

Diskrétní matematika

Hledání nejkratší cesty



Úvod

- jedna ze základních algoritmických úloh
- úkolem je najít nejkratší cestu mezi dvěma vrcholy
- algoritmy zpravidla počítají mnohem více, než je nutné



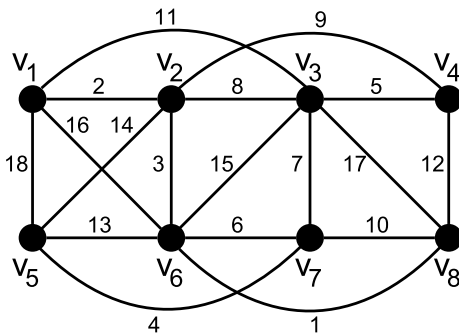
Dijkstrův algoritmus

Dijkstrův algoritmus

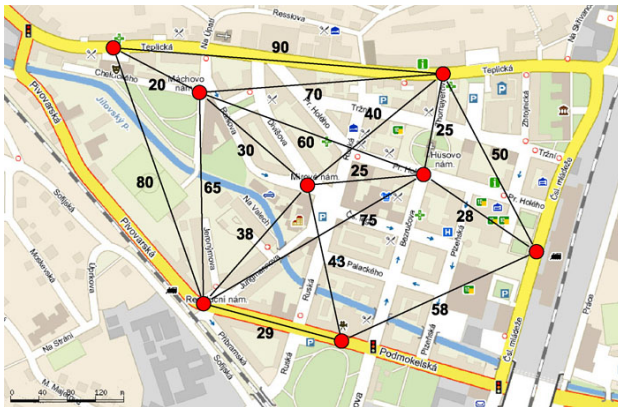
- hledá cestu do *všech* vrcholů
- ① na počátku uložíme do s hodnotu 0 a jinak ∞
 $d(s) = 0, d(v) = \infty \forall v \neq s, A = V$
 A – množina aktivních vrcholů
- ② pokud $\forall v \in A$ je $d(v) = \infty \Rightarrow$ konec
- ③ N – množina vrcholů z A , pro které $d(u) = \min$
 $A = A \setminus N$
- ④ $\forall e = \{u, v\}, u \in N, v \in A$ upravíme hodnotu $d(v)$
 $d(v) = \min\{d(v), d(u) + w(e)\}$ a jdeme na krok 2



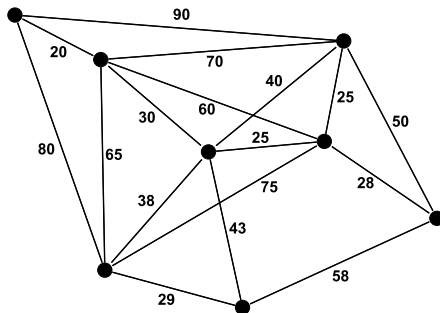
Nejkratší cesta z vrcholu v_1 do všech ostatních vrcholů



