

# Diskrétní matematika

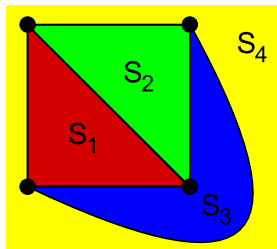
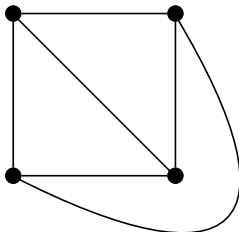
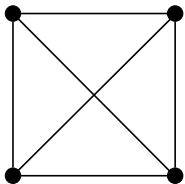
## Planární (rovinné) grafy



# Rovinný graf

**Nakreslit graf** = vrcholy promítnout do konkrétních bodů kreslicí plochy a hrany realizovat jako hladké čáry na kreslicí ploše

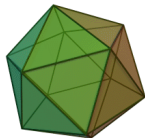
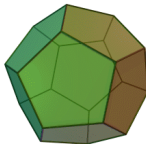
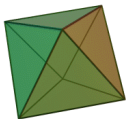
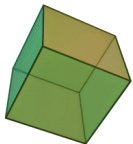
**Planární (rovinný) graf** = graf, který lze nakreslit do  $\mathbb{R}^2$  bez křížení hran



# Platónská tělesa

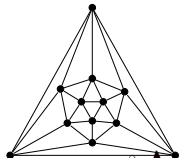
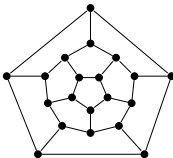
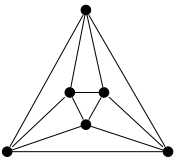
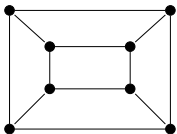
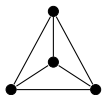
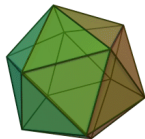
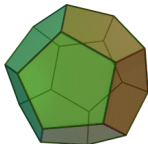
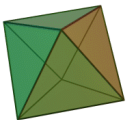
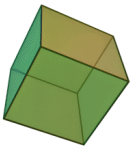
**Platónská tělesa** – pravidelné mnohostěny = 3D konvexní těleso ohraničené konečným počtem stěn – shodných pravidelných mnohoúhelníků – jejichž se v každém vrcholu stýká stejný počet

Pět typů: čtyřstěn, šestistěn (krychle), osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn



# Platónská tělesa

Všechna platónská tělesa lze nakreslit jako rovinný graf.



# Základní větičky

- Věta:** Pokud je  $G$  rovinný graf, u kterého mají všechny vrcholy stejný stupeň  $d$  ( $d \geq 3$ ) a každá stěna má  $k$  ( $k \geq 3$ ) vrcholů  $\Rightarrow G$  je isomorfní jednomu z 5 rovinných grafů platónských těles.
- Věta:** Každý konvexní mnohostěn můžeme nakreslit jako rovinný graf.
- Věta:** Graf lze nakreslit bez křížení hran na povrch koule  $\Leftrightarrow$  je rovinný.



# Důležité vlastnosti

**Eulerův vzorec:** Mějme souvislý rovinný graf s  $|E|$  hranami a  $|V|$  vrcholy nakreslený na rovinu tak, že má  $s$  stěn. Potom

$$|V| - |E| + s = 2.$$

**Věta:** Pro každý rovinný graf platí:

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

**Věta:** Pro každý rovinný graf bez trojúhelníků platí:

$$|E| \leq 2|V| - 4.$$

**Věta:** Každý rovinný graf obsahuje (alespoň jeden) vrchol stupně nejvýše pět.



# Kuratowského věta

**Definice:**  $G_1$  je homeomorfní s  $G_2$ , pokud lze  $G_2$  získat z  $G_1$  operacemi

- dělení hrany
- odstranění vrcholu stupně 2

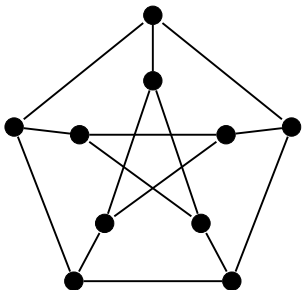
Jsou-li grafy homeomorfní, pak jsou oba rovinné nebo oba nerovinné.

**Kuratowského věta:** graf je rovinný  $\Leftrightarrow$  neobsahuje podgraf homeomorfní s  $K_5$  nebo  $K_{3,3}$



# Kuratowského věta

Je Petersenův graf rovinný?





# Barevnost rovinného grafu

**Věta:** Necht'  $G$  je rovinný graf. Potom  $\chi(G) \leq 4$

**Důkaz:** 1976, Appel a Haken



# Duální graf

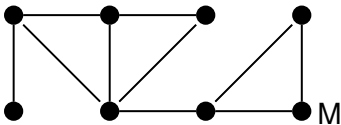
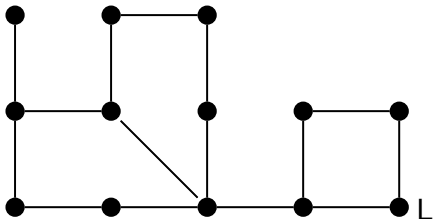
**Duální graf  $G^D$**  k souvislému rovinnému grafu  $G$  = každé stěně v  $G$  odpovídá vrchol v  $G^D$ , každé hraně  $e$  spojující 2 stěny odpovídá hrana  $e^D$  spojující ty vrcholy grafu  $G^D$ , které těmto stěnám odpovídají

- $G^D$  je souvislý a rovinný
- $(G^D)^D = G$
- vrcholy v  $G$  jsou stěnami v  $G^D$
- smyčce v  $G$  odpovídá most v  $G^D$  a naopak



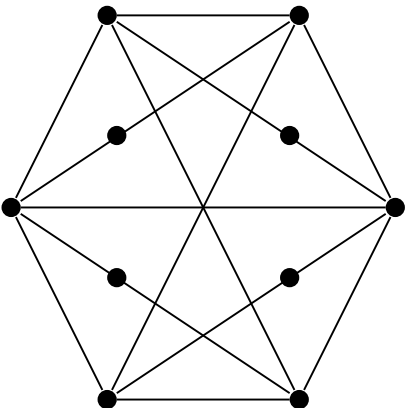
# Homeomorfismus

Zjistěte, zda jsou grafy L a M homeomorfní. Označte odpovídající si vrcholy stejnými číslicemi tak, abyste své tvrzení podpořili.



# Planární graf

Dokažte, že graf  $K$  není planární.

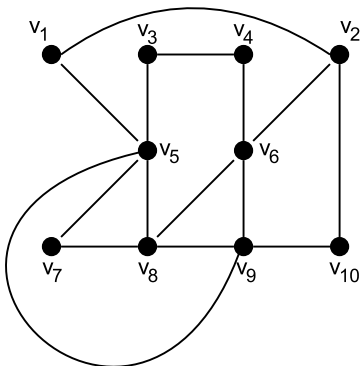


$K$



# Duální graf

Nalezněte duální graf ke grafu K.



K



# Duální graf, počet stěn

Nalezněte duální graf ke grafu K. Kolik stěn planární graf K má?

