

Neuronové sítě

Neuronové sítě a logika



Vstupy a výstup perceptronu

$$y = f\left(\sum_{k=0}^n w_k x_k\right), x_0 = 1 \quad x_i \in \begin{cases} \{0; +1\} & \text{binární vstupy;} \\ \{-1; +1\} & \text{bipolární vstupy.} \end{cases}$$

Bipolární perceptron:

$$x_i \in \{-1; +1\}$$

$$y \in \{-1; 0; +1\}$$

$$y = f(s) = \text{sign}(s) = \begin{cases} +1, & s > 0; \\ 0, & s = 0; \\ -1, & s < 0. \end{cases}$$



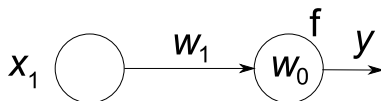
Logické operace

- negace
- konjunkce
- disjunkce
- majoritní (většinový) obvod
- XOR



Negace

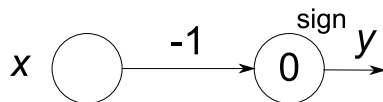
x	$y = \neg x$
-1	+1
+1	-1



$$y = \text{sign}(w_0 + w_1 x_1)$$

Negace

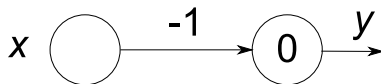
x	$y = \neg x$
-1	+1
+1	-1



$$y = \text{sign}(w_0 + w_1 x)$$

Negace

x	$y = \neg x$
-1	+1
+1	-1

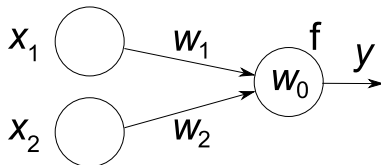


$$y = \text{sign}(w_0 + w_1 x) = \text{sign}(-x)$$



Konjunkce

x_1	x_2	$y = x_1 \wedge x_2$
-1	-1	-1
-1	+1	-1
+1	-1	-1
+1	+1	+1

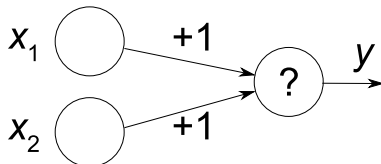


$$y = \text{sign}(w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2)$$



Konjunkce

x_1	x_2	$y = x_1 \wedge x_2$
-1	-1	-1
-1	+1	-1
+1	-1	-1
+1	+1	+1

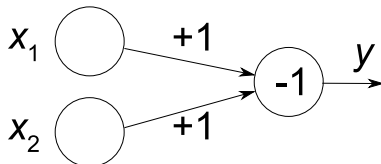


$$\begin{aligned}
 y &= \text{sign}(w_0 + w_1x_1 + w_2x_2) = \\
 &= \text{sign}(? + x_1 + x_2)
 \end{aligned}$$



Konjunkce

x_1	x_2	$y = x_1 \wedge x_2$
-1	-1	-1
-1	+1	-1
+1	-1	-1
+1	+1	+1

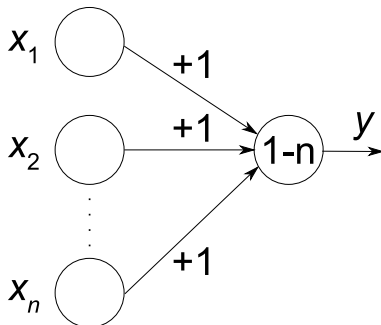


$$\begin{aligned}
 y &= \text{sign}(w_0 + w_1x_1 + w_2x_2) = \\
 &= \text{sign}(-1 + x_1 + x_2)
 \end{aligned}$$



Konjunkce

$$y = \bigwedge_{k=1}^n x_k = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$$

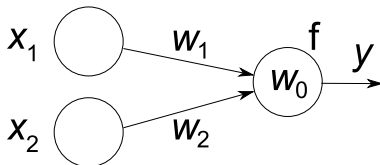


$$y = \text{sign} \left(w_0 + \sum_{k=1}^n x_k w_k \right) = \text{sign} \left(1 - n + \sum_{k=1}^n x_k \right)$$