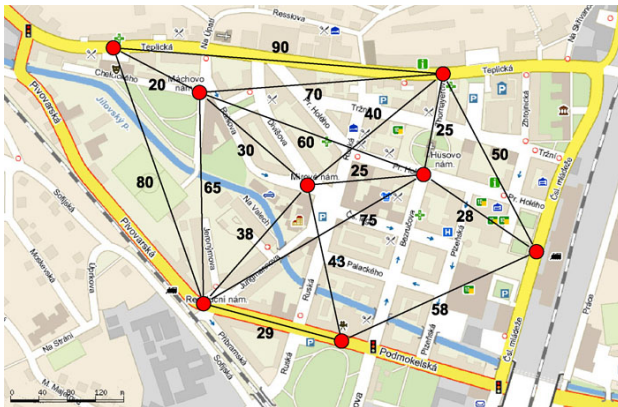
Nejkratší cesta od divadla na nádraží



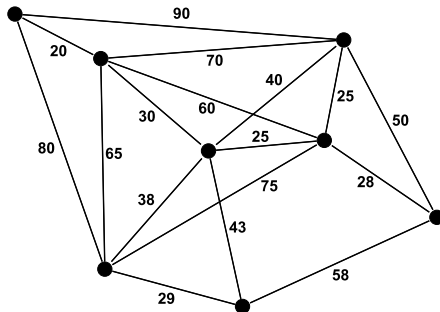
Nejkratší cesta od divadla na nádraží



Nejkratší cesta od divadla k lékárně u Slunce



Nejkratší cesta od divadla k lékárně u Slunce



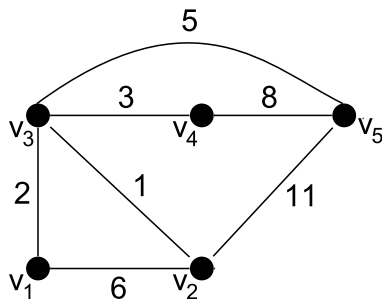
Floydův algoritmus

Floydův algoritmus

- hledá cestu *mezi každými dvěma vrcholy*
- 1 vycházíme z matice délek hran **D**
- 2 postupně počítáme posloupnost matic $\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n$, kde $n = |V|$
zde $u_k(i, j)$ = délka nejkratší cesty z v_i do v_j , která vede pouze přes vrcholy v_1, v_2, \dots, v_k
- 3 známe-li \mathbf{U}_{k-1} , vypočítáme \mathbf{U}_k takto:
$$u_k(i, j) = \min\{u_{k-1}(i, j), u_{k-1}(i, k) + u_{k-1}(k, j)\}$$



Najděte nejkratší cestu mezi všemi vrcholy



Najděte nejkratší cestu mezi všemi vrcholy

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 & \infty & \infty \\ 6 & 0 & 1 & \infty & 11 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 5 \\ \infty & \infty & 3 & 0 & 8 \\ \infty & 11 & 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

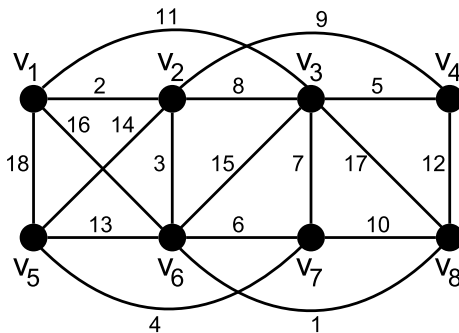


Najděte nejkratší cestu mezi všemi vrcholy

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 & \infty & \infty \\ 6 & 0 & 1 & \infty & 11 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 5 \\ \infty & \infty & 3 & 0 & 8 \\ \infty & 11 & 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$



Najděte nejkratší cestu mezi všemi vrcholy



Najděte nejkratší cestu mezi všemi vrcholy

$$D = U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 11 & \infty & 18 & 16 & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 8 & 9 & 14 & 3 & \infty & \infty \\ 11 & 8 & 0 & 5 & \infty & 15 & 7 & 17 \\ \infty & 9 & 5 & 0 & \infty & \infty & \infty & 12 \\ 18 & 14 & \infty & \infty & 0 & 13 & 4 & \infty \\ 16 & 3 & 15 & \infty & 13 & 0 & 6 & 1 \\ \infty & \infty & 7 & \infty & 4 & 6 & 0 & 10 \\ \infty & \infty & 17 & 12 & \infty & 1 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$



Najděte nejkratší cestu mezi všemi vrcholy

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix}
 0 & 2 & 11 & \infty & 18 & 16 & \infty & \infty \\
 2 & 0 & 8 & 9 & 14 & 3 & \infty & \infty \\
 11 & 8 & 0 & 5 & \infty & 15 & 7 & 17 \\
 \infty & 9 & 5 & 0 & \infty & \infty & \infty & 12 \\
 18 & 14 & \infty & \infty & 0 & 13 & 4 & \infty \\
 16 & 3 & 15 & \infty & 13 & 0 & 6 & 1 \\
 \infty & \infty & 7 & \infty & 4 & 6 & 0 & 10 \\
 \infty & \infty & 17 & 12 & \infty & 1 & 10 & 0
 \end{pmatrix}$$



Nakreslete graf a ...

Nakreslete graf z matice ohodnocení hran **D**.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 20 & \infty & 6 & 17 & 9 \\ 3 & 0 & 7 & 10 & \infty & 2 & 19 \\ 20 & 7 & 0 & 15 & 30 & 12 & 3 \\ \infty & 10 & 15 & 0 & \infty & 15 & 4 \\ 6 & \infty & 30 & \infty & 0 & 4 & \infty \\ 17 & 2 & 12 & 15 & 4 & 0 & 1 \\ 9 & 19 & 3 & 4 & \infty & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



... najděte nejkratší cestu mezi všemi vrcholy

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 20 & \infty & 6 & 17 & 9 \\ 3 & 0 & 7 & 10 & \infty & 2 & 19 \\ 20 & 7 & 0 & 15 & 30 & 12 & 3 \\ \infty & 10 & 15 & 0 & \infty & 15 & 4 \\ 6 & \infty & 30 & \infty & 0 & 4 & \infty \\ 17 & 2 & 12 & 15 & 4 & 0 & 1 \\ 9 & 19 & 3 & 4 & \infty & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



