Diskrétní matematika

Vlastnosti vrcholů a hran

Stupeň vrcholu, skóre grafu

Stupeň vrcholu = počet hran obsahujících vrchol v

$$\mathrm{deg}_G(v) = |\{e \in E | v \in e\}|$$

Skóre grafu = posloupnost stupňů grafu (nerostoucí)

$$\mathrm{score}(G)$$

Věta: Jsou-li 2 grafy isomorfní, mají stejné skóre.

Věta: Počet vrcholů s lichým stupněm musí být sudý.

Věta: $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ je skóre grafu $(d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n) \Leftrightarrow$ $(d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$ je skóre grafu

Vzdálenost vrcholů, excentricita

Vzdálenost vrcholů

$$\mathrm{d}(u, v) = \min\{m | u, v \in \mathrm{P}_m\}$$

Excentricita vrcholu

$$\mathrm{exc}_{\mathrm{G}}(v) = \max\{\mathrm{d}(v, x) | x \in V\}$$

Průměr grafu

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\mathrm{G}) &= \max\{\mathrm{d}(u, v) | u, v \in V\} \\ \mathrm{d}(\mathrm{G}) &= \max_{v \in V} \mathrm{exc}_{\mathrm{G}}(v) \end{aligned}$$

Poloměr grafu

$$\mathrm{r}(\mathrm{G}) = \min_{v \in V} \mathrm{exc}_{\mathrm{G}}(v)$$

Věta: $\mathrm{r}(\mathrm{G}) \leq \mathrm{d}(\mathrm{G}) \leq 2\mathrm{r}(\mathrm{G})$

Střed, hranice

Střed = vrchol(y) s minimální výstředností

$$\mathrm{S}(\mathrm{G}) = \{v \in V | \mathrm{exc}_{\mathrm{G}}(v) = \mathrm{r}(\mathrm{G})\}$$

Hranice = vrchol(y) s maximální výstředností

$$\mathrm{H}(\mathrm{G}) = \{v \in V | \mathrm{exc}_{\mathrm{G}}(v) = \mathrm{d}(\mathrm{G})\}$$

Počet komponent $\mathrm{comp}(\mathrm{G})$ = počet souvislých podgrafů, jejichž sjednocením vznikne graf G (množiny vrcholů komponent jsou navzájem disjunktní)

Nezávislost, klikovost a doplněk grafu

Nezávislost grafu $\alpha(\mathrm{G})$ = maximálně možný počet vrcholů indukovaného podgrafu, který je isomorfní s D_n

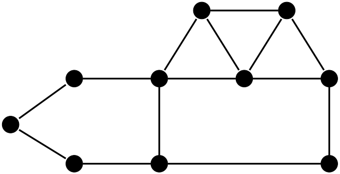
Klikovost grafu $\omega(\mathrm{G})$ = maximálně možný počet vrcholů indukovaného podgrafu, který je isomorfní s K_n

Doplněk grafu $\tilde{\mathrm{G}}$

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathrm{G}}) &= V(\mathrm{G}) \\ E(\tilde{\mathrm{G}}) &= \binom{V(\mathrm{G})}{2} \setminus E(\mathrm{G}) \end{aligned}$$

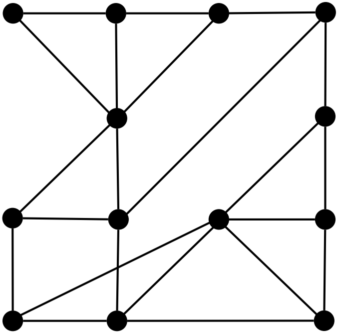
$$\begin{aligned} \alpha(\tilde{\mathrm{G}}) &= \omega(\mathrm{G}) \\ \omega(\tilde{\mathrm{G}}) &= \alpha(\mathrm{G}) \end{aligned}$$

Vlastnosti grafu G



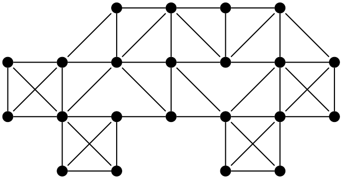
$\|V(G)\|$	
$\|E(G)\|$	
comp(G)	
score(G)	
exc(G)	
r(G)	
d(G)	
$\|S(G)\|$	
$\|H(G)\|$	
α(G)	
ω(G)	
χ(G)	

Vlastnosti grafu



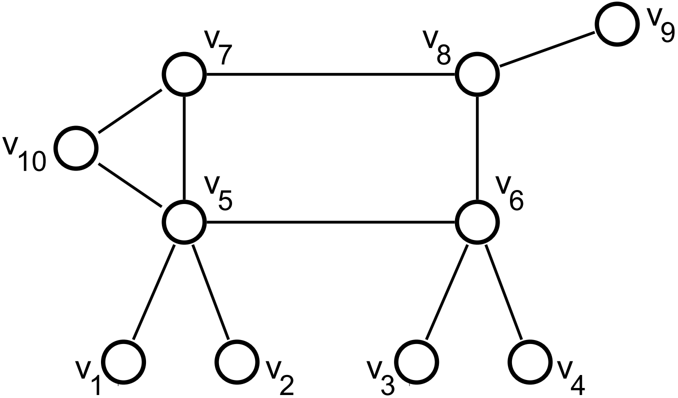
$\|V(G)\|$	
$\|E(G)\|$	
comp(G)	
score(G)	
exc(G)	
r(G)	
d(G)	
$\|S(G)\|$	
$\|H(G)\|$	
α(G)	
ω(G)	
χ(G)	