Disjunkce

x_1	x_2	$y = x_1 \vee x_2$
-1	-1	-1
-1	+1	+1
+1	-1	+1
+1	+1	+1

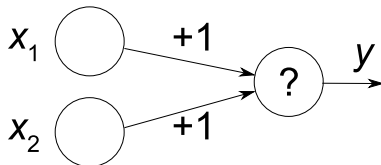


$$y = \text{sign}(w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2)$$



Disjunkce

x_1	x_2	$y = x_1 \vee x_2$
-1	-1	-1
-1	+1	+1
+1	-1	+1
+1	+1	+1

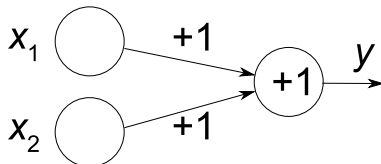


$$\begin{aligned}
 y &= \text{sign}(w_0 + w_1x_1 + w_2x_2) = \\
 &= \text{sign}(? + x_1 + x_2)
 \end{aligned}$$



Disjunkce

x_1	x_2	$y = x_1 \vee x_2$
-1	-1	-1
-1	+1	+1
+1	-1	+1
+1	+1	+1

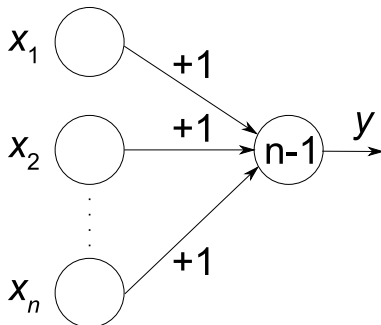


$$\begin{aligned}
 y &= \text{sign}(w_0 + w_1x_1 + w_2x_2) = \\
 &= \text{sign}(+1 + x_1 + x_2)
 \end{aligned}$$



Disjunkce

$$y = \bigvee_{k=1}^n x_k = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$$



$$y = \text{sign} \left(w_0 + \sum_{k=1}^n x_k w_k \right) = \text{sign} \left(n - 1 + \sum_{k=1}^n x_k \right)$$