... najděte nejkratší cestu mezi všemi vrcholy

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix}
 0 & 3 & 20 & \infty & 6 & 17 & 9 \\
 3 & 0 & 7 & 10 & \infty & 2 & 19 \\
 20 & 7 & 0 & 15 & 30 & 12 & 3 \\
 \infty & 10 & 15 & 0 & \infty & 15 & 4 \\
 6 & \infty & 30 & \infty & 0 & 4 & \infty \\
 17 & 2 & 12 & 15 & 4 & 0 & 1 \\
 9 & 19 & 3 & 4 & \infty & 1 & 0
 \end{pmatrix}$$



Vyhledání nejkratší cesty

Vyhledání nejkratší cesty ze čtvrtého do prvního vrcholu.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	
v_1	0	3	20	∞	6	17	9	10 ← začneme zde
v_2	3	0	7	10	∞	2	19	7
v_3	20	7	0	15	30	12	3	7
v_4	∞	10	15	0	∞	15	4	0
v_5	6	∞	30	∞	0	4	∞	9
v_6	17	2	12	15	4	0	1	5
v_7	9	19	3	4	∞	1	0	4

D **$U_{i,4}$**



Vyhledání nejkratší cesty

Vyhledání nejkratší cesty ze čtvrtého do prvního vrcholu.

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	
V_1	0	3	20	∞	6	17	9	10
V_2	3	0	7	10	∞	2	19	7
V_3	20	7	0	15	30	12	3	7
V_4	∞	10	15	0	∞	15	4	0
V_5	6	∞	30	∞	0	4	∞	9
V_6	17	2	12	15	4	0	1	5
V_7	9	19	3	4	∞	1	0	4

$V_1 \leftarrow V_2$



Vyhledání nejkratší cesty

Vyhledání nejkratší cesty ze čtvrtého do prvního vrcholu.

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	
V_1	0	3	20	∞	6	17	9	10
V_2	3	0	7	10	∞	2	19	7
V_3	20	7	0	15	30	12	3	7
V_4	∞	10	15	0	∞	15	4	0
V_5	6	∞	30	∞	0	4	∞	9
V_6	17	2	12	15	4	0	1	5
V_7	9	19	3	4	∞	1	0	4

$V_1 \leftarrow V_2 \leftarrow V_6$



Vyhledání nejkratší cesty

Vyhledání nejkratší cesty ze čtvrtého do prvního vrcholu.

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	
V_1	0	3	20	∞	6	17	9	10
V_2	3	0	7	10	∞	2	19	7
V_3	20	7	0	15	30	12	3	7
V_4	∞	10	15	0	∞	15	4	0
V_5	6	∞	30	∞	0	4	∞	9
V_6	17	2	12	15	4	0	1	5
V_7	9	19	3	4	∞	1	0	4

$V_1 \leftarrow V_2 \leftarrow V_6 \leftarrow V_7$



Vyhledání nejkratší cesty

Vyhledání nejkratší cesty ze čtvrtého do prvního vrcholu.

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	
V_1	0	3	20	∞	6	17	9	10
V_2	3	0	7	10	∞	2	19	7
V_3	20	7	0	15	30	12	3	7
V_4	∞	10	15	0	∞	15	4	0
V_5	6	∞	30	∞	0	4	∞	9
V_6	17	2	12	15	4	0	1	5
V_7	9	19	3	4	∞	1	0	4

$V_1 \leftarrow V_2 \leftarrow V_6 \leftarrow V_7 \leftarrow V_4$



Vyhledání nejkratší cesty

Vyhledání nejkratší cesty ze čtvrtého do prvního vrcholu.

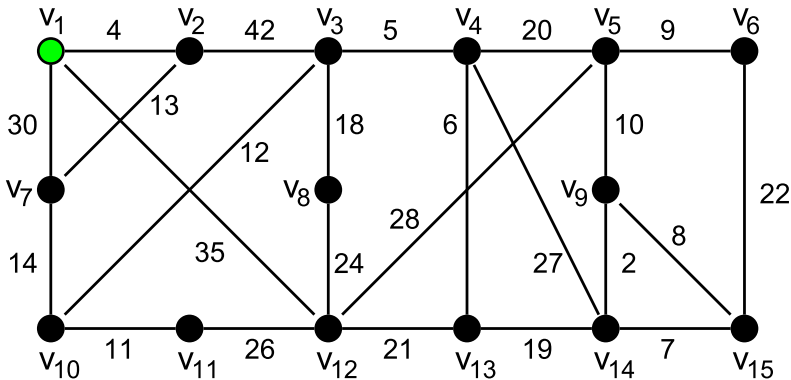
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	
V_1	0	3	20	∞	6	17	9	10
V_2	3	0	7	10	∞	2	19	7
V_3	20	7	0	15	30	12	3	7
V_4	∞	10	15	0	∞	15	4	0
V_5	6	∞	30	∞	0	4	∞	9
V_6	17	2	12	15	4	0	1	5
V_7	9	19	3	4	∞	1	0	4

