Diskrétní matematika

Barvení grafů

Základní pojmy

Obarvení grafu G = ohodnocení vrcholů hodnotami z množiny *B* (barvy) takové, že žádné dva sousední vrcholy nemají stejnou barvu

př. $B = \{1, 2, 3, 4\}$

Chromatické číslo grafu G – χ(G) = nejmenší počet barev, který je potřebný k obarvení grafu G

Definice: Graf G nazýváme ***r*–barevný** $\Leftrightarrow \chi(G) = r$.

Věta: $\chi(G) \leq \triangle_G + 1, \quad \triangle_G = \max_{v \in V} \deg_G(v)$

Sekvenční barvení grafu

1. Zvolíme neobarvený vrchol v.
2. Najdeme minimální barvu $b \in \mathbb{N}$ ($B = \mathbb{N}$) tak, aby neexistoval vrchol spojený s v obarvený barvou b.
3. Vrchol v obarvíme barvou b.
4. Pokud neexistuje neobarvený vrchol, jdi na 1).

ad 1) Volba vrcholu v

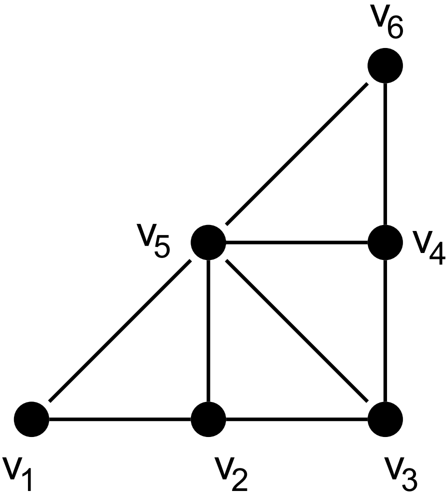
a) Vrcholy náhodně seřadíme do posloupnosti a volíme první neobarvený vrchol.

b) Vrcholy uspořádáme sestupně do posloupnosti podle $\mathrm{deg}_{\mathrm{G}}(v)$ a volíme první neobarvený vrchol.

c) $\forall v$ určíme počet barev $B(v)$ použitých pro obarvení sousedů. Volíme ten vrchol, pro který je $B(v)$ maximální. Pokud jich existuje více, volíme ten z nich, který má nejvíce neobarvených sousedů.

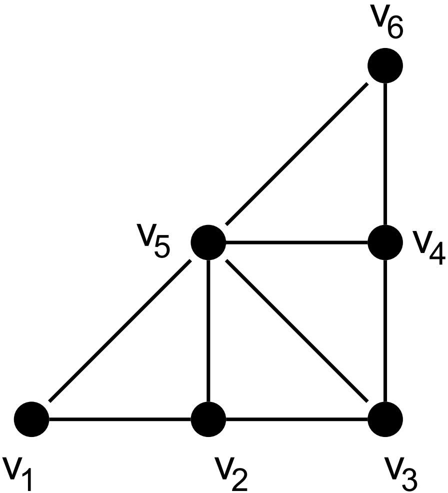
Sekvenční barvení grafu

Volba 1b)



Sekvenční barvení grafu

Volba 1c)



Barvení grafu pomocí nezávislých množin

Nezávislá množina vrcholů je isomorfní s D_n.

Je-li dáno obarvení grafu G $\Rightarrow$ množina vrcholů obarvených jednou barvou je nezávislá.

1. b = b+1
2. Zvolíme v G největší nezávislou množinu N.
3. Všechny vrcholy v N obarvíme barvou b, a potom je spolu se všemi incidentními hranami odstraníme z G.
4. existuje-li neobarvený vrchol, pak jdeme na 1).

Barvení grafu pomocí nezávislých množin

Hledání největší nezávislé množiny

$N \ldots$ nezávislá množina, $P \ldots$ pomocná množina

1. $N = \emptyset$, $P = V$
2. Zvolíme $v \in P$ a $N = N \cup \{v\}$, $P = P \setminus \{v\} \setminus V_{\mathrm{G}}(v)$, $V_{\mathrm{G}}(v)$ – vrcholy sousedící s v.
3. Opakujeme dokud nebude $P = \emptyset$.

