

# EKONOMETRIE – 11. přednáška

## Více rovnicové modely

- Více rovnicové modely:
  - modely s nezávislými rovnicemi
  - modely simultánní – soustava vzájemně závislých rovnic
- modely s nezávislými rovnicemi: každou z rovnic zkoumáme odděleně jako jednorovnicový model, aparátu z předchozích přednášek
- nyní: simultánního modelu, strukturní a redukovaný tvar, identifikace a odhad simultánního modelu metodou nepřímých nejmenších čtverců (MNNČ) a metodou dvoustupňových nejmenších čtverců (M2NČ).

### Simultánní model

- vzájemné vazby mezi endogenními proměnnými
- alespoň jedna rovnice obsahuje více než jednu endogenní proměnnou
- celkový počet endogenních proměnných je roven počtu lineárně nezávislých simultánních rovnic
- nesplňuje podmínku nezávislosti všech vysvětlujících proměnných na náhodné složce
- MNČ neposkytuje nestranné ani konzistentní odhady
- používá se strukturní a redukovaný tvar modelu simultánních rovnic

### Strukturní tvar

$$B y_t + \Gamma x_t = u_t, \quad t=1,2,\dots,n, \text{ kde}$$

Podmínky:

1.  $E(u_t) = 0$
2.  $E(u_t u_s) = 0$ ,  $t \neq s$ ,  $t, s = 1, 2, \dots, n$
3.  $u_t \sim N(0, \Sigma)$ ,

### Redukovaný tvar

- za podmínky regularity matice strukturních parametrů B
- je možno přejít ze strukturního tvaru k redukovanému tvaru

$$y_t = -B^{-1} \Gamma x_t + B^{-1} u_t, \quad ,$$

- po substituci

$$y_t = \Pi x_t + v_t \quad ,$$

kde

- $\Pi$  ( $G, K$ ) matice parametrů redukovaného tvaru, přímé multiplikátory,
- $v_t$  ( $G, 1$ ) vektor náhodných složek,

Podmínky:

1.  $E(v_t) = 0$
2.  $E(v_t v_s') = 0$  ,  $t \neq s$  ,  $t, s = 1, 2, \dots, n$
3.  $v_t \sim N(0, \Omega)$ ,

kde  $\Omega$  je ( $G, G$ ) pozitivně definitní matice identicky normálně rozdělených náhodných složek.

- Parametry redukovaného tvaru jsou ve dvou maticích:

$$\Pi = - B^{-1} \Gamma$$

$$\Omega = B^{-1} \Sigma (B^{-1})'$$

- Protože redukovaný tvar obsahuje v roli vysvětlujících proměnných pouze predeterminované proměnné, které jsou nezávislé na náhodných složkách, konzistentní odhady lze získat MNČ

## Identifikace

- redukovaný tvar lze konzistentně odhadnout MNČ
- otázka: lze získat odhady strukturních parametrů z odhadů parametrů redukovaného tvaru?
- v případě existence matice  $B^{-1}$  lze vždy z matic parametrů strukturního tvaru určit matice koeficientů redukovaného tvaru
- zda je však možné jednoznačně vyjádřit z parametrů redukovaného tvaru parametry strukturního tvaru, to závisí na jejich identifikaci
- Neomezený redukovaný tvar:  $y_t = \Pi x_t + v_t$
- Omezený redukovaný tvar:  $y_t = - B^{-1} \Gamma x_t + B^{-1} u_t$

**Přesná identifikace** – všechny parametry modelu lze jednoznačně určit z parametrů neomezeného redukovaného tvaru

**Přeidentifikace** – hodnoty parametrů lze určit víceznačně

**Podidentifikace** – nelze určit všechny koeficienty strukturního tvaru

## Podmínky identifikace

### **Hodnostní podmínka** (nutná a postačující)

- Hodnost matice vytvořené ze strukturních koeficientů endogenních i predeterminovaných proměnných, nevyskytujících se ve zkoumané rovnici, ale obsažených v ostatních rovnicích je rovna  $G - 1$ .

