Diskrétní matematika

Základní typy grafů

Literatura

- J. Matoušek, J. Nešetřil: Kapitoly z diskrétní matematiky
- J. Deml: Grafy a jejich aplikace

Témata

1. Základní typy grafů
2. Vlastnosti vrcholů a hran
3. Jednotažky
4. 2-souvislost
5. Kostra grafu
6. Nejkratší cesta
7. Barvení grafů
8. Rovinné grafy

Graf

Graf G = (V,E)

V . . . množina vrcholů (uzlů) – konečná, neprázdná
E . . . množina hran – množina dvouprvkových podmnožin množiny V

$\binom{V}{2}$ . . . množina všech dvouprvkových podmnožin množiny V

$E \subseteq \binom{V}{2}$ $\qquad \binom{|V|}{2} = \left|\binom{V}{2}\right|$ . . . počet podmnožin

$n = |V|$ . . . počet vrcholů
$m = |E|$ . . . počet hran $\qquad 0 \leq |E| \leq \binom{|V|}{2}$

Základní typy grafů

Diskrétní graf D_n

$|\mathrm{E}| = 0$

$\forall v \in \mathrm{V} : \deg_{D_n} v = 0$ – stupeň vrcholu

$\chi(D_n) = 1$ – chromatické číslo grafu

Úplný graf K_n

$\mathrm{E} = \binom{\mathrm{V}}{2}$

$\forall v \in \mathrm{V} : \deg_{K_n} v = |\mathrm{V}| - 1 = n - 1$

$\chi(K_n) = |\mathrm{V}| = n$

Cesta P_m

$e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$

$\mathrm{E} = \{\{v_{i-1}, v_i\} | \ i = 1, \ldots, m\}$

Základní typy grafů

Kružnice C_n

$n \geq 3$

$\mathrm{E} = \{\{v_{i-1}, v_i\} \mid i = 1, \ldots, n\},\ v_0 = v_n$

Úplný bipartitní graf K_{n_1, n_2}

$n_1, n_2 \geq 1$

$\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \cup \mathrm{V}_2, \quad \mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2 = \emptyset, \quad |\mathrm{V}_1| = n_1,\ |\mathrm{V}_2| = n_2$

$\mathrm{E} = \{\{v, u\} \mid v \in \mathrm{V}_1,\ u \in \mathrm{V}_2\}$

Bipartitní graf

$\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \cup \mathrm{V}_2, \quad \mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2 = \emptyset$

$\mathrm{E} \subseteq \{\{v, u\} \mid v \in \mathrm{V}_1,\ u \in \mathrm{V}_2\}$

Základní pojmy

Rovnost grafů $G_1 = G_2$

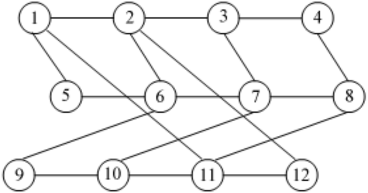
$V(G_1) = V(G_2)$

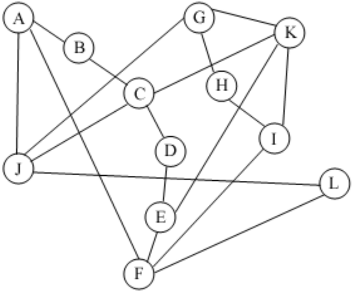
$E(G_1) = E(G_2)$

Isomorfismus grafů $G_1 \cong G_2$

$G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ jsou isomorfní $\Leftrightarrow \exists$ bijekce $f : V_1 \to V_2$ tak, že $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E_2$

Jsou grafy isomorfní?





1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

Základní pojmy

Rovnost grafů $G_1 = G_2$

$V(G_1) = V(G_2)$
$E(G_1) = E(G_2)$

Isomorfismus grafů $G_1 \cong G_2$

$G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ jsou isomorfní $\Leftrightarrow \exists$ bijekce $f : V_1 \to V_2$ tak, že $\{x, y\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E_2$

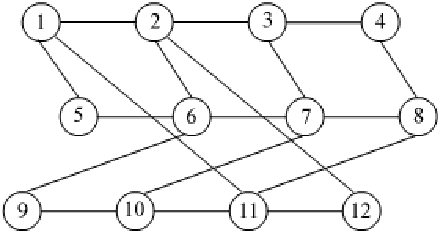
Automorfismus

$\exists$ bijekce $f : V \to V : \{x, y\} \in E \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E$

Asymetrický graf

má jen jeden automorfismus a to identický

Jde o asymetrický graf?