ad 2) Volba vrcholu v

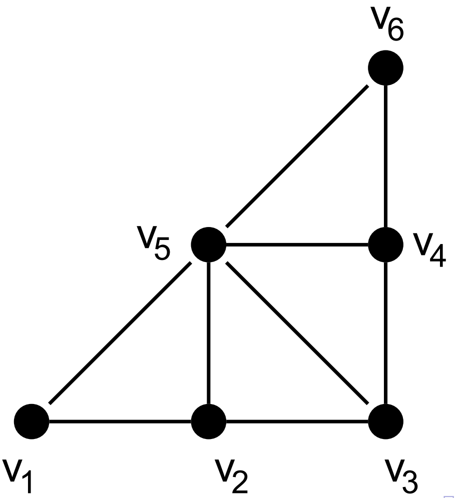
a) Náhodně.

b) Vrcholy uspořádáme vzestupně do posloupnosti podle $\deg_{\mathrm{G}}(v)$ a v tomto pořadí je pak volíme za v.

c) Volíme ten vrchol v, pro který je aktuálně $\deg_{\mathrm{G}}(v) = \min$.

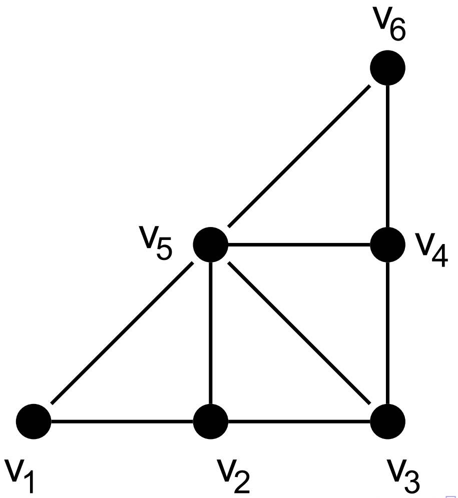
Barvení grafu pomocí nezávislých množin

Volba 2b)



Barvení grafu pomocí nezávislých množin

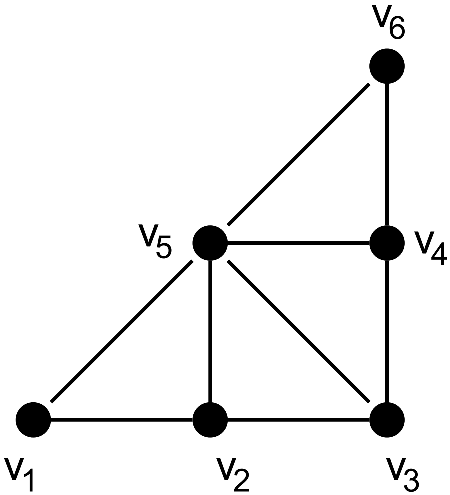
Volba 2c)



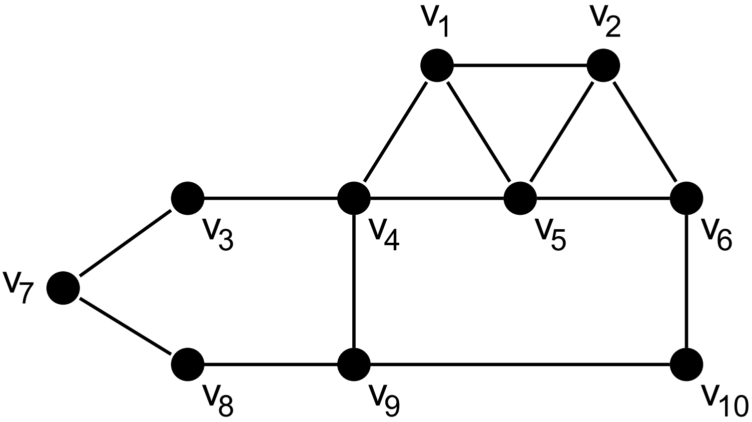
Barvení grafu slepováním vrcholů

1. Určíme dva vrcholy v_1, v_2 nespojené hranou.
2. Vrcholy v_1, v_2 nahradíme jediným vrcholem v, který spojíme se všemi vrcholy G, se kterými byl spojen alespoň jeden z vrcholů v_1, v_2.
3. Opakujeme 1) a 2), dokud nevznikne úplný graf.
4. Vrcholy konečného úplného grafu obarvíme různými barvami. Vrcholy původního grafu dostanou barvy podle barev vrcholů, do kterých postupným spojováním přešly.