Vlastnosti grafu



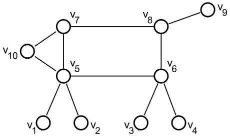
$\lvert V(G)\rvert$	
$\lvert E(G)\rvert$	
comp(G)	
score(G)	
exc(G)	
r(G)	
d(G)	
$\lvert S(G)\rvert$	
$\lvert H(G)\rvert$	
α(G)	
ω(G)	
χ(G)	

Graf



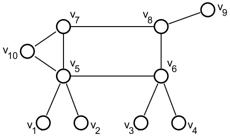
Skóre grafu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Skóre grafu

$$A = \begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \\
\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 4 & 3 & 3 & 1 & 2 \end{matrix}
\end{array}$$

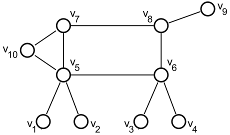


$$\text{score} = (1, 1, 1, 1, 5, 4, 3, 3, 1, 2)$$

Využití adjacenční matice

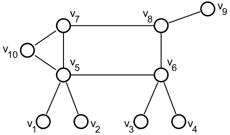
Počet sledů délky 1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



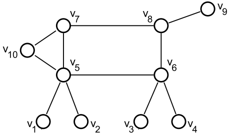
Počet sledů délky 2

$$A^2 = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & \mathbf{0} & 1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2
\end{pmatrix}$$



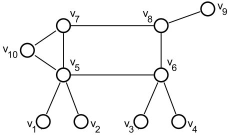
Počet sledů délky 3

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{5} & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & \mathbf{5} & 0 & 0 & 2 & 9 & 8 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 9 & 0 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 8 & 1 & 2 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 7 & 6 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 2 & 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



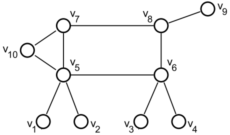
Počet sledů délky 4

$$A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 & 0 & 2 & 9 & 8 & 1 & 2 & 6 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 9 & 8 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 9 & 0 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 9 & 0 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 2 & \mathbf{2} & 9 & 9 & 33 & 3 & 9 & 19 & 1 & 10 \\ 9 & 9 & 0 & 0 & 3 & 24 & 18 & 1 & 7 & 10 \\ 8 & 8 & 1 & 1 & 9 & 18 & 18 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 1 & 7 & 7 & 19 & 1 & 3 & 16 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 7 & 6 & 0 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & 2 & 2 & 10 & 10 & 10 & 7 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$



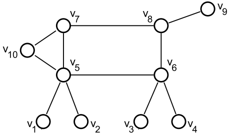
Existence cesty délky 0 nebo 1

$$
(A+I) > 0 = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{0} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} & 1
\end{pmatrix}
$$



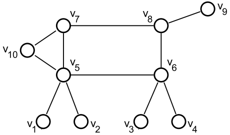
Existence cesty délky 0 až 2

$$(A+I)^2 > 0 = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{0} \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{0} & 1
\end{pmatrix}$$



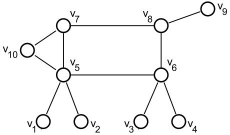
Existence cesty délky 0 až 3

$$(A+I)^3 > 0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



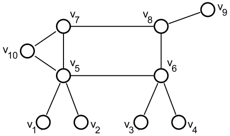
Existence cesty délky 0 až 4

$$(A + I)^4 > 0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Určení excentricity vrcholů

$$(A+I) > 0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

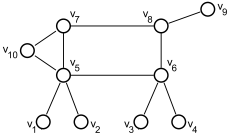


Žádný vrchol nemá v řádku pouze jedničky

exc = (, , , , , , , , ,)

Určení excentricity vrcholů

$$(A+I)^2 > 0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

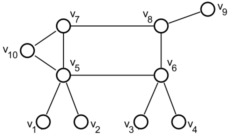


Vrchol v_6 má v řádku pouze jedničky

exc = (, , , , , 2, , , ,)

Určení excentricity vrcholů

$$(A+I)^3 > 0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

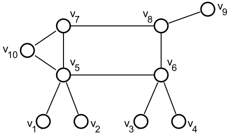


Vrcholy v_3, v_4, v_5, v_7, v_8, v_{10} mají v řádku pouze jedničky

exc = $(\;,\; ,3,3,3,2,3,3,\; ,3)$

Určení excentricity vrcholů

$$(A+I)^4 > 0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Vrcholy v_1, v_2, v_9 mají v řádku pouze jedničky

exc = (4, 4, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 4, 3)

Další vlastnosti

Poloměr grafu – nejmenší mocnina, při které bude některý z řádků plný jedniček

Průměr grafu – nejmenší mocnina, při které bude celá matice plná jedniček

Souvislý graf – po konečném počtu kroků dostanu matici z jedniček

Nesouvislý graf – stejně vypadající řádky tvoří jednu komponentu grafu