Základní pojmy

Podgraf G_P

$$\mathrm{V}(\mathrm{G}_P) \subseteq \mathrm{V}(\mathrm{G})$$
$$\mathrm{E}(\mathrm{G}_P) \subseteq \mathrm{E}(\mathrm{G}) \cap \binom{\mathrm{V}(\mathrm{G}_P)}{2}$$

Indukovaný podgraf G_I

$$\mathrm{V}(\mathrm{G}_I) \subseteq \mathrm{V}(\mathrm{G})$$
$$\mathrm{E}(\mathrm{G}_I) = \mathrm{E}(\mathrm{G}) \cap \binom{\mathrm{V}(\mathrm{G}_p)}{2}$$

Základní podgrafy, souvislost

Cesta v grafu = podgraf, který je isomorfní nějaké cestě P_m

Kružnice v grafu = podgraf, který je isomorfní nějaké kružnici C_n

Souvislost – Řekneme, že G je souvislý $\Leftrightarrow$ $\forall u, v \in V$ existuje cesta z u do v

Komponenta – Komponenta grafu je tvořena vrcholy, které jsou navzájem všechny spojeny.

G je souvislý $\Leftrightarrow$ má jedinou komponentu

Reprezentace grafů

Adjacenční matice (matice sousednosti) $\mathrm{A_G}$

$$\mathrm{A_G} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \quad n = |\mathrm{V}|$$

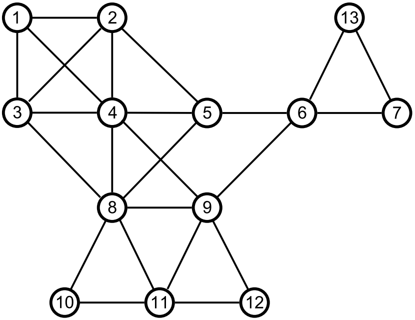
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in \mathrm{E}; \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

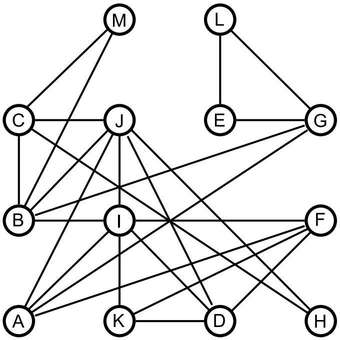
Incidenční matice $\mathrm{B_G}$

$$\mathrm{B_G} = (b_{ij})_{i=1..n, j=1..m} \quad n = |\mathrm{V}|, \; m = |\mathrm{E}|$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \in e_j; \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

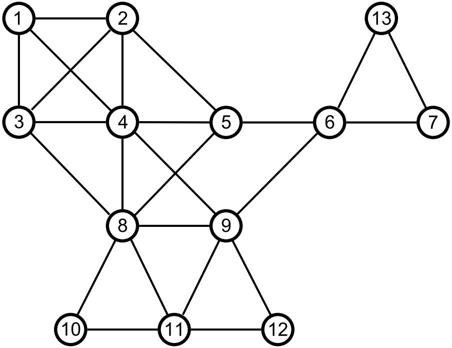
Jsou grafy isomorfní?



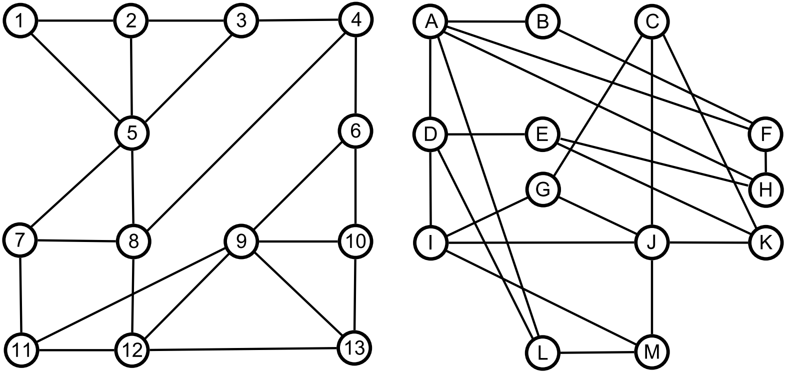


1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	

Jde o asymetrický graf?



Jsou grafy isomorfní?



1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	

Jde o asymetrický graf?