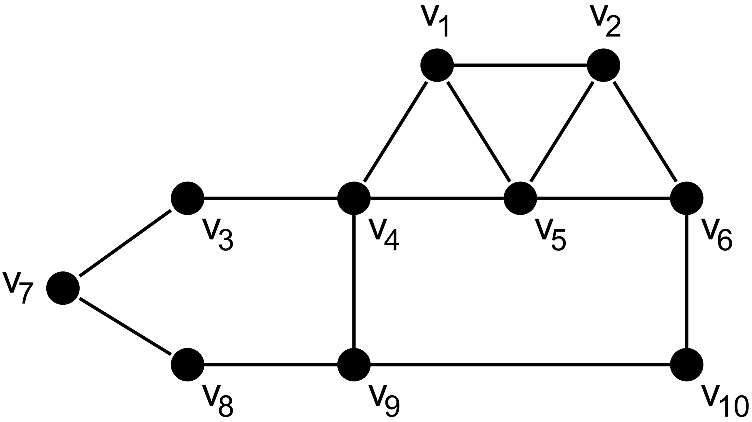
Barvení grafu slepováním vrcholů



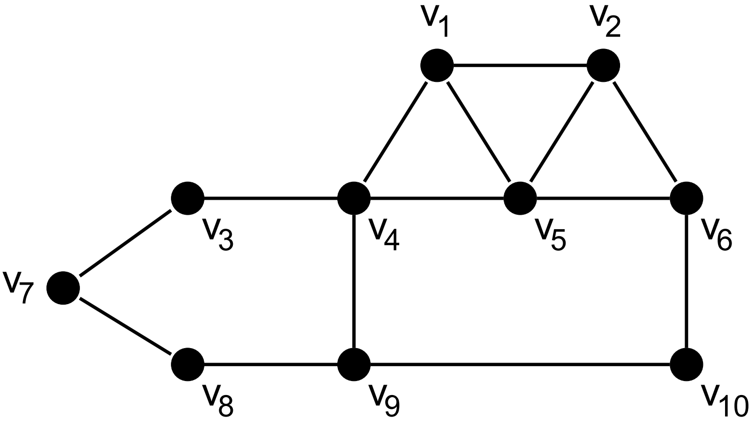
Sekvenční barvení grafu



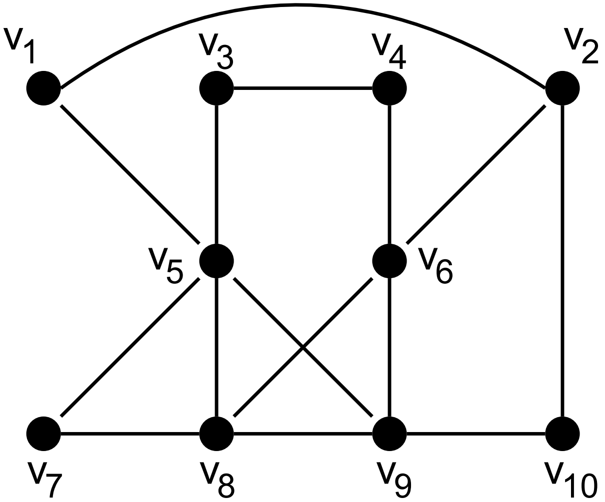
Barvení grafu pomocí nezávislých množin



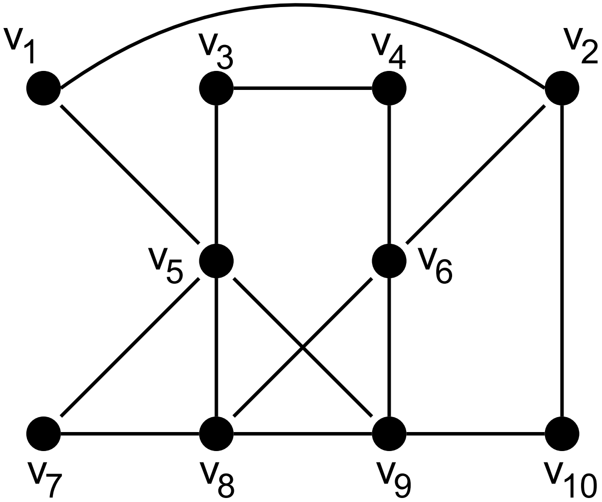
Barvení grafu slepováním vrcholů



Sekvenční barvení grafu



Barvení grafu pomocí nezávislých množin



Barvení grafu slepováním vrcholů