c, b, d, a; b, a, c, d; c, a, b, d; ...
počáteční váhy: $\overline{w}^{(0)} = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$
$\lambda = 0.8$

	w_0	w_1	w_2	$\sum$	y	y^*	
$\overline{w}^{(4)}$:	2,40	−0,80	−2,40				
d:	1	1	1	−0,80	−1	−1	(nic)
c:	1	1	−1	4,00	1	1	(nic)
a:	1	−1	−1	5,60	1	1	(nic)
b:	1	−1	1	0,80	1	1	(nic)

$$\overline{w} = \left(\ 2,40;\quad -0,80;\quad -2,40\ \right)^{\mathrm{T}}$$

Hebbovo učení

$$\overline{w}^{new} = \overline{w} + y^* \, \overline{x}$$

- každý vzor bereme právě jednou

Výhody a nevýhody:

+ je jednoduché
+ při učení nepotřebujeme y
+ výsledek učení nezávisí na pořadí vzorů
+ váhy lze snadno interpretovat
– nezaručuje perfektní učení

$$\overline{w} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}} \overline{y}^*$$

Hebbovo učení

	x_0	x_1	x_2	y^*
a	$+1$	-1	-1	$+1$
b	$+1$	-1	$+1$	$+1$
c	$+1$	$+1$	-1	$+1$
d	$+1$	$+1$	$+1$	-1

	w_0	w_1	w_2
$\overline{w}^{(0)}$	0	0	0
$(+1)\cdot$ a:	$+1$	-1	-1
$\overline{w}^{(1)}$	$+1$	-1	-1
$(+1)\cdot$ b:	$+1$	-1	$+1$
$\overline{w}^{(2)}$	$+2$	-2	0
$(+1)\cdot$ c:	$+1$	$+1$	-1
$\overline{w}^{(3)}$	$+3$	-1	-1
$(-1)\cdot$ d:	-1	-1	-1
$\overline{w}^{(4)}$	$+2$	-2	-2

$$\overline{w} = (+2, -2, -2)^{\mathrm{T}}$$

Učení metodou LSQ

$$y_i = s_i = \sum_{k=0}^{n} w_k x_{ik}, \qquad x_{i0} = 1, \quad i = 1, \dots m$$

Metoda je založena na soustavě rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc} w_0 x_{10} & + & w_1 x_{11} & + & \dots & + & w_n x_{1n} & = & y_1^* \\ \vdots & & & & & & & & \\ w_0 x_{m0} & + & w_1 x_{m1} & + & \dots & + & w_n x_{mn} & = & y_m^* \end{array}$$

tj.

$$\mathbf{X}\overline{w} = \overline{y}^*$$

Učení metodou LSQ

- musí být $\mathrm{h}(\mathbf{X}|\overline{y}^*) = \mathrm{h}(\mathbf{X})$ a navíc pokud $\mathrm{h}(\mathbf{X}) = n+1$, má soustava právě jedno řešení
- $\sum_{i=1}^{m} |y_i - y_i^*| = \min$
- Gauss:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}\overline{w} &= \overline{y}^* \\ \mathbf{X}^{\mathrm{T}}(\mathbf{X}\overline{w}) &= \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\overline{y}^* \\ (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})\,\overline{w} &= \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\overline{y}^* \end{aligned}$$

- $|\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}| \neq 0$

$$\overline{w} = \underbrace{(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}}_{\mathbf{X}^+}\overline{y}^*$$

- $|\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}| = 0 \Rightarrow$ regularizace LSQ

$$\overline{w} = \underbrace{(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}}_{\mathbf{X}^+}\overline{y}^*,\ \lambda > 0$$

$$\overline{w} = \underbrace{\lim_{\lambda\to 0_+}\left[(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} + \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\right]}_{\mathbf{X}^+}\overline{y}^*$$

Učení metodou LSQ

x_0	x_1	x_2	y^*
$+1$	$+1$	-1	$+1$
$+1$	$+1$	1	-1

LSQ:

$$\overline{w} = \left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\overline{y}^*$$

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$h\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right) = 2 \Rightarrow |\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}| = 0 \Rightarrow \left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right)^{-1}$ neexistuje

Učení metodou LSQ

x_0	x_1	x_2	y^*
$+1$	$+1$	-1	$+1$
$+1$	$+1$	1	-1

Regularizace LSQ:

- $\lambda = 1$, $\lambda = \frac{1}{10}$

$$\overline{w} = \left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} + \lambda\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\overline{y}^*, \quad \lambda > 0$$

- $\lambda \to 0_+$

$$\overline{w} = \lim_{\lambda \to 0_+}\left[\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} + \lambda\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\right]\overline{y}^*$$

Učení metodou LSQ

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} + \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2+\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2+\lambda \end{pmatrix}$$

$\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} + \lambda\mathbf{I}\right)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2+\lambda & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2+\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\lambda & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{2+\lambda} & 0 & \frac{1}{2+\lambda} & 0 & 0 \\ 2 & 2+\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2+\lambda} \end{array}\right) \sim$$

Učení metodou LSQ

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & \frac{2}{2+\lambda} & 0 & \frac{1}{2+\lambda} & 0 & 0 \\
0 & \frac{(2+\lambda)^2-4}{2+\lambda} & 0 & -\frac{2}{2+\lambda} & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2+\lambda}
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & \frac{2}{2+\lambda} & 0 & \frac{1}{2+\lambda} & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -\frac{2}{(2+\lambda)^2-4} & \frac{2+\lambda}{(2+\lambda)^2-4} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2+\lambda}
\end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & \frac{2+\lambda}{\lambda^2+4\lambda} & -\frac{2}{\lambda^2+4\lambda} & 0 \\
0 & 1 & 0 & -\frac{2}{\lambda^2+4\lambda} & \frac{2+\lambda}{\lambda^2+4\lambda} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2+\lambda}
\end{array}\right)
$$

Učení metodou LSQ

$$\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}+\lambda\mathbf{I}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2+\lambda}{\lambda^2+4\lambda} & -\frac{2}{\lambda^2+4\lambda} & 0 \\ -\frac{2}{\lambda^2+4\lambda} & \frac{2+\lambda}{\lambda^2+4\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2+\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}^{+}=\left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}+\lambda\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} \frac{2+\lambda}{\lambda^2+4\lambda} & -\frac{2}{\lambda^2+4\lambda} & 0 \\ -\frac{2}{\lambda^2+4\lambda} & \frac{2+\lambda}{\lambda^2+4\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2+\lambda} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda^2+4\lambda} & \frac{\lambda}{\lambda^2+4\lambda} \\ \frac{\lambda}{\lambda^2+4\lambda} & \frac{\lambda}{\lambda^2+4\lambda} \\ -\frac{1}{2+\lambda} & \frac{1}{2+\lambda} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda+4} & \frac{1}{\lambda+4} \\ \frac{1}{\lambda+4} & \frac{1}{\lambda+4} \\ -\frac{1}{2+\lambda} & \frac{1}{2+\lambda} \end{pmatrix}$$

Učení metodou LSQ

- $\lambda = 1$

$$\overline{w} = \mathbf{X}^{+}\overline{y}^{*} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- $\lambda = \frac{1}{10}$

$$\overline{w} = \mathbf{X}^{+}\overline{y}^{*} = \begin{pmatrix} \frac{10}{41} & \frac{10}{41} \\ \frac{10}{41} & \frac{10}{41} \\ -\frac{10}{21} & \frac{10}{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{20}{21} \end{pmatrix}$$

- $\lambda \to 0_{+}$

$$\overline{w} = \mathbf{X}^{+}\overline{y}^{*} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$