Pravidla při nastavování vah

negace vstupu

- všechny váhy od něj vedoucí vynásobíme -1

negace výstupu

- váhy w_0, w_1, \dots, w_n vynásobíme -1



Typy neuronových sítí

acyklická síť

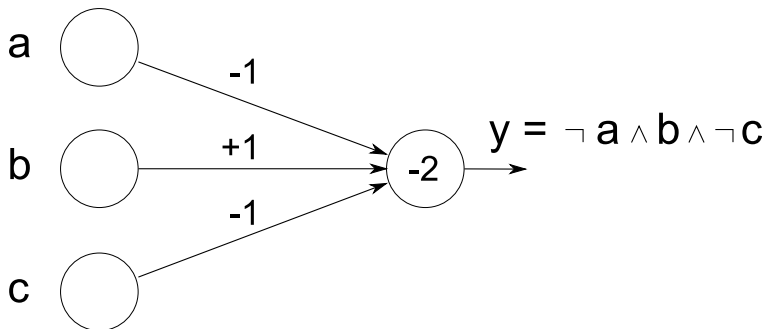
- informace jdou jen zleva doprava

hierarchická síť

- informace jdou jen do *následující* vrstvy

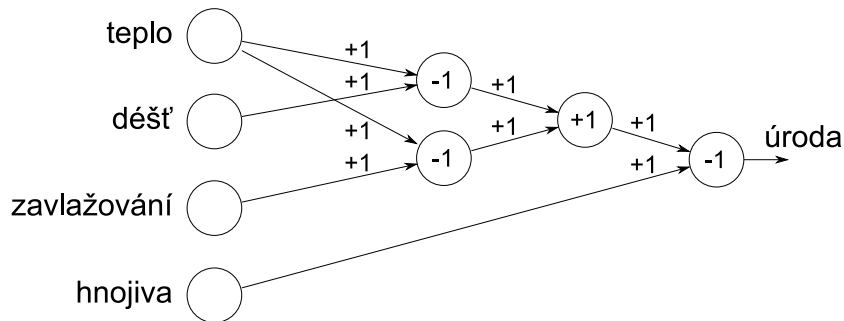


Nastavení vah

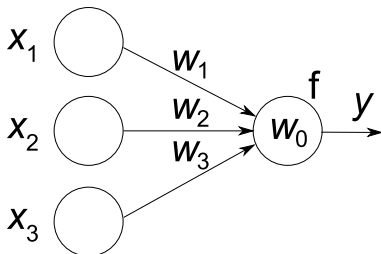


Vytvoření sítě

úroda = ((teplo \wedge déšť) \vee (teplo \wedge zavlažování)) \wedge hnojiva



Majoritní obvod



Majoritní obvod

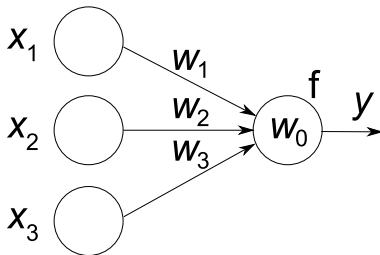
Tohle je opravdu trochu těžší, takže...

- Dokážete realizovat majoritní obvod po svém?
- Kolik má tato neuronová síť vstupních, skrytých a výstupních vrstev?
- Kolik má tato neuronová síť vstupních, skrytých a výstupních neuronů?



Majoritní obvod

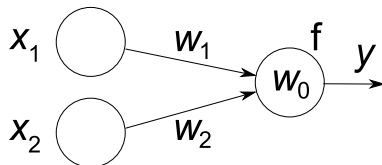
A teď zpět k původní úloze...



XOR

XOR

x_1	x_2	$y = x_1 \oplus x_2$
-1	-1	-1
-1	+1	+1
+1	-1	+1
+1	+1	-1



$$y = \text{sign}(w_0 + w_1x_1 + w_2x_2)$$

XOR

XOR – zjištění vah a prahu

x_1	x_2	$y = x_1 \oplus x_2$
-1	-1	-1
-1	+1	+1
+1	-1	+1
+1	+1	-1

$$\text{sign}(w_0 - w_1 - w_2) = -1$$

$$\text{sign}(w_0 - w_1 + w_2) = +1$$

$$\text{sign}(w_0 + w_1 - w_2) = +1$$

$$\text{sign}(w_0 + w_1 + w_2) = -1$$

$$w_0 - w_1 - w_2 < 0$$

$$w_0 - w_1 + w_2 > 0$$

$$w_0 + w_1 - w_2 > 0$$

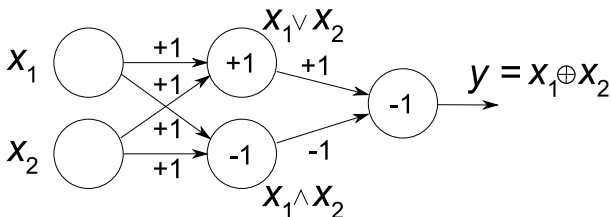
$$w_0 + w_1 + w_2 < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} 1. + 4. \quad 2w_0 < 0 \\ 2. + 3. \quad 2w_0 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{spor}$$



XOR – vícevrstvý perceptron

- XOR tedy není možné realizovat jedním bipolárním neuronem
- přidáme neurony do skryté vrstvy
- $\text{XOR}(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 = (x_1 \vee x_2) \wedge \neg(x_1 \wedge x_2)$



XOR – jiné přístupy

DNF

$$\text{XOR}(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 = (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2)$$

CNF

$$\text{XOR}(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 = (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_2)$$