$V_1 \leftarrow V_2 \leftarrow V_6 \leftarrow V_7 \leftarrow V_4$



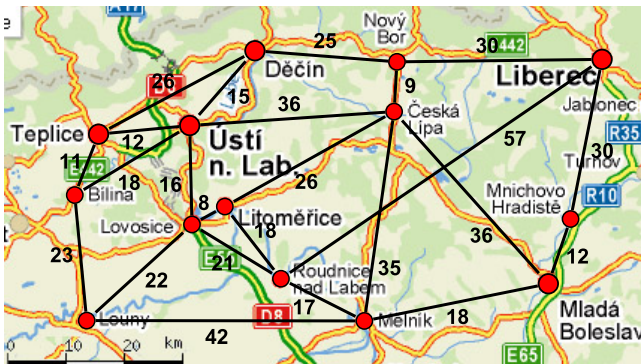
Nejkratší cesta z vrcholu v_1 do ostatních vrcholů

Dijkstrův algoritmus



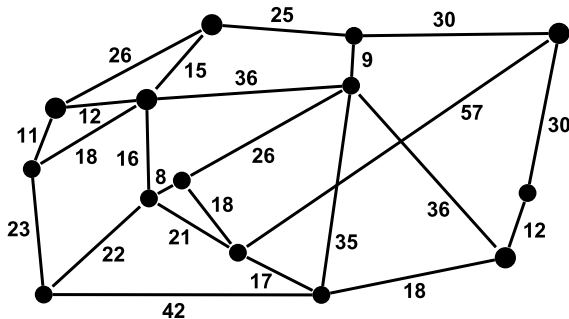
Nejkratší cesta z Loun do Liberce

Dijkstrův algoritmus



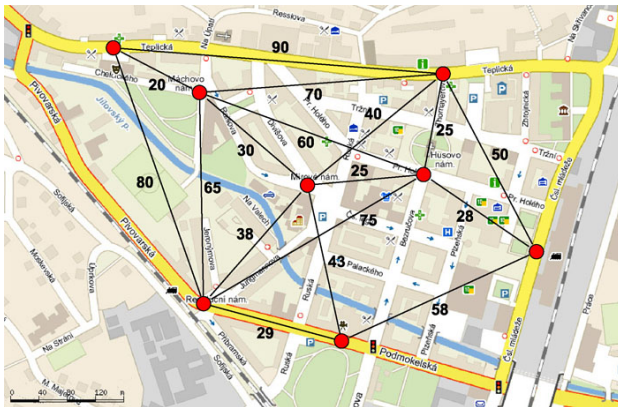
Nejkratší cesta z Loun do Liberce

Dijkstrův algoritmus



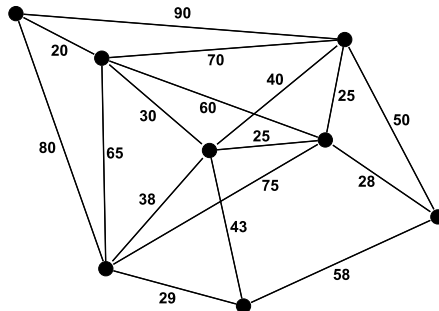
Nejkratší cesta od divadla na nádraží

Floydův algoritmus



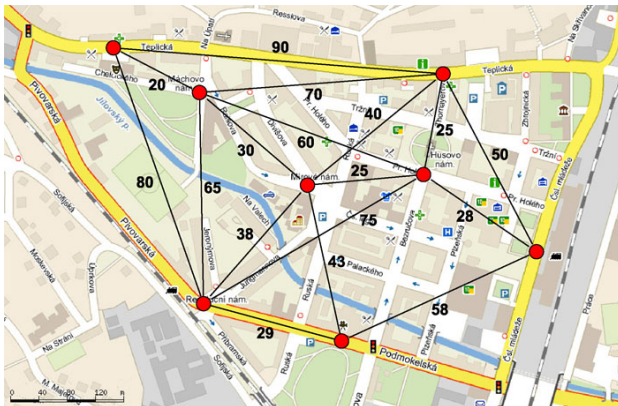
Nejkratší cesta od divadla na nádraží

Floydův algoritmus



Nejkratší cesta od divadla k lékárně U Slunce

Floydův algoritmus



Nejkratší cesta od divadla k lékárně U Slunce

Floydův algoritmus