### **Řádová podmínka** (nutná)

- $K - K_1 \geq G_1 - 1$ ,

kde

- $G$  je počet endogenních proměnných v modelu,
- $K$  je počet predeterminovaných proměnných v modelu,
- $G_1$  je počet endogenních proměnných ve zkoumané rovnici,
- $K_1$  je počet predeterminovaných proměnných ve zkoumané rovnici.

## Odhad simultánního modelu

- Pro identifikované rovnice nelze použít MNČ, protože nejsou splněny všechny podmínky pro aplikaci. Proto se používají jiné metody.

## Metody

### **1) Metoda nepřímých nejmenších čtverců (MNNČ)**

- též metoda redukováného tvaru
- používá se pro přesně identifikované rovnice
- neomezený tvar odhadneme MNČ, odhady strukturních parametrů dopočítáme

### **2) Metoda dvoustupňových nejmenších čtverců (M2NČ)**

- použitelná pro přesně identifikované i přeidentifikované rovnice
- jedná se o opakovanou aplikaci MNČ pro dva odhady:
  1. odhad neomezeného redukováného tvaru,
  2. odhad strukturních parametrů.

1) Nahrazení stochastických pozorování vysvětlujících endogenních proměnných odhadované rovnice jejich vyrovnanými nestochastickými hodnotami, které tudíž nejsou zkorelovány s náhodnou složkou – splněna podmínka pro aplikaci MNČ.

2) Konzistentní odhady strukturních parametrů rovnice se provedou pomocí MNČ.

- tvar  $i$ -té identifikované strukturní rovnice  $G$  endogenních a  $K$  predeterminovaných proměnných:  $y_i = Y_i \beta_i + X_i \gamma_i + u_i$ ,

kde

- $y_i$   $n \times 1$  vektor stochastických pozorování vysvětlované proměnné,
  - $Y_i$   $n \times (G_i - 1)$  matice stochastických pozorování  $G_i - 1$  vysvětlujících endogenních proměnných v rovnici,
  - $X_i$   $n \times K_i$  matice fixních pozorování  $K_i$  predeterminovaných vysvětlujících proměnných v  $i$ -té rovnici,
  - $u_i$  vektor náhodných složek  $\beta_i$   $(G_i - 1) \times 1$  vektor strukturních parametrů,
  - $\gamma_i$   $K_i \times 1$  vektor strukturních parametrů predeterminovaných proměnných
- Rovnici můžeme vyjádřit:  $y_i = Z_i \delta_i + u_i$ , kde  $Z_i = (Y_i, X_i)$ ,  $\delta_i = (\beta_i, \gamma_i)$

1) redukováný tvar

$$Y_i = X \Pi_i + V_i$$

$X$   $n \times K$  matice pozorování všech  $K$  predeterminovaných proměnných,

$\Pi_i$   $K \times (G_i - 1)$  matice parametrů neomezeného redukováného tvaru,

$V_i$   $n \times (G_i - 1)$  matice náhodných složek neomezeného redukováného tvaru,

Potom konzistentní odhad získaný MNČ

$$\hat{Y}_i = X \hat{\Pi}_i, \hat{\Pi}_i = (X'X)^{-1} X'Y_i, Y_i = \hat{Y}_i + \hat{V}_i$$

2) Substitucí  $\hat{Y}_i$  za  $Y_i$  do výchozího tvaru

$$y_i = (\hat{Y}_i + V_i) \beta_i + X_i \gamma_i + u_i = \hat{Y}_i \beta_i + X_i \gamma_i + u_i^*$$

kde  $u_i^* = u_i + \hat{V}_i \beta_i$

$$y_i = \hat{Z}_i \delta_i + u_i^* \quad , \hat{Z}_i = [\hat{Y}_i, Y_i]$$

Všechny vysvětlující proměnné jsou nezávislé na náhodné složce , proto použijeme MNČ.

$$d_i = \begin{bmatrix} b_i \\ c_i \end{bmatrix} = (\hat{Z}_i' \hat{Z}_i)^{-1} \hat{Z}_i' y_i$$

Odhadovaná funkce MZNČ poskytuje konzistentní odhady strukturních parametrů a asymptoticky vydatné.